2017 年四省（市）普通高中数学学科
教学指导意见

目 录

2017 年秋，北京、天津、山东、海南即将进入高考招生制度综合改革，为积极稳妥地推动落实本次高考招生制度综合改革实验，依据教育部《普通高中课程方案（修订稿）》以及《普通高中数学课程标准（修订稿）》等文件的精神，制定本高中数学学科教学与评价指导意见，供高考招生制度综合改革试点省市，在新修订的普通高中课程方案以及普通高中数学课程标准实施前的过渡时期使用。

一、理念与目标

（一）课程理念

1.学生发展为本，立德树人，提升素养

高中数学课程以学生发展为本，落实立德树人根本任务，培育科学精神和创新意识，提升数学核心素养。高中数学课程面向全体学生，实现：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

2.优化课程结构，突出主线，精选内容

高中数学课程体现社会发展的需求、数学学科的特征和学生的认知规律，发展学生数学核心素养。优化课程结构，为学生发展提供共同基础和多样化选择；突出数学主线，凸显数学的内在逻辑和思想方法；精选教学内容，处理好数学核心素养与知识技能之间的关系，强调数学与生活以及其他学科的联系，提升学生应用数学解决实际问题的能力，同时注重数学文化的渗透。

3.把握数学本质，启发思考，改进教学

高中数学教学以发展学生数学核心素养为导向，创设合适的教学情境，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质。提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式，激发学习数学的兴趣，养成良好的学习习惯，促进学生实践能力和创新意识的发展。注重信息技术与数学课程的深度融合，提高教学的实效性。不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

4.重视过程评价，突出素养，提高质量

高中数学学习评价关注学生知识技能的掌握，更关注数学核心素养的形成和发展，制定科学合理的学业质量标准，促进学生在不同学习阶段数学核心素养水平的达成。评价既要关注学生学习的结果，更要重视学生学习的过程。开发合理的评价工具，将知识技能的要求与核心素养的达成有机结合，建立目标多元、方式多样的评价体系。通过评价，提高学生学习兴趣，帮助学生认识自我，增强自信；帮助教师改进教学，提高质量。

（二）课程目标

通过高中数学课程的学习，获得进一步学习以及未来发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称“四基”）；提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力（简称“四能”）。

在学习数学和应用数学的过程中，发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学核心素养；会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界。

通过高中数学课程的学习，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；不断提高应用能力实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

（三）数学核心素养

核心素养是育人价值的集中体现，是通过学习而逐步形成的关键能力、必备品格与价值观念。数学核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习的过程中逐步形成和发展的。数学核心素养是适应个人终身发展和社会发展需要的具有数学基本特征的思维品质与关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。数学核心素养是落实课程目标的重要途径，包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。这些数学核心素养既相对独立、又相互交融，是一个有机的整体。

1.数学抽象

数学抽象是指舍去事物的一切物理属性，得到数学研究对象的素养。主要包括：从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，用数学语言予以表征。

数学抽象是数学的基本思想，是形成理性思维的重要基础，反映了数学的本质特征，贯穿在数学产生、发展、应用的过程中。数学抽象使得数学成为高度概括、表达准确、结论一般、有序多级的系统。

数学抽象主要表现为：获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系。

通过高中数学课程的学习，学生能在情境中抽象出数学概念、命题、方法和体系，积累从具体到抽象的活动经验；养成在日常生活和实践中一般性思考问题的习惯，把握事物的本质，以简驭繁；运用数学抽象的思维方式思考并解决问题。

2.逻辑推理

逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题的素养。主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要有归纳、类比；一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要有演绎。

逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质。

逻辑推理主要表现为：掌握推理基本形式和规则，发现问题和提出命题，探索和表述论证过程，理解命题体系，有逻辑地表达与交流。

通过高中数学课程的学习，学生能提出和论证数学命题，掌握逻辑推理的基本形式，学会有逻辑地思考问题；发现和提出数学命题；探索和表述论证过程；能够在比较复杂的情境中把握事物理解事物命题之间的关联，把握事物发展的脉络，把握知识结构；形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神，增强交流能力。

3.数学建模

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，验证结果、改进模型，最终解决实际问题。

数学模型搭建了数学与外部世界的桥梁，是数学应用的重要形式。数学建模是应用数学解决实际问题的基本手段，也是推动数学发展的动力。

数学建模主要表现为：发现和提出问题，建立和求解模型，检验和完善模型，分析和解决问题。

通过高中数学课程的学习，学生能有意识地用数学语言表达现实世界，发现和提出问题，感悟数学与现实之间的关联；学会用数学模型解决实际问题，积累数学实践的经验；认识数学模型在科学、社会、工程技术诸多领域的作用，提升应用能力实践能力，增强创新意识和科学精神。

4.直观想象

直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用图形理解和解决数学问题的素养。主要包括：借助空间认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题；建立数与形的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路。

直观想象是发现和提出问题、分析和解决问题的重要手段，是探索和形成论证思路、进行数学推理、构建抽象结构的思维基础。

直观想象主要表现为：建立形与数的联系，利用几何图形描述问题，借助几何直观理解问题，运用空间想象认识事物。

通过高中数学课程的学习，学生能提升数形结合的能力，发展几何直观和空间想象能力；增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识，提升数形结合的能力；形成数学直观直觉，在具体的情境中感悟事物的本质。

5.数学运算

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

数学运算是解决数学问题的基本手段。数学运算是演绎推理，是计算机解决问题的基础。

数学运算主要表现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，形成程序化思维。

通过高中数学课程的学习，学生能进一步发展数学运算能力；有效借助运算方法解决实际问题；通过运算促进数学思维发展，形成程序化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学精神。

6.数据分析

数据分析是指针对研究对象获取数据，运用统计方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象知识的素养。数据分析过程主要包括：收集数据，整理数据，提取信息，构建模型，进行推断，获得结论。

数据分析是研究随机现象的重要数学技术，是大数据时代数学应用的主要方法，也是“互联网+”相关领域的主要数学方法，已经深入到科学、技术、工程和现代社会生活的各个方面。

数据分析主要表现为：收集和整理数据，理解和处理数据，获得和解释结论，概括和形成知识。

通过高中数学课程的学习，学生能提升学生收集和整理，理解和处理数据的能力；获取有价值信息的意识和能力；适应数字化学习的需要，增强基于数据表达现实问题的意识，形成通过数据认识事物的思维品质，积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验。

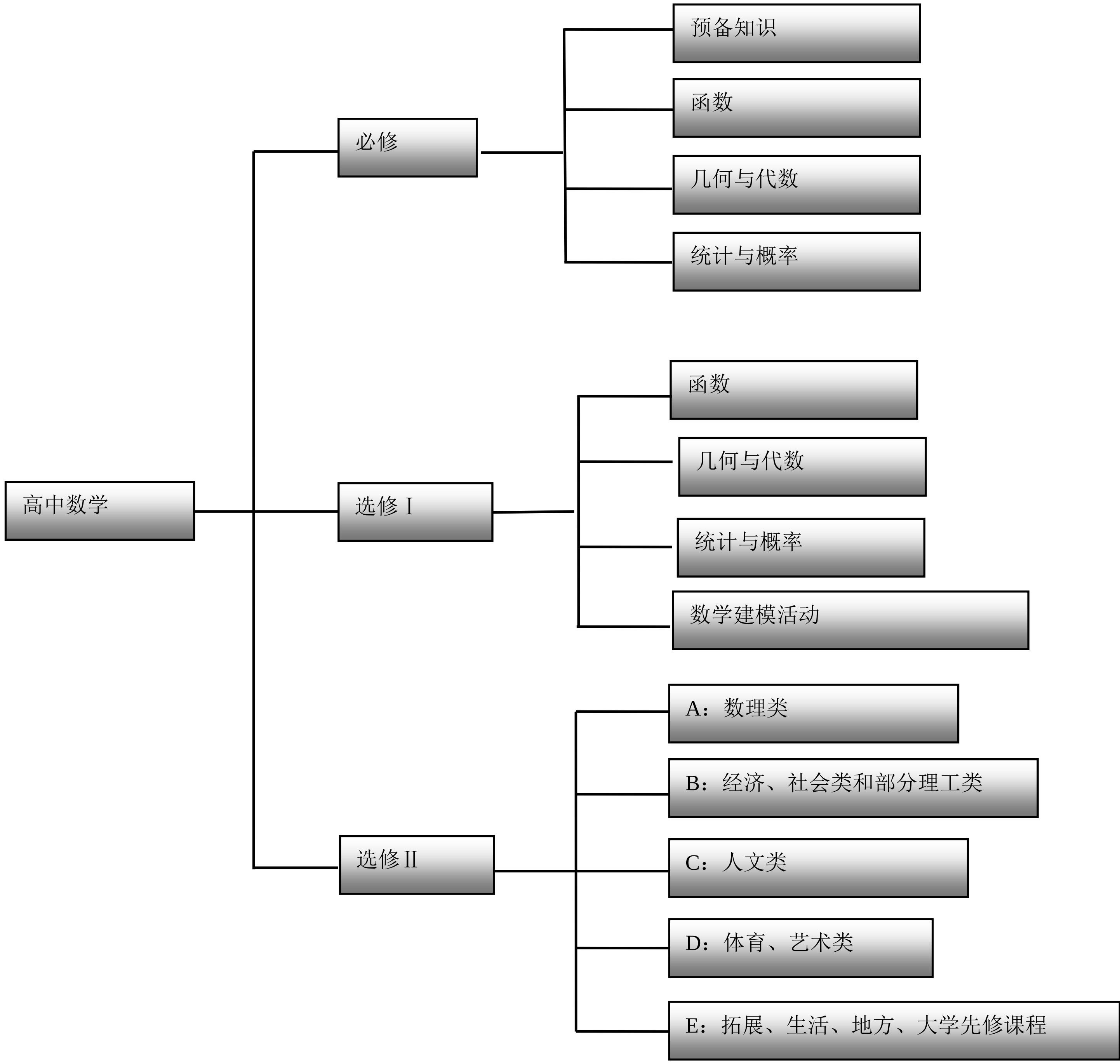
二、课程结构

（一）课程结构

高中数学课程分为必修课程、选修Ⅰ课程和选修Ⅱ课程。高中数学课程内容突出函数、几何与代数、统计与概率、数学建模活动与数学探究活动四条主线，它们贯穿必修、选修Ⅰ

和选修Ⅱ课程。数学文化融入课程内容。

高中数学课程结构如下：



（二）学分与选课说明

1. 学分设置

必修课程 8 学分，选修Ⅰ课程 6 学分，选修Ⅱ课程 6 学分。

2. 课程与选课说明

在选择数学课程时，学生、教师、家长应认真学习以下关于课程与选课的说明。如果学

生以高中毕业为目标，可以只学习必修课程，参加高中毕业的数学学业水平考试，还可以选择感兴趣的选修Ⅱ课程中的课程进修学习；如果学生计划通过参加数学高考进入高等学校学习，必须学习必修课程和选修Ⅰ课程，参加数学高考，还可以选择感兴趣的选修Ⅱ课程中的课程进修学习；如果学生除了必修课程和选修Ⅰ课程，还希望多学习一些数学课程，为进一步发展奠定更坚实的数学基础，展示自身的数学才能，可以根据自身未来发展的需求选择选修Ⅱ课程中的某些课程，为大学的自主招生提供参考。

（1）必修课程

必修课程为学生发展提供共同基础，是高中毕业的数学学业水平考试的内容要求。

（2）选修Ⅰ课程

选修Ⅰ课程是供学生选择的课程，必修课程和选修Ⅰ课程是高考的内容要求。

（3）选修Ⅱ课程

选修Ⅱ课程是由学校根据学校自身情况选择设置的课程，供学生依据个人志趣自主进行选择的课程，分为 A、B、C、D、E 五类。

这些课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考。学生可以根据自己的志向和大学专业的要求选择学习其中的某些课程。

A 课程是供有志于学习数理类（如：数学、物理、计算机、精密仪器等）专业学生选择的课程。

B 课程是供有志于学习经济、社会类（如：数理经济、社会学等）和部分理工类（如：化学、生物、机械等）专业学生选择的课程。

C 课程是供有志于学习人文类（如：语言、历史等）专业学生选择的课程。

D 课程是供有志于学习体育、艺术（包括音乐、美术）类等专业学生选择的课程。

E 课程是由学校自主选择开设、供学生自主选择的课程。包括拓展视野、日常生活、地方特色的数学课程，及还包括大学数学的先修课程等。

三、课程内容

（一）必修

包括：集合、函数概念与基本初等函数 I（指数函数、对数函数、幂函数）、基本初等函数 II（三角函数）、三角恒等变换、立体几何初步、平面解析几何初步、平面向量、解三角形、统计、概率。

预备知识

1.集合（4 课时）

【内容标准】

（1）集合的含义与表示

① 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系。

② 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用。

（2）集合间的基本关系

① 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。

② 在具体情境中，了解全集与空集的含义。

（3）集合的基本运算

① 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集。

② 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集。

③ 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用。

【教学提示】

集合是一个不加定义的概念，教学中应结合学生的生活经验和已有数学知识，通过列举丰富的实例，使学生理解集合的含义。学习集合语言最好的方法是使用，在教学中要创设使学生运用集合语言进行表达和交流的情境和机会，以便学生在实际使用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，进行相互转换并掌握集合语言。在关于集合之间的关系和运算的教学中，使用 Venn 图是重要的，有助于学生学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言。

函数主线

2.函数概念与基本初等函数 I（指数函数、对数函数、幂函数）（32 课时）

【内容标准】

（1）函数

① 通过丰富实例，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念。

② 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表

示函数。

③ 通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用。

④ 通过已学过的函数特别是二次函数，理解函数的单调性、最大（小）值及其几何意义；结合具体函数，了解奇偶性的含义。

⑤ 学会运用函数图象理解和研究函数的性质。

（2）指数函数

① 通过具体实例（如细胞的分裂，考古中所用的 ^{14}C 的衰减，药物在人体内残留量的变化等），了解指数函数模型的实际背景。

② 理解有理指数幂的含义，通过具体实例了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算。

③ 理解指数函数的概念和意义，能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点。

④ 在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数是一类重要的函数模型。

（3）对数函数

① 理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；通过阅读材料，了解对数的发现历史以及对简化运算的作用。

