考生号

班级

姓名

2024届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)

数学

全卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x\mid x<0\}$,则 $A\cap B$ 的真子集个数为 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 7

2. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $z\mathrm{i}-\mathrm{i}=z+1$,则 $|z+1|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

3. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则 $|5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}|=$ ( )

A. 9　　B. $\sqrt{91}$　　C. 10　　D. $3\sqrt{10}$

4. 据科学研究表明,某种玫瑰花新鲜程度 y 与其花朵凋零时间 t(分钟)(在植物学上 t 表示从花朵完全绽放时刻开始到完全凋零时刻为止所需的时间)近似满足函数关系式:$y=b\cdot 2^{\frac{t}{10}}$($b$ 为常数),若该种玫瑰花在凋零时间为10分钟时的新鲜程度为 $\frac{1}{10}$,则当该种玫瑰花新鲜程度为 $\frac{1}{2}$ 时,其凋零时间约为(参考数据:$\lg 2\approx 0.3$) ( )

A. 3分钟　　B. 30分钟

C. 33分钟　　D. 35分钟

5. 已知某圆台的体积为 21π,其上、下底面圆的面积之比为 $1:4$ 且周长之和为 6π,则该圆台的高为 ( )

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$,过点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$ 且斜率为 -1 的直线 l 交 C 于 M,N 两点,且 $|MN|=32$,则 C 的准线方程为 ( )

A. $x=-1$　　B. $x=-2$

C. $x=-3$　　D. $x=-4$

7. 已知数列$\{a_n\}$是单调递增数列，$a_n=m(2^n-1)-n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(2,+\infty)$

B. $(1,2)$

C. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

D. $(2,3)$

8. 已知离散型随机变量 X 的分布列如下，则 $D(X)$的最大值为（　　）

X	0	1	2
P	a	$a+b$	$a-b$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{8}{9}$

D. 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 某高中从本校的三个年级中随机调查了五名同学关于生命科学科普知识的掌握情况，五名同学的成绩如下：84，72，68，76，80，则（　　）

A. 这五名同学成绩的平均数为 78

B. 这五名同学成绩的中位数为 74

C. 这五名同学成绩的上四分位数为 80

D. 这五名同学成绩的方差为 32

10. 已知正实数 a，b 满足 $a+2b=2$，则$\frac{b^2+1}{ab}$的可能取值为（　　）

A. 2

B. $1+\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}-1$

D. 4

11. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(1,0)$，$B(-1,0)$，$1\leqslant|AM|\leqslant 2$，点 M 的轨迹为 Ω，则（　　）

A. Ω 为中心对称图形

B. M 到直线 $x-ay+2=0(a\in\mathbf{R})$距离的最大值为 5

C. 若线段 OM 上的所有点均在 Ω 中，则$|OM|$最大为$\sqrt{3}$

D. 使$\angle MBO=\frac{\pi}{4}$成立的 M 点有 4 个

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $(2-x^{-\frac{1}{2}})^8$ 的展开式中含$\frac{1}{x^2}$的项的系数为________.

13. 已知 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan 3\alpha=$________.

14. 三个相似的圆锥的体积分别为 V_1，V_2，V_3，侧面积分别为 S_1，S_2，S_3，且 $V_1=V_2+V_3$，$aS_1=S_2+S_3$，则实数 a 的最大值为________.

四、解答题：共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x\sin x$.

(1)若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $a=1$，研究函数 $f(x)$ 在 $x\in(-1,0]$ 上的单调性和零点个数.

16.（15 分）

2024 年由教育部及各省教育厅组织的九省联考于 1 月 19 日开考，全程模拟高考及考后的志愿填报等. 某高中分别随机调研了 50 名男同学和 50 名女同学对计算机专业感兴趣的情况，得到如下 2×2 列联表.

	对计算机专业感兴趣	对计算机专业不感兴趣	合计
男同学	40		
女同学		20	
合计			

(1)完善以上的 2×2 列联表，并判断根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为该校学生是否对计算机专业感兴趣与性别有关；

(2)将样本的频率作为概率，现从全校的学生中随机抽取 30 名学生，求其中对计算机专业感兴趣的学生人数的期望和方差.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

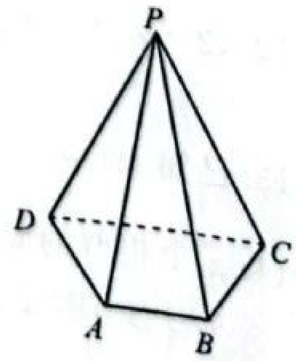
α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635

17.（15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，且 $AB=\frac{1}{2}CD=1$，$\triangle PCD$ 为等边三角形，平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=$ 直线 l.

(1)证明：$l//$ 平面 $ABCD$；

(2)若 l 与平面 PAD 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



18. (17 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，且 $|AB|=4$，点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若 E，F 为椭圆 C 上异于 A，B 的两个不同动点，且直线 AE 与 BF 的斜率满足 $\frac{k_{BF}}{k_{AE}}=-3$，证明：直线 EF 恒过定点.

19. (17 分)

三阶行列式是解决复杂代数运算的算法，其运算法则如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，则称 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的叉乘，其中 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}(x_1,y_1,z_1\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}(x_2,y_2,z_2\in\mathbf{R})$，$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$为单位正交基底. 以 O 为坐标原点、分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，已知 A，B 是空间直角坐标系中异于 O 的不同两点.

(1)①若 $A(1,2,1)$，$B(0,-1,1)$，求 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$；

②证明：$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$.

(2)记△AOB 的面积为 $S_{\triangle AOB}$，证明：$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$.

(3)证明：$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})^2$ 的几何意义表示以△AOB 为底面、$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ 为高的三棱锥体积的 6 倍.