② 通过具体实例，直观了解对数函数模型所刻画的数量关系，初步理解对数函数的概念，体会对数函数是一类重要的函数模型；能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点。

③ 知道指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数（$a > 0$，$a \neq 1$）。

（4）幂函数

通过实例，了解幂函数的概念；结合函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x}, y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，了解它们的变化情况。

（5）函数与方程

① 结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系。

② 根据具体函数的图象，能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解，了解这种方法是求方程近似解的常用方法。

（6）函数模型及其应用

① 利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义。

② 收集一些社会生活中普遍使用的函数模型（指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等）的实例，了解函数模型的广泛应用。

（7）撰写数学文化小论文

根据某个主题，收集 17 世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物（开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）的有关资料或现实生活中的函数实例，采取小组合作的方式撰写有关函数概念的形成、发展或应用的小论文，在班级中进行交流。

【教学提示】

（1）函数概念的教学要从实际背景和定义两个方面帮助学生理解函数的本质。函数概念的引入一般有两种方法，一种方法是先学习映射，再学习函数；另一种方法是通过具体实例，体会数集之间的一种特殊的对应关系，即函数。考虑到多数高中学生的认知特点，为了有助于他们对函数概念本质的理解，建议采用后一种方式，从学生已掌握的具体函数和函数的描述性定义入手，引导学生联系自己的生活经历和实际问题，尝试列举各种各样的函数，构建函数的一般概念。再通过对指数函数、对数函数等具体函数的研究，加深学生对函数概念的理解。像函数这样的核心概念需要多次接触、反复体会、螺旋上升，逐步加深理解，才能真正掌握，灵活应用。

（2）在教学中，应强调对函数概念本质的理解，避免在求函数定义域、值域及讨论函数性质时出现过于繁琐的技巧训练，避免人为地编制一些求定义域和值域的偏题。

（3）指数幂的教学，应在回顾整数指数幂的概念及其运算性质的基础上，结合具体实例，引入有理指数幂及其运算性质，以及实数指数幂的意义及其运算性质，进一步体会“用有理数逼近无理数”的思想，并且可以让学生利用计算器或计算机进行实际操作，感受“逼近”过程。

（4）反函数的处理，只要求以具体函数为例进行解释和直观理解，例如，可通过比较同底的指数函数和对数函数，说明指数函数 $y = a^x$ 和对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数（$a > 0$，$a \neq 1$）。不要求一般地讨论形式化的反函数定义，也不要求求已知函数的反函数。

（5）在函数应用的教学中，教师要引导学生不断地体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数等函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用。

（6）应注意鼓励学生运用现代信息技术学习、探索和解决问题。例如，利用计算器、计算机画出指数函数、对数函数等的图象，探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质，求方程的近似解等。

3.基本初等函数 II（三角函数）（16 课时）

【内容标准】

（1）任意角、弧度

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化。

（2）三角函数

① 借助单位圆理解任意角三角函数（正弦、余弦、正切）的定义。

② 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式（$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$、$\pi\pm\alpha$ 的正弦、余弦、正切），能画出 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性。

③ 借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0,2\pi]$，正切函数在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的性质（如单调性、最大和最小值、图象与 x 轴交点等）。

④ 理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$。

⑤ 结合具体实例，了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义；能借助计算器或计算机画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，观察参数 A、ω、φ 对函数图象变化的影响。

⑥ 会用三角函数解决一些简单实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型。

【教学提示】

（1）在三角函数的教学中，教师应根据学生的生活经验，创设丰富的情境，使学生体会三角函数模型的意义。例如，通过单摆、弹簧振子、圆上一点的运动，以及音乐、波浪、潮汐、四季变化等实例，使学生感受周期现象的广泛存在，认识周期现象的变化规律，体会三角函数是刻画周期现象的重要模型。

（2）在三角函数的教学中，应发挥单位圆的作用。单位圆可以帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式，以及三角函数的图象和基本性质。借助单位圆的直观，教师可以引导学生自主地探索三角函数的有关性质，培养他们分析问题和解决问题的能力。

（3）提醒学生重视学科之间的联系与综合，在学习其他学科的相关内容（如单摆运动、波的传播、交流电）时，注意运用三角函数来分析和理解。

（4）弧度是学生比较难接受的概念，教学中应使学生体会弧度也是一种度量角的单位（圆周的 $\frac{1}{2\pi}$ 所对的圆心角或周角的 $\frac{1}{2\pi}$）。随着后续课程的学习，他们将会逐步理解这一概念，在此不必深究。

4.三角恒等变换（8 课时）

【内容标准】

（1）经历用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量方法的作用。

（2）能从两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系。

（3）能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括引导导出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）。

【教学提示】

（1）在三角恒等变换的教学中，可以采用不同的方式得到三角恒等变换基本公式；也可以引导学生利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，并由此公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式。鼓励学生独立探索和讨论交流，引导学生推导积化和差、和差化积、半角公式，以此作为三角恒等变换的基本训练。

（2）在教学中，应鼓励学生使用计算器和计算机探索和解决问题。例如，求三角函数值，求解测量问题，分析 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中参数变化对函数的影响等。在三角函数、平面向量和三角恒等变换相应的内容中可以插入数学探究或数学建模活动。

几何与代数主线

5.立体几何初步（18 课时）

【内容标准】

（1）空间几何体

① 利用实物模型、计算机软件观察大量空间图形，认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构。

② 能画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的三视图，能识别上述的三视图所表示的立体模型，会使用材料（如纸板）制作模型，会用斜二侧法画出它们的直观图。

③ 通过观察用两种方法（平行投影与中心投影）画出的视图与直观图，了解空间图形的不同表示形式。

④ 完成实习作业，如画出某些建筑的视图与直观图（在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求）。

⑤ 了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式（不要求记忆公式）。

（2）点、线、面之间的位置关系

① 借助长方体模型，在直观认识和理解空间点、线、面的位置关系的基础上，抽象出空间线、面位置关系的定义，并了解如下可以作为推理依据的公理和定理。

◆公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。

◆公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

◆公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

◆公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行。

◆定理：空间中如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补。

②以立体几何的上述定义、公理和定理为出发点，通过直观感知、操作确认、思辨论证，认识和理解空间中线面平行、垂直的有关性质与判定。

通过直观感知、操作确认，归纳出以下判定定理。

◆平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

◆一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行。

◆一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。

◆ 一个平面过另一个平面的垂线，则两个平面垂直。

通过直观感知、操作确认，归纳出以下性质定理，并加以证明。

◆一条直线与一个平面平行，则过该直线的任一个平面与此平面的交线与该直线平行。

◆两个平面平行，则任意一个平面与这两个平面相交所得的交线相互平行。

◆垂直于同一个平面的两条直线平行。

◆两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。

③能运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题。

【教学提示】

（1）立体几何初步的教学重点是帮助学生逐步形成空间想象能力，发展学生直观想象素养。本部分内容的设计遵循从整体到局部、具体到抽象的原则，教师应提供丰富的实物模型或利用计算机软件呈现的空间几何体，帮助学生认识空间几何体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构，巩固和提高义务教育阶段有关三视图的学习和理解，帮助学生运用平行投影与中心投影，进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能。

（2）几何教学应注意引导学生通过对实际模型的认识，学会将自然语言转化为图形语言和符号语言。教师可以使用具体的长方体的点、线、面关系作为载体，使学生在直观感知的基础上，认识空间中一般的点、线、面之间的位置关系；通过对图形的观察、实验和说理，使学生进一步了解平行、垂直关系的基本性质以及判定方法，学会准确地使用数学语言表述

几何对象的位置关系，并能解决一些简单的推理论证及应用问题。

（3）立体几何初步的教学中，要求对有关线面平行、垂直关系的性质定理进行证明；对相应的判定定理只要求直观感知、操作确认，在选修Ⅰ中将用向量方法加以论证。

（4）有条件的学校应在教学过程中恰当地使用现代信息技术展示空间图形，为理解和掌握图形几何性质（包括证明）的教学提供形象的支持，提高学生的几何直观能力。教师可以指导和帮助学生运用立体几何知识选择课题，进行探究。

6.平面解析几何初步（18 课时）

【内容标准】

（1）直线与方程

①在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素。

②理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式。

③能根据斜率判定两条直线平行或垂直。

④根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式（点斜式、两点式及一般式），体会斜截式与一次函数的关系。

⑤能用解方程组的方法求两直线的交点坐标。

⑥探索并掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离。

（2）圆与方程

①回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程。

②能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系。

③能用直线和圆的方程解决一些简单的问题。

（3）在平面解析几何初步的学习过程中，体会用代数方法处理几何问题的思想。

（4）空间直角坐标系

①通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置。

②通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式。

【教学提示】

在平面解析几何初步的教学中，教师应帮助学生经历如下的过程：首先将几何问题代数化，用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分

析代数结果的几何含义，最终解决几何问题。这种思想应贯穿平面解析几何教学的始终，帮助学生不断地体会“数形结合”的思想方法。

7.平面向量（12 课时）

【内容标准】

（1）平面向量的实际背景及基本概念

通过力和力的分析等实例，了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义，理解向量的几何表示。

（2）向量的线性运算

① 通过实例，掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义。

② 通过实例，掌握向量数乘的运算，并理解其几何意义，以及两个向量共线的含义。

③ 了解向量的线性运算性质及其几何意义。

（3）平面向量的基本定理及坐标表示

① 了解平面向量的基本定理及其意义。

② 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示。

③ 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算。

④ 理解用坐标表示的平面向量共线的条件。

（4）平面向量的数量积

① 通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的含义及其物理意义。

② 体会平面向量的数量积与向量投影的关系。

③ 掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算。

④ 能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系。

（5）向量的应用

经历用向量方法解决某些简单的平面几何问题、力学问题与其他一些实际问题的过程，体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具，发展运算能力和解决实际问题的能力。

【教学提示】

向量概念的教学应从物理背景和几何背景入手，物理背景是力、速度、加速度等概念，几何背景是有向线段。了解这些物理背景和几何背景，对于学生理解向量概念和运用向量解决实际问题都是十分重要的。教师还可以引导学生运用向量解决一些物理和几何问题。例如，利用向量计算力使物体沿某方向运动所做的功，利用向量解决平面内两条直线平行与垂直的位置关系等问题。对于向量的非正交分解只要求学生作一般了解，不必展开。

8.解三角形（8 课时）

【内容标准】

（1）通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题。

（2）能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

【教学提示】

解三角形的教学要重视正弦定理和余弦定理在探索三角形边角关系中的作用，引导学生认识它们是解决测量问题的一种方法，不必在恒等变形上进行过于繁琐的训练。

统计与概率主线

9.统计（16 课时）

【内容标准】

（1）随机抽样

①能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题。

②结合具体的实际问题情境，理解随机抽样的必要性和重要性。

③在参与解决统计问题的过程中，学会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；通过对实例的分析，了解分层抽样和系统抽样方法。

④能通过试验、查阅资料、设计调查问卷等方法收集数据。

（2）用样本估计总体

①通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图，体会它们各自的特点。

②通过实例理解样本数据标准差的意义和作用，学会计算数据标准差。

③能根据实际问题的需求合理地选取样本，从样本数据中提取基本的数字特征（如平均数、标准差），并作出合理的解释。

④在解决统计问题的过程中，进一步体会用样本估计总体的思想，会用样本的频率分布估计总体分布，会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征；初步体会样本频率分布和数字特征的随机性。

⑤会用随机抽样的基本方法和样本估计总体的思想，解决一些简单的实际问题；能通过对数据的分析为合理的决策提供一些依据，认识统计的作用，体会统计思维与确定性思维的差异。

⑥形成对数据处理过程进行初步评价的意识。

（3）变量的相关性

①通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系。

②经历用不同估算方法描述两个变量线性相关的过程。知道最小二乘法的思想，能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程。

【教学提示】

（1）教师应引导学生体会统计的作用和基本思想，统计的特征之一是通过部分的数据来推测全体数据的性质。学生应体会统计思维与确定性思维的差异，注意到统计结果的随机性，统计推断是有可能犯错误的。

（2）统计是为了从数据中提取信息，教学时应引导学生根据实际问题的需求选择不同的方法合理地选取样本，并从样本数据中提取需要的数字特征。不应把统计处理成数字运算和画图表。对统计中的概念（如“总体”“样本”等）应结合具体问题进行描述性说明，不应追求严格的形式化定义。

（3）统计教学必须通过案例来进行。教学中应通过对一些典型案例的处理，使学生经历较为系统的数据处理全过程，并在此过程中学习一些数据处理的方法，并运用所学知识、方法去解决实际问题。例如，在学习线性相关的内容时，教师可以鼓励学生探索用多种方法确定线性回归直线。在此基础上，教师可以引导学生体会最小二乘法的思想，根据给出的公式求线性回归方程。对感兴趣的学生，教师可以鼓励他们尝试推导线性回归方程。

10.概率（8 课时）

【内容标准】

（1）在具体情境中，了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性，进一步了解概率的意义以及频率与概率的区别。

（2）通过实例，了解两个互斥事件的概率加法公式。

（3）通过实例，理解古典概型及其概率计算公式，会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件数及事件发生的概率。

（4）了解随机数的意义，能运用模拟方法（包括计算器产生随机数来进行模拟）估计概率，初步体会几何概型的意义。

（5）通过阅读材料，了解人类认识随机现象的过程。

【教学提示】

（1）概率教学的核心问题是让学生了解随机现象与概率的意义。教师应通过日常生活中的大量实例，鼓励学生动手试验，正确理解随机事件发生的不确定性及其频率的稳定性，并尝试

澄清日常生活遇到的一些错误认识（如“中奖率为 1/1000 的彩票，买 1000 张一定中奖。”）。

（2）古典概型的教学应让学生通过实例理解古典概型的特征：实验结果的有限性和每一个实验结果出现的等可能性。让学生初步学会把一些实际问题化为古典概型。教学中不要把重点放在“如何计数”上。

（3）应鼓励学生尽可能运用计算器、计算机来处理数据，进行模拟活动，更好地体会统计思想和概率的意义。例如，可以利用计算器产生随机数来模拟掷硬币的试验等。

（二）选修 I

包括：常用逻辑用语、数列、不等式（不含二元一次不等式、简单线性规划）、导数及其应用、圆锥曲线与方程、空间向量与立体几何、数系的扩充与复数的引入、统计案例、计数原理、概率、数学建模活动。

预备知识

1.常用逻辑用语（按原文科要求，6 课时）

【内容标准】

（1）命题及其关系

理解必要条件、充分条件与充要条件的意义。

（2）全称量词与存在量词

①通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义。

②能正确地对含有一个量词的命题进行否定。

【教学提示】

（1）这里考虑的命题是指明确地给出条件和结论的命题，重点关注与必要条件、充分条件、充要条件、全称量词、存在量词有关的命题。

（2）对于量词，重在理解它们的含义，不要追求它们的形式化定义。

（3）注意引导学生在使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性。避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释，不要求使用真值表。

函数主线

2.数列（12 课时）

【内容标准】

（1）数列的概念和简单表示法

通过日常生活中的实例，了解数列的概念和几种简单的表示方法（列表、图象、通项公式），了解数列是一种特殊函数。

（2）等差数列、等比数列

① 通过实例，理解等差数列、等比数列的概念。

② 探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式。

③ 能在具体的问题情境中，发现数列的等差关系或等比关系，并能用有关知识解决相应的问题。

④ 体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系。

【教学提示】

（1）等差数列和等比数列有着广泛的应用，教学中应重视通过具体实例（如教育贷款、购房贷款、放射性物质的衰变、人口增长等），使学生理解这两种数列模型的作用，培养学生从实际问题中抽象出数列模型的能力。

（2）在数列的教学中，应保证基本技能的训练，引导学生通过必要的练习，掌握数列中各量之间的基本关系。但训练要控制难度和复杂程度。

3.不等式（不含简单线性规划）（8 课时）

【内容标准】

（1）不等关系

通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式（组）的实际背景。

（2）一元二次不等式

① 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程。

② 通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系。

③ 会解一元二次不等式，对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的思维框图。

（3）基本不等式：$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ （a、$b\geq0$）

① 探索并了解基本不等式的证明过程。

② 会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题。

【教学提示】

一元二次不等式教学中，应注重使学生了解一元二次不等式的实际背景。求解一元二次不等式，首先可求出相应方程的根，然后根据相应函数的图象求出不等式的解；也可以运用代数

的方法求解。鼓励学生设计求解一元二次不等式的思维框图。

4.导数及其应用（按原文科要求，16 课时）；

【内容标准】

（1）导数概念及其几何意义

①通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵。

②通过函数图象直观地理解导数的几何意义。

（2）导数的运算

① 能根据导数定义，求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ 的导数。

② 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数。

③ 会使用导数公式表。

（3）导数在研究函数中的应用（按原文科要求）

① 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间。

② 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及在给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值。

（4）生活中的优化问题举例

例如，通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用。

（5）数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值。具体要求见本标准中“数学文化”的要求。

【教学提示】

（1）导数的概念是通过实际背景和具体应用的实例引入的。教学中，可以通过研究增长率、膨胀率、效率、密度、速度等反映导数应用的实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，知道瞬时变化率就是导数。通过感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用，体会导数的思想及其内涵。这样处理的目的是帮助学生直观理解导数的背景、思想和作用。

（2）在教学中，要防止将导数仅仅作为一些规则和步骤来学习，而忽视它的思想和价值。应使学生认识到，任何事物的变化率都可以用导数来描述。应当避免过量的形式化运算练习。

几何与代数主线

5.圆锥曲线与方程（按原文科要求，12 课时）

【内容标准】

（1）了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用。

（2)经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程,掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质。

（3）了解抛物线、双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它们的简单几何性质。

（4）通过圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数形结合的思想。

（5）了解圆锥曲线的简单应用。

【教学提示】

（1）在引入圆锥曲线时，应通过丰富的实例（如行星运行轨道、抛物运动轨迹、探照灯的镜面），使学生了解圆锥曲线的背景与应用。

（2）教师应向学生展示平面截圆锥得到椭圆的过程，使学生加深对圆锥曲线的理解。有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，利用计算机演示平面截圆锥所得的圆锥曲线。

（3）教师应向学生展现圆锥曲线在实际中的应用，例如，投掷铅球的运行轨迹，卫星的运行轨迹等。

6.空间向量与立体几何（按原理科要求，12 课时）;

【内容标准】

（1）空间向量及其运算

① 经历向量及其运算由平面向空间推广的过程。

② 了解空间向量的概念，了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示。

③ 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示。

④ 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直。

（2）空间向量的应用

① 理解直线的方向向量与平面的法向量。

② 能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直、平行关系。

③ 能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理（包括三垂线定理）。

④ 能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

【教学提示】

（1）空间向量的教学应引导学生运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程。教学过程中应注意维数增加所带来的影响。

（2）在教学中，可以鼓励学生灵活选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题。

7.数系的扩充与复数的引入（4 课时）。

【内容标准】

（1）在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系。

（2）理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件。

（3）了解复数的代数表示法及其几何意义。

（4） 能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义。

【教学提示】

在复数概念与运算的教学中，应注意避免繁琐的计算与技巧训练。对于感兴趣的学生，可以安排一些引申的内容，如求 $x^3=1$ 的根、介绍代数学基本定理等。

统计与概率主线

8.统计案例（按原文科要求，14 课时）

【内容标准】

通过典型案例，学习下列一些常见的统计方法，并能初步应用这些方法解决一些实际问题。

① 通过对典型案例（如“肺癌与吸烟有关吗”等）的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用。

② 通过对典型案例（如“人的体重与身高的关系”等）的探究，进一步了解回归的基本思想、方法及初步应用。

【教学提示】

（1）统计案例的教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点（如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性），体会统计方法应用的广泛性。应尽量给学生提供一定的实践活动机会，可结合数学建模的活动，选择 1 个案例，要求学生亲自实践。对于统计案例内容，只要求学生了解几种统计方法的基本思想及其初步应用，对于其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算。

（2）教学中，应鼓励学生使用计算器、计算机等现代信息技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题。

9.计数原理（9 课时）

【内容标准】

⑴两个基本计数原理

通过实例，了解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义。

⑵排列与组合

通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式。

⑶二项式定理

能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题。

【教学提示】

教学中，引导学生结合具体案例理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理，会根据分类加法计数原理、分步乘法计数原理分析、处理简单问题。

10.概率（8 课时）

【内容标准】

① 在对具体问题的分析中，理解取有限值的离散型随机变量及其分布列的概念，认识分布列对于刻画随机现象的重要性。

② 通过实例（如彩票抽奖），理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用。

③ 在具体情境中，了解条件概率和两个事件相互独立的概念，理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些简单的实际问题。

④ 通过实例，理解取有限值的离散型随机变量均值、方差的概念，能计算简单离散型随机变量的均值、方差，并能解决一些实际问题。

⑤ 通过实际问题，借助直观（如实际问题的直方图），认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义。

【教学提示】

研究一个随机现象，就是要了解它所有可能出现的结果和每一个结果出现的概率，分布列正是描述了离散型随机变量取值的概率规律，二项分布和超几何分布是两个应用广泛的概率模型，要求通过实例引入这两个概率模型，不追求形式化的描述。教学中，应引导学生利用所学知识解决一些实际问题。

11.数学建模活动（4 课时）

【内容标准】

数学建模活动是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程。主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确定参数、计算求解，验证结果、改进模型，最终解决实际问题。数学建模活动是运用模型思想解决实际问题的一类综合实践活动，是高中阶段数学课程的重要内容。选修Ⅰ课程中，“数学建模活动” 要求学生完成一个课题研究。

【教学提示】

“数学建模活动”要课题可以由教师给定，也可以由学生与教师协商确定。课题研究的过程包括选题、开题、做题、结题四个环节。学生需要撰写开题报告，教师要组织开展“开题”交流活动，开题报告应包括选题的意义、文献综述、解决问题思路、研究计划、预期结果等。“做题”是解决问题的过程，包括描述问题、数学表达、建立模型、求解模型、得到结论、反思完善等过程。“结题”包括撰写研究报告和报告研究结果，由教师组织学生开展结题答辩。根据选题的内容，报告可以采用专题作业、测量报告、算法程序、制作的实物、研究报告或小论文等多种形式。在数学建模活动中，鼓励学生使用信息技术。

经历数学建模活动的全过程，整理资料，撰写研究报告或小论文，并进行报告、交流。对于研究报告或小论文的评价，教师应组织评价小组，可以邀请校外专家、社会人士、家长等参与评价，也可以组织学生互评。教师要引导学生遵循学术规范，坚守诚信底线，并纳入评价内容。研究报告或小论文及其评价应当作为文件存入学生个人学习档案，为大学招生提供参考和依据。学生可以采取独立的方式或者小组合作（2-3 人为宜）的方式，完成课题研究（参见案例 1）。

（三）选修Ⅱ

选修Ⅱ课程是由学校根据学校自身情况选择设置的课程，供学生依据个人志趣自主选择的课程，分为 A、B、C、D、E 五类。

这些课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考。学生可以根据自己的志向和大学专业的要求选择学习其中的某些课程。

A 课程是供有志于学习数理类（如：数学、物理、计算机、精密仪器等）学生选择的课程。

B 课程是供有志于学习经济、社会类（如：数理经济、社会学等）和部分理工类（如：化学、生物、机械等）学生选择的课程。

C 课程是供有志于学习人文类（如：历史、语言等）学生选择的课程。

D 课程是供有志于学习体育、艺术（包括音乐、美术）类学生等选择的课程。

E 课程是由学校自主选择开设、供学生自主选择的课程。包括拓展视野、日常生活、地方特色的数学课程，及还包括大学数学的先修课程等。大学数学先修课程可参考中国教育学会关于大学数学先修课程的说明。

“数学建模活动”“数学探究活动”“数学文化”融入课程内容之中。

选修Ⅱ课程的修习情况应列为综合素质评价的内容。不同高等院校、不同专业的招生，根据需要可以对选修Ⅱ课程中某些内容提出学分要求。国家、地方政府、社会权威机构可以组织命题考试，考试成绩应作为文件存入学生个人学习档案，供高等院校自主招生参考。

A 课程

A 课程包括微积分、空间几何与代数、统计与概率三门课程，其中微积分 2.5 学分，空间几何与代数 2 学分，统计与概率 1.5 学分。

微积分

本课程在数列极限的基础上建立函数极限和连续的概念；在具体的情境中用极限刻画导数，给出借助导数研究函数性质的一般方法；通过极限建立微分和积分的概念，阐述微分和积分的关系（微积分基本定理）及其应用。本课程要考虑中学生的接受能力，重视课程内容的实际背景，关注数学内容的直观理解，培养学生的数学抽象、数学运算、数学建模和逻辑推理素养，为进一步学习大学数学课程奠定基础。

内容包括：数列极限、函数极限、连续函数、导数与微分、定积分。

1.数列极限

（1）通过典型收敛数列的极限过程（当 n>0 时，$\frac{1}{n}\to 0$，$\frac{n}{n+1}\to 1$，$q^n\to 0$（$|q|<1$），$a^{\frac{1}{n}}\to 1$（$a>0$）），建立并理解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义。

（2）探索并证明“收敛数列是有界数列”的基本性质。

（3）通过典型单调有界数列$\{\frac{1}{n}\}$，$\{\frac{n}{n+1}\}$，$\{q^n\}$(0<q<1)，$\{a^{\frac{1}{n}}\}$(a>0)的收敛过程，理解“单调有界数列必有极限”的基本事实。

（4）掌握数列极限的四则运算法则。

（5）通过典型数列的收敛性，理解 e 的意义。

2.函数极限

（1）通过典型函数的极限过程（当 $x\to a$ 时，$x^2\to a^2$；当 $x\to a$ 时，$\sin x\to\sin a$；当 $x\to 0$ 时，$a^x\to 1$(a>0，且 $a\neq 1$)），理解函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义。

（2）掌握基本初等函数极限的四则运算。

（3）掌握两个重要函数极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，并会求其简单变形的极限。

3.连续函数

（1）理解连续函数的定义。

（2）了解闭区间上连续函数的有界性、介值性及其简单应用（例如，用二分法求方程近似解）。

4.导数与微分

（1）借助物理背景与几何背景理解导数的意义，并能给出导数的严格数学定义。

（2）通过导函数的概念，掌握二阶导数的概念，了解二阶导数的物理意义与几何意义。

（3）了解复合函数的求导公式。

（4）理解并证明拉格朗日中值定理，并能用其讨论函数的单调性。

（5）会利用拉格朗日中值定理，证明一些不等式（例如，对于 $x>0$,有 $\sin x<x$ ，$\ln(1+x)<x$ ）。

（6）会利用导数讨论函数的极值问题，利用几何图形说明极值点的必要条件与充分条件（不要求数学证明）。

（7）了解微分的概念及其实际意义，并会用符号表示。

5.定积分

（1）通过等分区间求特殊曲边梯形面积的极限过程，理解定积分的概念及其几何意义与物理意义。

（2）在单调函数定积分的计算过程中，通过微分感悟积分与导数的关系，理解并掌握牛顿-莱布尼茨公式 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt$ 。

（3）会利用导数表和牛顿-莱布尼茨公式，求一些简单函数的定积分。

（4）会利用定积分计算某些封闭图形的面积，计算球、圆锥、圆台和某些三棱锥、三棱台的体积；能利用定积分解决简单的作功问题和重心问题。

空间几何与代数

本课程在必修课程和选修Ⅰ课程的基础上，通过系统学习三维空间的向量代数，表述各种运算的几何背景，实现几何与代数的融合。引入矩阵与行列式的概念，利用矩阵理论解三元一次方程组；利用向量代数，讨论三维空间中点、线、面的位置关系与度量；利用直观想

象建立平面和空间的等距变换理论。将空间几何与线性代数融合在一起，把握问题的本质，为代数理论提供几何背景，用代数方法解决几何问题，进而解决实际问题，为大学线性代数课程的学习奠定直观基础。

内容包括：空间向量代数、三阶矩阵与行列式、三元一次方程组、空间中的平面与直线、等距变换。

1. 空间向量代数

（1）通过几何直观，理解向量运算的几何意义。

（2）探索并解释空间向量的内积与外积及其几何意义。

（3）理解向量的投影与分解及其几何意义，并会应用。

（4）掌握向量组的线性相关性，并能加以判断。

（5）掌握向量的线性运算，理解向量空间与子空间的概念。

2．三阶矩阵与行列式

（1）通过几何直观引入矩阵概念，掌握矩阵的三种基本运算及其性质。

（2）了解正交矩阵及其基本性质，能用代数方法解决几何问题。

（3）掌握行列式定义与性质，会计算行列式。

3. 三元一次方程组

（1）通过实例，探索三元一次方程组的求解过程，理解三元一次方程组的常用解法（高斯消元法），会用矩阵表示三元一次方程组。

（2）掌握三元齐次线性方程组的解法，会表示一般解。

（3）掌握非齐次线性方程组有解的判定，建立线性方程组的理论基础。

（4）通过探索三元线性方程组解的结构，会表示一般解。

（5）理解 Cramer 法则，会用 Cramer 法则求解三元线性方程组。

4. 空间中的平面与直线

（1）通过向量的坐标表示，建立空间平面的代数式（方程）。

（2）掌握空间直线方程的含义，会用代数式（方程）表示空间直线。

（3）理解空间点、直线与平面的位置关系，会用代数（线性方程组）方法判断空间点、直线与平面的位置关系，会求点到直线（平面）的距离。

5. 等距变换

（1）了解平面变换的含义，理解平面的等距变换，特别是三种基本等距变换：直线反射、平移、旋转。

（2）了解平面对称图形及变换群概念。

（3）掌握常见平面等距变换及其矩阵表示。

（4）了解空间变换的含义，理解空间的等距变换，特别是三种常见等距变换：平面反射、平移、旋转。

（5）了解空间对称图形及变换群。

（6）掌握常见空间等距变换及其矩阵表示。

统计与概率

本课程在必修课程和选修 I 课程的基础上，在概率课程方面，通过具体实例，进一步学习连续型随机变量及其概率分布，二维随机向量及其联合分布，并运用这些数学模型，解决一些简单的实际问题。在统计课程方面，结合一些具体任务，学习参数估计、假设检验，并运用这些方法解决一些简单的实际问题；在一元线性回归分析的基础上，结合具体实例，进一步学习二元线性回归分析的方法，解决一些简单的实际问题。为进一步学习大学数学课程中的统计概率奠定基础。在教学活动中，要重视课程内容的实际背景，关注学生对数学内容的直观理解；要充分考虑中学生接受能力，更要注重学生数学核心素养的提升。

内容包括：连续型随机变量及其分布、二维随机变量及其联合分布、参数估计、假设检、二元线性回归模型。

1.连续型随机变量及其分布

（1）借助具体实例，了解连续型随机变量及其分布，体会连续型随机变量与离散型随机变量的共性与差异。

（2）结合生活中的实例，了解几个重要连续型随机变量的分布：均匀分布、正态分布、卡方分布、*t*-分布，理解这些分布中参数的意义，能进行简单应用。

（3）了解连续型随机变量的均值和方差，知道均匀分布、正态分布、卡方分布、*t*-分布的均值和方差及其意义。

2. 二维随机变量及其联合分布

（1）在学习一维离散型随机变量的基础上，通过实例，了解二维离散型随机变量概念及其分布列、数字特征（均值、方差、协方差、相关系数），并能解决简单的实际问题。了解两个随机变量的独立性。

（2）在学习一维正态随机变量的基础上，通过具体实例，了解二维正态随机变量及其联合分布，以及联合分布中参数的统计含义。

3. 参数估计

借助对具体实际问题的分析，知道矩估计和极大似然估计这两种参数估计方法，了解参数估计原理，能解决一些简单的实际问题。

4.假设检验

（1）了解假设检验的统计思想和基本概念。

（2）借助具体实例，了解正态总体均值和方差检验的方法，了解两个正态总体的均值比较的方法。

（3）结合实际例子，了解总体分布的拟合优度检验。

（4）借助具体实例，了解威尔科克森符号秩检验和两个独立样本的威尔科克森符号秩检验的方法。

5. 二元线性回归模型

（1）了解二维正态分布及其参数的意义。

（2）了解二元线性回归模型，会用最小二乘原理对模型中的参数进行估计。

（3）运用二元线性回归模型解决简单的实际问题。

B 课程

B 课程包括微积分、空间向量与代数、应用统计、模型四门课程，其中微积分 2 学分，空间向量与代数 1 学分，应用统计 2 学分，模型 1 学分。

微积分

本课程在数列极限的基础上建立函数极限的概念；在具体的情境中用极限刻画导数，给出借助导数研究函数性质的一般方法；通过极限建立微分和积分的概念，阐述微分和积分的关系（微积分基本定理）及其应用。在学习一元函数的基础上，了解二元函数及其偏导数的概念。本课程要考虑中学生接受能力，重视课程内容的实际背景，关注数学内容的直观理解，培养学生的计算能力，为进一步学习大学相关课程奠定基础。

内容包括：极限、导数与微分、定积分、二元函数。

1.极限

（1）通过典型数列$\{\frac{1}{n}\}$，$\{\frac{n}{n+1}\}$，$\{q^n\}(0<q<1)$，了解数列的极限，掌握极限的符号，了解“单调有界数列必有极限”的基本事实。

（2）通过具体函数 $f(x)=x^2$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)=\sqrt{x}$，$f(x)=a^x$ (a>0，且$a\neq 1$)，$f(x)=\cos x$，了解函数极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$和连续函数的概念，掌握极限的符号，了解闭区间上连续函数的性质。

2.导数与微分

（1）通过导数概念，理解二阶导数的概念，了解二阶导数的物理意义与几何意义；掌握一些基本初等函数的一阶导数与二阶导数。

（2）理解拉格朗日中值定理（不要求证明），了解它的几何解释。

（3）能利用导数讨论函数的单调性，并证明某些不等式（例如，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，$\ln(1+x)<x$）。

（4）会利用导数讨论函数的极值问题，利用几何图形说明极值点的必要条件与充分条件（不要求数学证明）。

（5）借助导数，会求闭区间上一元一次函数、一元二次函数、一元三次函数的最大值与最小值。

（6）了解微分的概念及其实际意义，会用符号表示。

3.定积分

（1）了解闭区间上连续函数定积分的概念，理解其几何意义与物理意义。

（2）能够用等分区间方法计算特殊的黎曼和。

（3）利用 $f(x)$ 的单调性、等分区间的方法、拉格朗日中值定理，推导牛顿-莱布尼茨公式 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt$ 。

（4）会利用定积分计算某些平面封闭图形的面积，计算球、圆锥、圆台和某些三棱锥、三棱台的体积；了解祖暅原理。

4.二元函数

（1）通过简单实例，掌握二元函数的背景。

（2）了解偏导数的定义，能够计算一些简单函数的偏导数。例如，已知文件中找不到关系 ID 为 rId51 的图像部件。与 $g(y)$分别是基本初等函数，会求 $f(x)+g(y)$, $f(x)\ g(y)$的偏导数。

（3）会求一些简单二元函数的驻点，并能求相应的实际问题中的极值。

（4）利用等高线法，会求一次函数 $f(x,y)=ax+by$ 在闭凸多边形区域上的最大值和最小值。

（5）会求闭圆域、闭椭圆域上二元二次函数的最大值和最小值。

空间向量与代数

本课程在必修课程和选修Ⅰ课程的基础上，较为系统学习三维空间的整体结构——向量代数，感悟几何与代数的融合。引入矩阵与行列式的概念，并讨论三元一次方程组解的结构。

本课程中强调几何直观，把握问题的本质，培养学生数学运算、数学抽象、逻辑推理和直观想象等素养，为大学线性代数课程的学习奠定直观基础。

内容包括：空间向量代数、三阶矩阵和行列式、三元一次方程组。

1. 空间向量代数

（1）通过几何直观，理解向量运算的几何意义。

（2）探索并解释空间向量的内积与外积及其几何意义。

（3）理解向量的投影与分解及其几何意义，并会应用。

（4）掌握向量组的线性相关性，并能加以判断。

（5）掌握向量的线性运算，理解（低维）向量空间与子空间的概念。

（6）会求点到直线、点到平面的距离，两条异面直线的距离，直线与平面的夹角。

2.三阶矩阵与行列式

（1）通过几何直观引入矩阵概念，掌握矩阵的三种基本运算及其性质。

（2）掌握行列式定义与性质，会计算行列式。

3. 三元一次方程组

（1）通过实例，探索三元一次方程组的求解过程，理解三元一次方程组的常用解法（高斯消元法），会用矩阵表示三元一次方程组。

（2）掌握三元齐次线性方程组的解法，会表示一般解。

（3）掌握非齐次线性方程组有解的判定，建立线性方程组的理论基础。

（4）通过探索三元线性方程组解的结构，会表示一般解。

（5）理解 Cramer 法则，会用 Cramer 法则求解三元线性方程组。

应用统计

本课程在必修课程和选修 I 课程的基础上，在概率课程方面，通过具体实例，进一步学习连续型随机变量及其概率分布，二维随机向量及其联合分布，并运用这些数学模型，解决一些简单的实际问题。在统计课程方面，结合一些具体任务，学习参数估计、假设检验和不依赖于分布的统计检验，并运用这些方法解决一些简单的实际问题；学习数据分析的两种特殊方法——聚类分析和正交设计。为进一步学习大学数学课程中的统计概率奠定基础。在教学活动中，要关注学生对数学内容的直观理解，充分考虑中学生接受能力；要重视课程内容的实际背景，更要重视课程内容的实际应用；要注重全面提升学生数学核心素养。

内容包括：连续型随机变量及其分布、二维随机变量及其联合分布、参数估计、假设检验、聚类分析、正交设计。

1.连续型随机变量及其分布

（1）借助具体实例，了解连续型随机变量及其分布，体会连续型随机变量与离散型随机变量的共性与差异。

（2）结合生活中的实例，了解几个重要连续型随机变量的分布：均匀分布、正态分布、卡方分布、*t*-分布，理解这些分布中参数的意义，能进行简单应用。

（3）了解连续型随机变量的均值和方差，知道均匀分布、正态分布、卡方分布、*t*-分布的均值和方差及其意义。

2.二维随机变量及其联合分布

（1）在学习一维离散型随机变量的基础上，通过实例，了解二维离散型随机变量概念及其分布列、数字特征（均值、方差、协方差、相关系数），并能解决简单的实际问题。了解两个随机变量的独立性。

（2）在学习一维正态随机变量的基础上，通过具体实例，了解二维正态随机变量及其联合分布，以及联合分布中参数的统计含义。

3. 参数估计

借助对具体实际问题的分析，知道矩估计和极大似然估计这两种参数估计方法，了解参数估计原理。能解决一些简单的实际问题。

4.假设检验

（1）了解假设检验的统计思想和基本概念。

（2）借助具体实例，了解正态总体均值和方差检验的方法，了解两个正态总体的均值比较的方法。

（3）结合实际例子，了解总体分布的拟合优度检验。

（4）借助具体实例，了解威尔科克森符号秩检验和两个独立样本的威尔科克森符号秩检验的方法。

5. 聚类分析

（1）借助具体实例，了解聚类分析的意义。

（2）借助具体实例，了解几种聚类分析的方法，能解决一些简单的实际问题。

6. 正交设计

（1）借助具体实例，了解正交设计原理。

（2）借助具体实例，了解正交表，能用正交表进行实验设计。

模型

本课程在必修课程和选修Ⅰ课程的基础上，通过大量的实际问题，建立一些基本数学模型，包括线性模型、二次函数模型、指数函数模型、三角函数模型、参变数模型。在教学活动中，要重视这些模型的背景、形成过程、应用范围，提升数学建模、数学抽象、数学运算和直观想象素养，提升实践能力和创新能力。

内容包括：线性模型、二次函数模型、指数函数模型、三角函数模型、参变数模型。

1.线性模型

（1）结合实际问题，了解一维线性模型，理解一次函数与均匀变化的关系，并能发现生活中均匀变化的实际问题。

（2）结合实际问题，了解二维线性模型，探索平面上一些图形的变化，并能理解一维线性模型与二维线性模型的异同（例如，矩阵 A 是对角阵）。

（3）结合实际问题，了解三维线性模型，如经济学上的投入产出模型。

2. 二次函数模型

借助实例（光学模型、自由落体、边际效应），体会二次函数的实际意义，了解反比例函数模型的特征。

3. 指数函数模型

（1）借助增长率的实际问题，如木材增长、放射物衰减，理解指数函数模型。

（2）借助自然界一些事物的单调变化现象，理解它们可以用指数函数刻画。

4. 三角函数模型

（1）借助具体案例，理解一类波动问题（如光波、声波、电磁波）可以用三角函数刻画。

（2）借助具体案例，理解自然界中一些非单调变化的现象可以用三角函数刻画。

5.参变数模型

（1）借助具体实例，理解平面上的参变数模型，如弹道模型。

（2）借助具体实例，理解空间上的参变数模型，如螺旋曲线。

（3）借助一些用参变数方程描述的物理问题与几何问题，理解参变数的意义，掌握参变数变化的范围。

C 课程

C 课程包括逻辑推理初步、数学模型、社会调查与数据分析三门课程，每门课程 2 学分。

逻辑推理初步

本课程内容以数学推理为主线展开，将相关逻辑知识与数学推理有机融合。通过这部分内容的学习，能进一步掌握一定的逻辑知识，体会其在数学推理、论证中的作用，能运用相

关逻辑知识正确表述自己的思想、解释社会生活中的实际问题，提高逻辑思维能力，发展逻辑推理素养。

内容包括：逻辑推理概述、推理的类型、推理的逻辑规律、数学证明、公理化方法。

1.逻辑推理概述

（1）理解推理的含义及逻辑特点。

（2）通过实例，了解定义、命题与逻辑推理之间的关系。

（3）借助实例，了解数学定义。

（4）通过数学实例，了解数学定义的基本方式，如属加种差定义、外延定义。

（5）知道建立数学定义的规则，通过实例体会这些规则的意义。

（6）理解什么是数学命题，掌握数学命题的逻辑特征及结构。

（7）结合数学实例，能从命题的角度认识定义、定理、公式。

（8）进一步理解数学命题的条件，能结合实例对充分条件、必要条件、充要条件命题作出判断，理解等价命题。

（9）掌握命题的四种形式，知道它们之间的逻辑关系。

2.推理的类型

（1）结合学过的数学和生活中的实例，了解演绎推理的含义及特点，体会演绎推理的功能，掌握演绎推理的基本模式，并能进行推理。

（2）通过数学实例理解三段论的逻辑结构，能运用三段论表述具体的数学推理。

（3）结合学过的数学和生活中的实例，了解不完全归纳推理和完全归纳推理的含义及特点，知道它们的共性与差异，了解它们的逻辑形式，体会不完全归纳推理的重要性，能运用归纳推理进行推理。

（4）结合学过的数学和生活中的实例，了解类比推理的含义、特点及逻辑形式，体会类比推理的重要性，能运用类比推理进行推理。

（5）通过数学和生活中的实例，认识或然性推理和必然性推理在问题解决中是如何功能互补、相辅相成的。

（6）在适当的综合实践活动中，经历运用两种推理形式解决问题的过程，理解科学探究方法，感悟数学思想。

3.推理的逻辑规律

（1）理解同一律的含义，通过实例认识同一律在数学推理中的作用，能在推理中正确运用同一律。

（2）理解矛盾律的含义，通过实例认识矛盾律在数学推理中的作用，能在推理中正确运用矛盾律。

（3）理解排中律的含义，通过实例认识排中律在数学推理中的作用。

（4）能通过实例，区分排中律与矛盾律的不同，能在推理中正确运用排中律。

（5）理解充足理由律的含义，通过实例认识充足理由律在数学推理中的作用，能在推理中正确运用充足理由律。

4.数学证明

（1）通过实例，理解什么是数学证明，认识证明与推理的关系，了解数学证明的结构，认识数学证明在数学及生活中的意义。

（2）通过数学实例，认识直接证明方法（综合法、分析法、分析综合法）的思维过程和特点，能运用这些方法证明有关问题。

（3）通过数学实例，认识间接证明方法（反证法、同一法）的逻辑依据、思维过程和特点，能运用这些方法证明有关问题。

（4）通过数学实例，进一步认识数学归纳法的论证步骤，了解其中的逻辑，能运用数学归纳法证明有关问题。

（5）了解反驳的组成、逻辑特征，以及在数学、社会生活中的价值，通过数学实例进一步掌握对不同命题的否定方式。

（6）通过生活和数学实例，了解反驳的主要方法（反例法、归谬法），能运用它们分析、解决有关问题。

（7）通过人文领域的典型事例（如辩论），体会证明与反驳在社会实际生活中的重要性。

5.公理化方法

（1）了解数学公理化方法的意义、价值、特点，通过数学史的典型事例，了解数学公理化方法的现代发展特征。

（2）通过数学实例，了解如何通过原始概念和公理，有逻辑地构建理论体系。

（3）了解公理体系的独立性、相容性、完备性，通过实例了解它们的意义及要求。

（4）通过一些典型案例（如欧几里得《原本》、牛顿《自然哲学的数学原理》、马尔萨斯《人口论》、杰弗逊《独立宣言》、马克思《资本论》等），了解公理化方法在数学、自然科学及社会科学中的运用，进一步体会公理化思想。

数学模型

本课程在必修课程和选修Ⅰ课程的基础上，通过具体实例，建立一些基本的经济数学模

型和社会数学模型，包括存贮模型、投入产出模型、凯恩斯模型、选举模型、人口增长模型、传染病模型等。在教学活动中，要重视这些模型的背景、形成过程、应用范围，提升数学建模、数学抽象、数学运算和直观想象素养，提升实践能力和创新能力。

内容包括：经济数学模型、社会数学模型。

1 经济数学模型

（1）存贮模型

通过对存款等实际问题的分析，抽象出复利模型，了解该模型的特点，能用该模型解决实际问题。

通过对还贷款等实际问题的分析，抽象出等额本金付款模型，了解该模型的特点，能用该模型解决实际问题。

通过具体实例，了解刻画一类特殊存贮问题（不允许缺货）的数学模型（经济订货批量公式 $T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$， $Q=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$ ）的实际背景及其特点，能用该模型解决简单的实际问题。

（2）投入产出模型

了解投入产出模型的特点和意义，能用投入产出模型分析解决简单的实际问题。

通过具体实例，了解刻画简单生产销售问题的数学模型的特点，能用该模型解决简单的实际问题。

通过具体事例，了解需求函数、供应函数、供求平衡方程等数学模型的含义及特点，能用该模型解决简单的实际问题。

（3）凯恩斯模型

通过实例，了解凯恩斯模型的含义及特点，能用该模型解决简单的实际问题。

2. 社会数学模型

（1）选举模型

通过具体实例，了解几种席位分配方案的特点，并能用这些方案解决简单的席位分配问题。

通过具体实例，了解累积选举方法和投票势力指标的特点，并能用这些方法解决简单的选举问题。

通过具体实例，了解用层次分析法确定人才招聘决策方案的过程与基本方法，并能用这些方法确定人才招聘决策方案。

（2）人口模型

结合实例，了解刻画人口增长的指数增长模型（ $x(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}$ ）和阻滞增长模型

（$x(t)=\dfrac{x_m}{1+(\dfrac{x_m}{x_0}-1)\mathrm{e}^{-rt}}$）的特点。

（3）传染病模型

结合实例，了解传染病模型（SI 模型 $i(t)=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1}{i_0}-1)\mathrm{e}^{-\lambda t}}$）的意义及其特点。

社会调查与数据分析

社会调查是学生进入社会要掌握的基本能力，本课程在必修课程和选修 I 课程的基础上，结合社会调查的实际问题和社会调查中的一些关键环节，引导学生经历社会调查的全过程，包括社会调查方案的设计、抽样设计、数据分析、报告的撰写，并结合具体社会调查案例，分析在社会调查实施过程中可能遇到的问题，以及解决这些问题的对策。本课程的基本特点是实用、具体、有效、有趣。在完成社会调查任务的过程中，全面提升学生数学核心素养。

内容包括：社会调查概论、社会调查方案设计、抽样设计、社会调查数据分析、社会调查数据报告、社会调查案例选讲。

1．社会调查概论

（1）结合实例，了解社会调查的使用范围、分类和意义。

（2）针对具体问题，了解社会调查的基本步骤：项目确定、方案设计、组织实施、数据分析、形成报告。

2．社会调查方案设计

（1）结合实例，了解调查方案设计的基本内容：目的、内容、对象、项目、方式、方法等。

（2）结合实例，探索调查方案的可行性评估。

（3）结合实例，了解问卷设计的主要问题：问卷的结构与常用量表、问卷设计的程序与技巧。

（4）结合实例，掌握社会调查基本方法：文案调查法、观察法、访谈法、德尔菲法、电话法、面访调查法。

3.抽样设计

在必修课程学习的抽样方法（简单随机抽样、分层抽样）的基础上，了解二阶与多阶抽样，能根据具体情境选择合适的抽样方法。

4.社会调查数据分析

（1）结合具体实例，整理调查数据，了解常用统计图表（频数表、交叉表、直方图、茎

叶图、扇形图、雷达图、箱线图）及常用统计量（均值、众数、中位数、百分位数），能够确定各种抽样方法的样本量。

（2）结合具体实例，了解相关分析、回归分析、多元统计分析。

5.社会调查数据报告

掌握社会调查报告的基本要求及基本内容，能够做出简单的、完整的社会调查数据报告。

6.社会调查案例选讲

通过典型案例的学习，理解社会调查的意义。

D 课程

D 课程包括美与数学、音乐中的数学、美术中的数学、体育运动中的数学四门课程，每门课程 1 学分。

美与数学

学会审美不仅可以陶冶情操，而且能够改善思维品质。本课程尝试从数学的角度刻画审美的共性，主要包括：简洁、对称、周期、和谐等。通过本课程的学习，使学生对美的感受能够从感性走向理性，可以提升有志于从事体育、艺术事业学生的审美情趣，在形象思维的基础上增强理性思维能力。

内容包括：美与数学的简洁、美与数学的对称、美与数学的周期、美与数学的和谐。

1. 美与数学的简洁

数学中许多简洁的曲线、曲面来源于现实世界中的美。例如，太阳、满月、车轮、井盖形状等美的共性与圆相关，抛物运动、行星运动轨迹等美的共性与二次曲线相关，DNA 结构、向日葵花盘、海螺等美的共性与特殊曲线相关，家具、日用品、冷却塔、建筑物外形等美的共性与简单曲面相关，雪花、云彩、群山、某些现代设计等美的共性与分形相关。

2. 美与数学的对称

数学的对称来源于现实世界中的美。例如，动物、飞机、故宫外形等美的共性与空间反射对称相关，剪纸、脸谱、风筝等传统艺术美的共性与轴对称相关，某些矿物、晶体等美的共性与中心对称相关，带饰、面饰等美的共性与平移对称、中心对称、轴对称相关，循环赛制中的对称美，守恒定律中的对称美等。

3. 美与数学的周期

数学的周期来源于现实世界中的美。例如，昼夜交替、四季循环等美的共性与周期相关，日月星辰运动规律等美的共性与周期相关，海洋波浪、湖面水波外观美的共性与周期相关，乐曲创作、图案设计中美的共性之一与周期相关。

4. 美与数学的和谐

数学的和谐来源于现实世界中的美。例如，人体结构、建筑物、国旗、绘画、优选法等美的共性与黄金分割相关，苗木生长、动物繁殖、向日葵种子排列规律等美的共性与斐波那契数列相关。

音乐中的数学

音乐的要素——音高、音响、音色、节拍、乐音、乐曲、乐器等都与数学相关，特别是音的律制与数学的关系十分密切。通过本课程的学习，学生能够更加理性地理解音乐，鉴赏音乐的美，可以提升有志于从事音乐事业学生的音乐修养，增强理性思维能力。

内容包括：声波与正弦函数，律制、音阶与数列，乐曲的节拍与分数，乐器中的数学，乐曲中的数学。

1. 声波与正弦函数

纯音可以用正弦函数来表达，音高与正弦函数的频率相关，响度与正弦函数的振幅相关，和声、音色与正弦函数的叠加相关。

2. 律制、音阶与数列

音的律制用以规定音阶，三分损益律、五度相生律、纯律的音阶均与频率比、弦长比相关，十二平均律与等比数列相关。五线谱能够科学地记录乐曲。

3. 乐曲的节拍与分数

乐曲的小节、拍、拍号与分数相关，套曲的钢琴演奏与最小公倍数相关。

4. 乐器中的数学

键盘乐器（如钢琴）、弦乐器（如小提琴、二胡）、管乐器（如长笛）的发声、共鸣等，都与数学相关。

5. 乐曲中的数学

乐曲中的高潮点、乐曲调性的转换点，常与黄金分割相关；乐曲的创作既与平移、反射、伸缩等变换相关，也与排列、组合相关。

美术中的数学

美术主要包括绘画、雕塑、工艺美术、建筑艺术，以及书法、篆刻艺术等。通过本课程的学习，可以帮助学生了解美术中的平移、对称、黄金分割、透视几何等数学方法，了解计算机美术的基本概念和方法，了解著名画家在创作过程中的数学思想，体会数学在美术中的作用，更加理性地鉴赏美术作品，提升直观想象和数学抽象素养。在教学过程中，应以具体实例为主线展开，将美术作品与相关的数学知识有机联系起来。

内容包括：绘画与数学、其他美术作品中的数学、美术与计算机、著名画家的数学思想。

1. 绘画与数学

名画中的数学元素，绘画中的平移与对称，绘画中的黄金分割，绘画中的透视几何。

2. 其他美术作品中的数学

雕塑中的黄金分割，建筑中的对称，工艺中的对称，邮票中的数学，书法中的黄金分割。

3. 美术与计算机

计算机绘画的发展背景，计算机绘画所需的硬件和软件，计算机绘画实例。

4. 著名画家的数学思想

达芬奇、丢勒、高迪、毕加索、埃舍尔等著名画家的数学思想。

体育运动中的数学

在体育运动中，无论是运动本身还是与运动有关的事都蕴含着许多数学原理。例如，田径运动中的速度、角度、运动曲线；再如，比赛场次设计、运动器械设计、运动场馆设计等。通过本课程的学习，能够运用数学知识探索提高运动效率的途径，能够运用数学方法合理安排赛事，可以提升有志于从事体育事业学生的数学修养，增强理性思维能力。

内容包括：运动场上的数学原理；运动成绩的数据分析、运动赛事中的运筹帷幄、体育用具及设施中的数学知识。

1. 运动场上的数学原理

了解用学过的数学知识可以分析田径运动、球类运动、体操运动、水上运动等背后的数学原理，提高运动效率和运动成绩。例如，根据向量分解的原理指导运动员进行跳高、跳远和投掷。

2. 运动成绩的数据分析

了解运用统计的方法可以分析影响日常健康指标和各种运动成绩的数据，寻求规律，探索合理方案。例如，通过日常运动和健康状况的数据，分析运动与健康的关系。

3. 运动赛事中的运筹帷幄

知道能够借助图论、运筹等数学知识分析体育赛事的规律，进行合理安排，提升教练员的指挥策略，改善运动员赛场上的应对策略。

4. 体育用具及设施中的数学知识

知道在大多数体育运动用具和场馆的设计中都运用了数学知识，例如，足球、乒乓球的制作，网球拍的构造，标准跑道的规划；通过数学曲面感悟“鸟巢”“水立方”等体育设施的设计原理。

E 课程

E 课程是学校根据自身的需求开发或选用的课程，也可以是社会团体为中学生开发的课程，这些课程是对国家课程的有益补充。E 课程包括拓展视野、日常生活、地方特色的数学课程，及大学数学的先修课程等。

拓展视野的数学课程 例如，机器人与数学、对称与群、球面上的几何、欧拉公式与闭曲面分类、数列与差分、初等数论初步。

日常生活的数学课程 例如，生活中的数学，家庭理财与数学。

地方特色的数学课程 例如，地方建筑与数学，家乡经济发展的社会调查与数据分析。

大学数学的先修课程 例如，微积分、解析几何与线性代数、概率论与数理统计。（其要求可参照中国教育学会先修课程专家委员会制定的课程大纲、考试大纲）。

四、实施建议

（一）教学建议

全面落实立德树人要求，深入挖掘数学学科的育人价值，树立以发展学生数学核心素养为导向的教学意识，将数学核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程。在教学实践中，要不断探索和创新教学方式，不仅重视如何教，更要重视如何学，引导学生会学数学，养成良好的学习习惯；要努力激发学生数学学习的兴趣，促进更多的学生热爱数学。

（1）教学目标制定要突出数学核心素养

数学核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习的过程中逐步形成的。教师在制定教学目标时要充分关注数学核心素养的达成。要深入理解数学核心素养的内涵、价值、表现、水平及其相互联系；要结合特定教学任务，思考相应素养在教学中的孕育点、生长点；要注意数学核心素养与具体教学内容的关联；要关注数学核心素养目标在教学中的可实现性，研究其融入教学内容和教学过程的具体方式及载体，在此基础上确定教学目标。

学生核心素养水平的达成不是一蹴而就的，具有阶段性、连续性、整合性等特点。教师应理解不同数学核心素养水平的具体要求，不仅关注每一节课的教学目标，更要关注主题、单元的教学目标，明晰这些目标对实现核心素养发展的贡献。在确定教学目标时，要把握好学生核心素养发展的各阶段目标之间的关系，合理设计各类课程的教学目标。

数学核心素养是“四基”的继承和发展。“四基”是培养学生数学核心素养的沃土，是发展学生数学核心素养的有效载体。教学中要引导学生理解基础知识，掌握基本技能，感悟数学基本思想，积累数学基本活动经验，促进学生数学核心素养的不断提升。

（2）教学情境的创设要有利于发展数学核心素养

基于数学核心素养的教学活动应该把握数学的本质，创设合适的教学情境、提出合适的数学问题，引发学生思考与交流，形成和发展数学核心素养。

教学情境和数学问题是多样的、多层次的。教学情境包括：现实情境、数学情境、科学情境，每种情境可以分为熟悉的、关联的、综合的。数学问题是指在情境中提出的问题，分为简单问题、较复杂问题、复杂问题。数学核心素养在学生与情境、问题的有效互动中得到提升。在教学活动中，应结合教学任务及其蕴含的数学核心素养设计合适的情境和问题，引导学生用数学的眼光观察现象、发现问题，使用恰当的数学语言描述问题，用数学的思想、方法解决问题。在问题解决的过程中，理解数学内容的本质，促进学生数学核心素养的形成和发展。

设计合适的教学情境、提出合适的数学问题是有挑战性的，也为教师的实践创新提供了平台。教师应不断学习、探索、研究、实践，提升自身的数学素养，了解数学知识之间、数学与生活、数学与其他学科的联系，开发出符合学生认知规律、有助于提升学生数学核心素养的优秀案例。

（3）整体把握教学内容，促进数学核心素养连续、阶段性发展

数学核心素养的发展具有连续性和阶段性。教师要以数学核心素养为导向，抓住函数、几何与代数、统计与概率、数学建模活动与数学探究活动等内容主线，明晰数学核心素养在内容体系形成中表现出的连续性和阶段性，引导学生从整体上把握课程，实现学生数学核心素养形成和发展。

数学建模活动是综合提升数学核心素养的载体。教师应引导学生经历数学建模活动的全过程，整理资料，撰写研究报告或小论文，并进行报告、交流。对于研究报告或小论文的评价，教师应组织评价小组，可以邀请校外专家、社会人士、家长等参与评价，也可以组织学生互评。教师要引导学生遵循学术规范，坚守诚信底线，并纳入评价内容。研究报告或小论文及其评价应当作为文件存入学生个人学习档案，为大学招生提供参考和依据。学生可以采取独立的方式或者小组合作（2-3 人为宜）的方式，完成课题研究。

数学文化是指数学的思想、精神、方法、观点，以及它们的形成和发展，数学在科学技术、社会发展中的作用，数学与其它各种文化的关系；还包含数学史、数学教育、数学家的贡献等等。在教学活动中，教师应有意识地结合相应的教学内容，将数学文化融入日常教学，引导学生了解数学的发展历程，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，感悟数学的价值，提升学生的科学精神、应用意识和人文素养；还有利于激发学生的数学学习兴趣；有利于学

生进一步理解数学；有利于开拓学生视野、提升数学核心素养。

（4）既要重视教，更要重视学，促进学生学会学习

教师要把教学活动的重心放在促进学生学会学习上。要积极探索有利于促进学生学习的多样化教学方式，高中教学不仅限于讲授与练习，也包括引导学生阅读自学、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等。教师要善于根据不同的内容和学习任务采用不同的教学方式，优化教学，抓住关键的教学与学习环节，增强实效。例如：丰富作业的形式，提高作业的质量，提升学生完成作业的自主性、有效性。

要加强学习方法指导，帮助学生养成良好的数学学习习惯，敢于质疑、善于思考，理解概念、把握本质，数形结合、明晰算理，厘清知识的来龙去脉，建立知识之间的关联。教师还可以根据自身教学经历和学生学习的个性特点，引导学生总结出一些具有针对性的学习方式，因材施教。

（5）重视信息技术运用，实现信息技术与数学课程的深度融合

在“互联网+”时代，信息技术的广泛应用正在对数学教育产生深刻影响。在数学教学中，信息技术是学生学习和教师教学的手段，为师生交流、生生交流、人机交流搭建了平台，为学习和教学提供了丰富的资源。因此，教师应重视信息技术的运用，优化课堂教学，转变学习方式。例如，为学生理解概念创设背景，为学生探索规律启发思路，为学生解决问题提供直观，引导学生自主获取资源。在这个过程中，教师要有意识地积累数学活动案例，总结出生动、自主、有效的教学方式和学习方式。

注重信息技术与数学课程的深度融合，实现传统教学手段难以达到的效果。例如，利用计算机展示函数图象、几何图形运动变化过程；利用计算机探究算法、进行较大规模的计算；从数据库中获得数据，绘制合适的统计图表；利用计算机的随机模拟结果，帮助学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率；等等。

（二）评价建议

教学评价是数学教学活动的重要组成部分。教学评价的目的是考察学生学习的成效，进而也考察教师教学的成效。通过考察，诊断学生学习过程中的优势与问题，进而诊断教师教学过程中的优势与问题；通过诊断，改进学生的学习行为，进而改进教师的教学行为。

（1）评价目的

评价应以课程目标、课程内容和学业质量标准为基本依据。日常教学活动评价，要以教学目标的达成为依据。

评价要关注学生数学知识技能的掌握，还要关注学生的学习态度、方法和习惯，更要关

注学生数学核心素养水平的达成。

教师要基于对学生的评价，反思教学过程，总结经验、发现问题，提出改进思路。因此，数学教学活动的评价目标，既包括对学生学习的评价，也包括对教师教学的评价。

（2）评价原则

为了实现上述评价目的，教师应坚持以学生发展为本，以积极的态度促进学生不断发展，日常评价应遵循以下原则。

① 重视学生数学核心素养的达成

教学评价要以数学核心素养的达成作为评价的基本要素。

基于数学核心素养的教学要创设合适的教学情境、提出合适的数学问题。在设计教学评价工具时，应着重对设计的教学情境、提出的问题进行评价。评价内容包括：情境设计是否体现数学核心素养，数学问题的产生是否自然，解决问题的方法是否为通性通法，情境与问题是否有助于学生素养的达成。基于数学核心素养的教学评价具有挑战性，可以采取教研组集体研讨的方式设计评价工具和评价准则。

在设计学习评价工具时，要关注知识技能的范围和难度，要有利于考查学生的思维过程、思维深度和思维广度（例如，设计好的开放题是行之有效的方法），要关注六个数学核心素养的分布和水平；应聚焦数学的核心概念和通性通法，聚焦它们所承载的数学核心素养。

②重视评价的整体性与阶段性

基于学业质量标准和内容标准制定必修和选修课程的评价目标，关注评价的整体性。

数学核心素养的达成是循序渐进的，基于主线的数学内容的理解与把握也是日积月累的，因此，应当把教学评价的总目标合理分解到日常教学评价的各个阶段，关注评价的阶段性。既要关注数学知识技能的达成，更要关注相关的数学核心素养的提升；还应该依据必修和选修课程内容标准的主线和主题，整体把握学业质量标准中的数学核心素养水平。

对于基于数学核心素养的教学评价，建立一个科学的评价体系是必要的，学校可以组织教师与有关人员，进行专门的研讨，积累经验，特别是积累通过阶段性评价不断改进教学活动的经验，最终建立适应本学校的科学评价体系。

③重视过程评价

日常评价不仅要关注学生当前的数学核心素养水平，更要关注学生成长和发展的过程；不仅要关注学生的学习结果，更要关注学生在学习过程中的发展和变化。学生的知识掌握、数学理解、学习自信、独立思考等是随着学习过程而变化和发展的，只有通过观察学生的学习行为和思维过程，才能发现学生思维活动的特征及教学中的问题，及时调整学与教的行为，

改进学生的学习方法和思维习惯。此外，教师还要注意记录、保留和分析学生在不同时期的学习表现和学业成就，跟踪学生的学习进程，通过过程评价使学生感受成长的快乐，激发其数学学习的积极性。

④关注学生的学习态度

良好的学习态度是学生形成和发展数学核心素养的必要条件，也是最终形成科学精神的必要条件。在日常评价中应把学生的学习态度作为教学评价的重要目标。

在对学生学习态度的评价中，应关注主动学习、认真思考、善于交流、集中精力、坚毅执着、严谨求实。与其他目标不同，学习态度是随时表现出来的、与心理因素有关的，又是日积月累的、可以变化的。在日常教学活动中，教师要关注每一个学生的学习态度，对于特殊的学生给予重点关注。可以记录学生学习态度的变化与成长过程，从中分析问题，寻求解决问题的办法。

形成良好的学习态度，需要对学生提出合适的要求，更需要教师的引导与鼓励、同学的帮助与支持，还需要良好学习氛围的激励与熏陶，需要数学教师与班主任以及其他学科教师的协同努力。

（3）评价方式

评价主体的多元化是指除了教师是评价者之外，同学、家长甚至学生本人都可以作为评价者，这是为了从不同角度获取学生发展过程中的信息，特别是日常生活中关键能力、思维品质和学习态度的信息，最终给出公正客观的评价。合理利用这样的评价，可以有针对性地、有效地指导学生进一步发展。在多元评价的过程中，要重视教师与学生之间、教师与家长之间、学生与学生之间的沟通交流，努力营造良好的学习氛围。

评价形式的多样化是指除了传统的书面测验之外，还可以采用课堂观察、口头测验、开放式活动中的表现、课内外作业等评价的形式，这是因为一个人形成的思维品质和关键能力通常会表现在许多方面，因此需要通过多种形式的评价才能全面反映学生数学核心素养的达成状况。

在日常评价中，可以采用形成性评价的方式。在本质上，形成性评价是与教学过程融为一体的。在教学过程中，教师既要获取学生的整体学习情况，也要关注个别学生的学习进展，在评价反思的同时调整教学活动，提高教学质量。基于数学核心素养的教学，在形成性评价的过程中，不仅要关注学生对知识技能掌握的程度，还要更多地关注学生的思维过程，判断学生是否会用数学的眼光观察世界，是否会用数学的思维思考世界，是否会用数学的语言描述世界。

（4）评价结果的呈现与利用

评价结果的呈现和利用应有利于增强学生学习数学的自信心，提高学生学习数学的兴趣，使学生养成良好的学习习惯，促进学生的全面发展。应该更多地关注学生的进步，关注学生已经掌握了什么，得到了哪些提高，具备了什么能力，还有什么潜能，在哪些方面还存在不足等。

要尽量避免终结性评价的“标签效应”——简单地依据评价结果对学生进行区分。评价的结果应该反映学生的个性特征和学习中的优势与不足，为改进教学的行为和方式、改进学习的行为和方法提供参考。

教师要充分利用信息技术，收集、整理、分析有关反映学生学习过程和结果的数据，从而了解自己教学的成绩和问题，反思教学过程中影响学生能力发展和素养提高的原因，寻求改进教学的对策。

除了考察全班学生在数学核心素养上的整体发展水平外，更需要根据学生个体的发展水平和特征进行个性化的反馈，特别是要以适当的方式将学生的一些积极变化及时反馈给学生。个性化的评价反馈不仅要系统、全面、客观地反映学生在数学核心素养发展上的成长过程和水平特征，更要为每个学生提供长期、具体、可行的指导和改进建议。

（三）考试建议

对高中毕业的数学学业水平考试、数学高考的命题提出以下建议。

1.命题原则

命题应依据“课程内容”和数学核心素养要求，注重对学生数学核心素养的考查，处理好数学核心素养与知识技能的关系，要充分考虑对教学的积极引导作用。在传统评分的基础上，可以根据解题情况对学生的数学核心素养水平的达成进行评价。

考查内容应围绕数学内容主线，聚焦学生对重要数学概念、定理、方法、思想的理解和应用，强调基础性、综合性；注重数学本质、通性通法，淡化解题技巧，融入数学文化。

在命题时，应有一定数量的应用问题，还应包括开放性问题和探究性问题，重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识，问题情境的设计应自然、合理。开放性问题和探究性问题的评分应遵循满意原则和加分原则，达到测试的基本要求视为满意，有所拓展或创新可以根据实际情况加分。在命制应用问题、开放性问题和探究性问题时，要注意公平性和阅卷的操作性。

在高中毕业的数学学业水平考试与数学高考中应允许使用计算器。在考试命题中，要关注试卷的整体性。适度调整考试时间和题量，在不增加题量的前提下延长考试时间，或者在

考试时间不变的前提下适当减少题量，给学生足够的思维时间；逐步减少选择题、填空题的题量；关注内容与难度的分布、数学核心素养的比重与水平的分布；努力提高试卷的信度、效度和公平性。

除了上述要求外，数学高考命题还应依据人才选拔要求，发挥数学高考的选拔功能。

2.考试命题路径

基于数学核心素养的考试命题，应注意以下几个重要环节。

（1）构建数学核心素养的评价框架。依据数学核心素养的内涵、价值和行为表现的描述，参照核心素养的三个水平（参见附录 2），构建基于数学核心素养测试的评价框架。包括三个维度：

第一个维度是四个基本要素，它们分别为问题与情境、知识与技能、思维与表达、反思与交流；

第二个维度是四条内容主线，它们分别为函数、几何与代数、统计与概率、数学建模活动与数学探究活动；

第三个维度是核心素养的三个水平。

（2）依据评价框架，统筹考虑上述三个维度，编制基于数学核心素养的试题，每道试题都有针对性的考查重点。

（3）对于每道试题，除了给出传统评分标准外，还需要给出反映相关数学核心素养的水平划分依据。

3.说明

在命题中，选择合适的问题情境是考查数学核心素养的重要载体。情境包括：现实情境、数学情境、科学情境，每种情境可以分为熟悉的、关联的、综合的；数学问题是指在情境中提出的问题，从学生认识的角度分为：简单问题、较复杂问题、复杂问题。这些层次是构成数学核心素养水平划分的基础，也是数学核心素养评价等级划分的基础。

对于知识与技能，要关注能够承载相应数学核心素养的知识、技能，层次可以分为了解、理解、掌握、运用以及经历、体验、探索。在命题中需要突出内容主线和反应数学本质的核心概念、主要结论、通性通法、数学应用和实际应用。

在命题中应特别关注数学学习过程中思维品质的形成，关注学生会学数学的能力。

（四）学校实施建议

1.加强学校课程建设

学校应根据自身的情况，推动国家课程校本化，建设有特色的校本课程，适应学生多样

化发展的需求，促进学生全面发展。

2.形成有效的课程管理机制

学校实施本指导意见时，要形成有效的机制，处理好备课组和教研组的关系，使得备课组与教研组协同、高效工作，为数学课程的实施提供保障。学校要为课程的选择提供必要的教学条件，形成相应的管理制度，充分利用社会资源以满足学生的学习需求。

3.加强数学教师的专业发展和团队建设

教师专业发展是实施课程标准的关键，学校要加强对数学教师的培训，制定教师培训计划，包括校内培训、外出研学、与高校联合培养等，从经费和时间上给予充分的保障，提升教师的专业水平。学校要加强培养数学骨干教师，充分发挥骨干教师的作用，关注青年教师的成长，注重发展教师的数学教育理论、实践能力等，形成高效、专业的教师团队。

4.开展有针对性的数学教研活动

教研组应定期开展教研活动，针对日常教学中的问题，采取灵活多样的教研方式加以解决，通过课题研究、教学论文评比、教学案例评比、优质课比赛等活动提高课程的开设质量。每年还要确定需要集中研究、突破的难题，保障数学课程高质量的实施。

附录 A：必修+选修丨新旧课程标准比较

	与原文科相比	与原理科相比
减少的内容	● 映射 ● 三视图 ● 算法 ● 系统抽样 ● 几何概型 ● 一元二次函数与简单线性规划 ● 推理与证明 ● 框图 ● 统计案例	● 映射 ● 三视图 ● 算法 ● 系统抽样 ● 几何概型 ● 一元二次函数与简单线性规划 ● 推理与证明 ● 定积分与微积分基本定理 ● 统计案例
增加的内容	● 有限样本空间 ● 百分位数 ● 空间向量与立体几何 ● 数学建模活动与数学探究活动	● 有限样本空间 ● 百分位数 ● 数学建模活动与数学探究活动
弱化的内容	● 计数原理 ● 常用逻辑用语	● 计数原理 ● 圆锥曲线与方程 ● 常用逻辑用语

附录 B：数学核心素养的水平划分

素养 水平	数学抽象
水平一	能够在熟悉的情境中直接抽象出数学概念和规则，能够在特例的基础上归纳并形成简单的数学命题，能够模仿学过的数学方法解决简单问题。 能够解释数学概念和规则的含义，了解数学命题的条件与结论，能够在熟悉的情境中抽象出数学问题。 能够了解用数学语言表达的推理和论证；能够在解决相似的问题中感悟数学的通性通法，体会其中的数学思想。 在交流的过程中，结合实际情境解释相关的抽象概念。
水平二	能够在关联的情境中抽象出一般的数学概念和规则，能够将已知数学命题推广到更一般的情形，能够在新的情境中选择和运用数学方法解决问题。 能够用恰当的例子解释抽象的数学概念和规则；理解数学命题的条件与结论；能够理解和构建相关数学知识之间的联系。 能够理解用数学语言表达的概念、规则、推理和论证；能够提炼出解决一类问题的数学方法，理解其中的数学思想。 在交流的过程中，能够用一般的概念解释具体现象。
水平三	能够在综合的情境中抽象出数学问题，并用恰当的数学语言予以表达；能够在得到的数学结论基础上形成新命题；能够针对具体问题运用或创造数学方法解决问题。 能够通过数学对象、运算或关系理解数学的抽象结构，能够理解数学结论的一般性，能够感悟高度概括、有序多级的数学知识体系。 在现实问题中，能够把握研究对象的数学特征，并用准确的数学语言予以表达；

	能够感悟通性通法的数学原理和其中蕴含的数学思想。 在交流的过程中，能够用数学原理解释自然现象和社会现象。

素养 水平	逻辑推理
水平一	能够在熟悉的情境中，用归纳或类比的方法，发现数量或图形的性质、数量关系或图形关系。 能够在熟悉的数学内容中，识别归纳推理、类比推理、演绎推理；知道通过归纳推理、类比推理得到的结论是或然成立的，通过演绎推理得到的结论是必然成立的。能够通过熟悉的例子理解归纳推理、类比推理和演绎推理的基本形式。了解熟悉的数学命题的条件与结论之间的逻辑关系；能够证明简单的数学命题并有条理地表述论证过程。 能够了解熟悉的概念、定理之间的逻辑关系。 能够在交流过程中，明确所讨论问题的内涵，有条理地表达观点。
水平二	能够在关联的情境中，发现并提出数学问题，用数学语言予以表达；能够理解归纳、类比是发现和提出数学命题的重要途径。 能够对与学过的知识有关联的数学命题，通过对条件与结论的分析，探索论证的思路，选择合适的论证方法予以证明，并能用准确的数学语言表述论证过程；能够通过举反例说明某些数学结论不成立。 能够理解相关概念、命题、定理之间的逻辑关系，初步建立网状的知识结构。 能够在交流的过程中，始终围绕主题，观点明确，论述有理有据。
水平三	能够在综合的情境中，用数学的眼光找到合适的研究对象，提出有意义的数学

	问题。 能够掌握常用逻辑推理方法的规则，理解其中所蕴含的思想。对于新的数学问题，能够提出不同的假设前提，推断结论，形成数学命题。对于较复杂的数学问题，通过构建过渡性命题，探索论证的途径，解决问题，并会用严谨的数学语言表达论证过程。 能够理解建构数学体系的公理化思想。 能够合理地运用数学语言和思维进行跨学科的表达与交流。

素养 水平	**数学建模**
水平一	了解熟悉的数学模型的实际背景及其数学描述，了解数学模型中的参数、结论的实际含义。 知道数学建模的过程包括：提出问题、建立模型、求解模型、检验结果、完善模型。能够在熟悉的实际情境中，模仿学过的数学建模过程解决问题。 对于学过的数学模型，能够举例说明建模的意义，体会其蕴含的数学思想；感悟数学表达对数学建模的重要性。 在交流的过程中，能够借助或引用已有数学建模的结果说明问题。
水平二	能够在熟悉的情境中，发现问题并转化为数学问题，知道数学问题的价值与作用。 能够选择合适的数学模型表达所要解决的数学问题；理解模型中参数的意义，知道如何确定参数，建立模型，求解模型；能够根据问题的实际意义检验结果，完善模型，解决问题。

	能够在关联的情境中，经历数学建模的过程，理解数学建模的意义；能够运用数学语言，表述数学建模过程中的问题以及解决问题的过程和结果，形成研究报告，展示研究成果。 在交流的过程中，能够用模型的思想说明问题。
水平三	能够在综合的情境中，运用数学思维进行分析，发现情境中的数学关系，提出数学问题。 能够运用数学建模的一般方法和相关知识，创造性地建立数学模型，解决问题。 能够理解数学建模的意义和作用；能够运用数学语言，清晰、准确地表达数学建模的过程和结果。 在交流的过程中，能够通过数学建模的结论和思想阐释科学规律和社会现象。

素养 **水平**	**直观想象**
水平一	能够在熟悉的情境中，建立实物的几何图形，能够建立简单图形与实物之间的联系；体会图形与图形、图形与数量的关系。 能够在熟悉的数学情境中，借助图形的性质和变换（平移、对称、旋转）发现数学规律；能够描述简单图形的位置关系和度量关系及其特有性质。 能够通过图形直观认识数学问题；能够用图形描述和表达熟悉的数学问题、启迪解决这些问题的思路，体会数形结合。 能够在日常生活中利用图形直观进行交流。
水平二	能够在关联的情境中，想象并构建相应的几何图形；借助图形提出数学问题，发现图形与图形、图形与数量的关系，探索图形的运动规律。

	能够掌握研究图形与图形、图形与数量之间关系的基本方法，能够借助图形性质探索数学规律，解决实际问题或数学问题。 能够通过直观想象提出数学问题；能够用图形探索解决问题的思路；能够形成数形结合的思想，体会几何直观的作用和意义。 在交流的过程中，能够利用直观想象探讨数学问题。
水平三	能够在综合的情境中，借助图形，通过直观想象提出数学问题。 能够综合利用图形与图形、图形与数量的关系，理解数学各分支之间的联系；能够借助直观想象建立数学与其他学科的联系，并形成理论体系的直观模型。 能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，反映数学问题的本质，形成解决问题的思路。 在交流的过程中，能够利用直观想象探讨问题的本质及其与数学的联系。

素养 **水平**	**数学运算**
水平一	能够在熟悉的数学情境中了解运算对象，提出运算问题。 能够了解运算法则及其适用范围，正确进行运算；能够在熟悉的数学情境中，根据问题的特征建立合适的运算思路，解决问题。 在运算过程中，能够体会运算法则的意义和作用，能够运用运算验证简单的数学结论。 在交流的过程中，能够用运算的结果说明问题。
水平二	能够在关联的情境中确定运算对象，提出运算问题。 能够针对运算问题，合理选择运算方法、设计运算程序，解决问题。

	能够理解运算是一种演绎推理；能够在综合运用运算方法解决问题的过程中，体会程序化思想的意义和作用。 在交流的过程中，能够借助运算探讨问题。
水平三	在综合的情境中，能把问题转化为运算问题，确定运算对象和运算法则，明确运算方向。 能够对运算问题，构造运算程序，解决问题。 能够用程序化的思想理解与表达问题，理解程序化与计算机解决问题的联系。 在交流的过程中，能够用程式化思想理解和解释问题。

素养 **水平**	**数据分析**
水平一	能够在熟悉的情境中了解随机现象及简单的统计或概率问题。 能够对熟悉的概率问题，选择合适的概率模型，解决问题；能够对熟悉的统计问题，选择合适的抽样方法收集数据，掌握描述、刻画、分析数据的基本统计方法，解决问题。 能够结合熟悉的实例，体会概率是对随机现象发生可能性大小的度量，可以通过定义的方法得到，也可以通过统计的方法进行估计；能够用统计和概率的语言表达简单的随机现象。 在交流的过程中，能够用统计图表和简单概率模型解释熟悉的随机现象。
水平二	能够在关联的情境中，识别随机现象，知道随机现象与随机变量之间的关联，发现并提出统计或概率问题。 能够针对具体问题，选择离散型随机变量或连续型随机变量刻画随机现象，理

	解抽样方法的统计意义，能够运用适当的统计或概率模型解决问题。 能够在运用统计方法解决问题的过程中，感悟归纳推理的思想，理解统计结论的意义；能够用统计或概率的思维来分析随机现象，用统计或概率模型表达随机现象的统计规律。 在交流的过程中，能够用数据呈现的规律解释随机现象。
水平三	能够在综合的情境中，发现并提出随机问题。 能够针对不同的问题，综合或创造性地运用统计概率知识，构造相应的统计或概率模型，解决问题；能够分析随机现象的本质，发现随机现象的统计规律，形成新的知识。 能够理解数据分析在大数据时代的重要性。能够理解数据蕴含着信息，可以通过对信息的加工，得到数据所提供的知识和规律，并用统计或概率的语言予以表达。 在交流的过程中，能够辨明随机现象，并运用恰当的语言进行表述。

附录 C：教材使用建议

模块	必修	课时	要求	备注
必修 1	第一章　集合与函数概念	13	无变化	
	第二章　基本初等函数（Ⅰ）	14	无变化	
	第三章　函数的应用	9	无变化	
必修 2	第一章　空间几何体	8	无变化	
	第二章　点、直线、平面之间的位置关系	10	无变化	
	第三章　直线与方程	9	无变化	
	第四章　圆与方程	9	无变化	
必修 3	第一章　算法初步	0	删掉	
	第二章　统计	16	无变化	
	第三章　概率	8	无变化	
必修 4	第一章　三角函数	16	无变化	
	第二章　平面向量	12	无变化	
	第三章　三角恒等变换	8	无变化	
必修 5	第一章　解三角形	8	无变化	
机动		4		
课时合计		144		

2017 年人教 A 版高中数学教材使用说明（必修）

2017年人教A版高中数学教材使用说明（选修Ⅰ）

模块	选修Ⅰ	课时	要求	备注
必修5	第二章　数列	12	无变化	
	第三章　不等式	8	删掉3.3节 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题	减少8课时
选修2-1	第一章　常用逻辑用语	6	删掉 1.1 命题及其关系 1.3 简单的逻辑联结词	减少2课时
	第二章　圆锥曲线与方程	12	删掉2.1 曲线与方程	减少4课时
	第三章　空间向量与立体几何	12	不变	
选修2-2	第一章　导数及其应用	16	删掉 1.5 定积分的概念（4课时） 1.6 微积分基本定理（2课时） 1.7 定积分的简单应用（2课时）	减少8课时
	第二章　推理与证明		删掉	
	第三章　数系的扩充与复数的引入	4	不变	
选修2-3	第一章　计数原理	9	1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理　删2课时应用问题（4-2=2） 1.2 排列与组合　删3课时应用	减少5课时

			问题（6-3=3）	
	第二章　随机变量及其分布	8	不变	
	第三章　统计案例	14	不变	
增加	数学建模活动	4	完成一个研究课题	
机动		3		
合计课时		108		

2017 年人教 B 版高中数学教材使用说明（必修）

模块	必修	课时	要求	备注
数学 1	第一章　集合	4	无变化	
	第二章 函数	32	无变化	
	第三章 基本初等函数		无变化	
数学 2	第一章 立体几何初步	18	无变化	
	第二章 平面解析几何初步	18	无变化	
数学 3	第一章 算法初步		删除	
	第二章 统计	16	无变化	
	第三章 概率	8	无变化	
数学 4	第一章 三角函数	16	无变化	
	第二章 平面向量	12	无变化	
	第三章 三角恒等变换	8	无变化	
数学 5	第一章 解三角形	8	无变化	

2017 年人教 B 版高中数学教材使用说明（选修Ⅰ）

模块	选修	课时	要求	备注
数学 5	第二章 数列	12	无变化	
	第三章 不等式	8	删除 3.5 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题	减少 8 课时
选修 2-1	第一章 常用逻辑用语	6	按原原文科要求处理 删除 1.1 命题与量词;1.2	减少 2 课时

			基本逻辑连接词	
	第二章 圆锥曲线与方程	12	按原文科要求处理	
	第三章 空间中的向量与立体几何。	12	无变化	
选修 2-2	第一章 导数及其应用	16	删除 1.4 定级分与微积分基本定理	
	第二章 推理与证明		删除	
	第三章 数系的扩充与复数的引入	4	无变化	
选修 2-3	第一章 计数原理	9	降低要求(删除用计数原理解决一些简单的实际问题这一要求)	减少 5 课时
	第二章 概率	8	无变化	
	第三章 统计案例	14	按原文科要求处理	

2017年北师大版高中数学教材使用说明（必修）

模 块	必 修	课时	要 求	备 注
数学 1	第一章 集合	5	无变化	
	第二章 函数	10	删除 2.3 映射	减少 1 课时
	第三章 指数函数和对数函数	14	无变化	
	第四章 函数应用	7	无变化	
数学 2	第一章 立体几何初步	18	删除 1.3 三视图	减少 3 课时
	第二章 解析几何初步	18	无变化	
数学 3	第一章 统计	16	删除 1.2.2 中的系统抽样	减少 1 课时
	第二章 算法初步	12	删除	减少 12 课时
	第三章 概率	8	删除 3.3 模拟方法¯概率的应用	减少 2 课时
数学 4	第一章 三角函数	16	无变化	
	第二章 平面向量	12	无变化	
	第三章 三角恒等变换	8	无变化	
数学 5	第二章 解三角形	8	无变化	

2017年北师大版高中数学教材使用说明（选修Ⅰ）

模　块	选　修	课时	要　求	备　注
数学5	第一章数列	12	无变化	
	第三章 不等式	16	删除3.4简单线性规划	减少5课时
选修2-1	第一章 常用逻辑用语	8	按原文科要求处理,删除1.1命题，删除1.4逻辑连结词“且”“或”“非”	减少2课时
	第二章 空间向量与立体几何	12	无变化	
	第三章 圆锥曲线与方程	16	按原文科要求处理,删除3.4曲线与方程	减少4课时
选修2-2	第一章推理与证明	8	删除	减少8课时
	第二章变化率与导数	8	无变化	
	第三章 导数应用	8	无变化	
	第四章 定积分	8	删除	减少8课时
	第五章 数系的扩充与复数的引入	4	无变化	
选修2-3	第一章 计数原理	14	降低要求	减少4课时
	第二章 概率	12	无变化	
	第三章 统计案例	10	按原文科要求处理	

2017 年苏教版高中数学教材使用说明（必修）

模块	必修	课时	要求	备注
数学 1	第一章 集合	4	无变化	
	第二章 函数	16	删除 2.3 映射的概念	减少 1 课时
	第三章 指数函数、对数函数和幂函数	16	无变化	
数学 2	第一章 立体几何初步	18	删除 1.1.3 中心投影和平行投影	减少 3 课时
	第二章 平面解析几何初步	18	无变化	
数学 3	第一章 算法初步	12	删除	减少 12 课时
	第二章 统计	13	删除 2.1 中的系统抽样	减少 1 课时
	第三章 概率	12	删除 3.3 几何概型	减少 2 课时
数学 4	第一章 三角函数	20	无变化	
	第二章 平面向量	15	无变化	
	第三章 三角恒等变换	12	无变化	
数学 5	第二章解三角形	9	无变化	

2017 年湘教版高中数学教材使用说明（选修Ⅰ）

模块	选修	课时	要求	备注

数学 5	第二章 数列	16	无变化	
	第三章 不等式	15	删除 3.3 二元一次不等式组与简单线性规划	减少 4 课时
选修 2-1	第一章 常用逻辑用语	8	按原文科要求处理 删除 1.1.1 四种命题 ,删除 1.2 简单的逻辑联结词	减少 4 课时
	第三章圆锥曲线与方程	16	按原文科要求处理 删除 2.5 圆锥曲线的统一定义，删除 2.6 曲线与方程	减少 4 课时
	第三章 空间向量与立体几何	12	无变化	
选修 2-2	第一章导数及其应用	24	删除 1.5 定积分	减少 4 课时
	第二章 推理与证明	8	删除	减少 8 课时
	第三章 数系的扩充与复数的引入	8	无变化	
选修 2-3	第一章 计数原理	14	降低要求	减少 4 课时

	第二章 概率	18	无变化	
	第三章 统计案例	8	按原文科要求处理	

2017 年湘教版高中数学教材使用说明（必修）

模块	必修	课时	要求	备注
必修 1	第1章　集合与函数	16	删除 1.2 中的映射	减少约 1 课时
	第 2 章 指数函数、对数函数和幂函数	20	无变化	
必修 2	第 3 章 三角函数	16	无变化	
	第 4 章 向量	12	无变化	
	第 5 章 三角恒等变换	8	无变化	
必修 3	第 6 章 立体几何初步	20	删除 6.1.2 中的三视图内容	减少约 0.5 课时
	第 7 章 解析几何初步	17	无变化	
必修 4	第 8 章 解三角形	8	无变化	
必修 5	第 11 章 算法初步	12	删除	减少约 12 课时
	第 12 章 统计学初步	16	删除 12.2.3 中的系统抽样	减少约 0.5 课时
	第 13 章概率	8	删除 13.2.2 几何概率 删除 13.2.3 中和几何概	减少约 1 课时

			率相关内容	

2017 年苏教版高中数学教材使用说明（选修Ⅰ）

模块	选修	课时	要求	备注
必修4	第 9 章　数列	12	无变化	
	第 10 章 不等式	15	删除 10.4 简单线性规划	减少约 3 课时
选修2-1	第 1 章 常用逻辑用语	8	按原文科要求处理 删除 1.1.1 命题的概念和例子， 删除 1.1.2 命题的四种形式， 删除 1.2.1 逻辑联结词“非”、“且”和“或”	减少约 3 课时
	第 2 章 圆锥曲线与方程	16	按原文科要求处理 删除 2.5 曲线与方程	减少约 3 课时
	第 3 章空间向量与立体几何	14	无变化	
选修2-2	第 4 章 导数及其应用	24	删除 4.5 定积分与微积分基本定理	减少约 6 课时
	第 5 章 数系的扩	5	无变化	

	充与复数			
	第6章 推理与证明	9	删除	
选 修 2-3	第7章 计数原理	14	降低要求	
	第8章 统计与概率	22	统计与案例部分按原文科要求处理	

附录 D：案例

案例 1-2 是数学建模活动案例；案例 3-18 是核心素养评价案例。供参考。

案例 1　测量学校内、外建筑物的高度

【目的】运用所学知识解决实际测量高度的问题，体验数学建模活动的完整过程。组织学生通过分组、合作等形式，完成选题、开题、做题、结题四个环节。

【情境】给出下面的测量任务：

（1）测量本校的一座教学楼的高度；

（2）测量本校的旗杆的高度；

（3）测量学校墙外的一座不可及，但在学校操场上可以看得见的物体的高度。

可以每 2～3 个学生组成一个测量小组，以小组为单位完成；各人填写测量课题报告表（见表 2 ），一周后上交。

表 1　测量课题报告表

项目名称：____________完成时间：____________

1.成员与分工	
姓名	分工

2．测量对象 例如，某小组选择的测量对象是：旗杆、教学楼、校外的××大厦。	
3．测量方法（请说明测量的原理、测量工具、创新点等）	
4．测量数据、计算过程和结果（可以另外附图或附页）	
5．研究结果（含误差分析）	
6．简述工作感受	

【教学过程】

教师可以对学生的工作流程提出如下的要求和建议：

（1）成立项目小组，确定工作目标，准备测量工具；

（2）小组成员查阅有关资料，进行“头脑风暴”、讨论交流，寻求测量效率

高的方法，设计测量方案（最好设计两套测量方案)；

（3）分工合作，明确责任，例如：负责测量、记录数据、计算求解、撰写报告等；

（4）撰写报告，讨论交流。可以用照片、模型、PPT 等形式展现获得的成果。

根据这些要求每个小组要完成以下工作：

（1）选题

此活动的选题步骤略去。

（2）开题

可以在课堂上组织开题交流，让每一个项目小组陈述测量方案初稿，教师和其他同学可以提出质疑。例如：

如果有学生提出要通过测量仰角计算高度，教师可以追问：怎么测量？用什么工具测量？目的是提醒学生，事先设计有效的测量方法和实用的测量仪器。

如果有学生提出要通过测量太阳的影长计算高度，教师可以追问：几点钟测量比较好？如果学生提出比较测量物和参照物的影长时，教师可以追问：是同时测量好，还是先后测量好？目的是提醒学生注意测量的细节。

如果有同学提出用照相机拍一张测量对象和参照物（如一个已知身高的人）的合影，可以通过参照物的高度按比例计算出楼的高度。教师可以追问：参照物应该在哪里？是在楼前、还是在楼边？目的是提醒学生注意现实测量与未来计算的关联。

在讨论的基础上，项目小组最终形成各自的测量方案。讨论的目的是让学生仔细想清楚测量过程中将使用的数学模型，这样可以减少实践过程中的盲目性，培养学生良好的思维习惯；同时可以让学生意识到，看似简单的问题，也有许多需要认真思考、认真对待的东西，促进科学精神的形成。

（3）做题

依据小组的测量方案实施测量。尽量安排各个小组在同一时间进行测量，这样有利于教师的现场观察和管理。教师需要提醒学生：要有分工、合作、责任落实到个人。

在测量过程中，教师要认真巡视，记录那些态度认真、合作默契、方法恰

当的测量小组和个人，供讲评时使用。特别要注意观察和发现测量中出现的问题，避免因为测量方法不合理产生较大误差，当学生出现类似的问题时，教师要把问题看做极好的教育契机，启发学生分析原因，引导他们自己发现出现问题的原因、寻求解决问题的办法。

（4）结题

在每一位学生都完成“测量报告”后，可以安排一次交流讲评活动。遴选的交流报告最好有鲜明的特点，如测量结果准确，过程完整清晰，方法较有创意，误差处理得当，报告书写规范等；或者测量的结果出现明显误差，使用的方法不当，而学生自己没有意识到的报告。交流讲评往往是数学建模活动中最为重要的环节，可以使学生在这一过程中相互借鉴，共同提高。（有关测量评价的讨论参见案例 2）

【分析】测量高度是传统的数学应用问题，这样的问题对培养学生分析解决问题、动手实践、误差分析等方面的能力很有好处。测量模型可以用平面几何的方法，比如，比例线段、相似形等；也可以用三角的方法、甚至可以用物理的方法，比如，考虑自由落体的时间；等等。应鼓励学生们在合作学习的基础上，自主设计、自己选择测量方法解决问题。

这样的教学活动，因为问题贴近学生的生活，学生比较容易上手。采用选题、开题、做题、结题四个环节实施数学建模活动，能够使学生在做中学、在学中做，从中体会数学的应用价值，并且展现个性，尝试创新。

【拓展】鼓励学生提出新的问题，积累数学建模资源。例如：

1．本市的电视塔的高度是多少米？

2．一座高度为 H m 的电视塔，信号传播半径是多少？信号覆盖面积有多大？

3．找一张本市的地图，看一看本市的地域面积有多少平方千米？电视塔的位置在地图上的什么地方？按照计算得到的数据，这座电视塔发出的电视信号是否能覆盖本市？

4．本市（外地）到北京的距离有多少千米？要用一座电视塔把信号从北京直接发送到本市，这座电视台的高度至少要多少米？

5．如果采用多个中继站的方式，用 100 m 高的塔接力传输电视信号，问从

北京到本地至少要建多少座100m高的中继传送塔？

6. 考虑地球大气层和电离层对电磁波的反射作用，重新考虑问题2，4，5。

7. 如果一座电视塔（比如300m高）不能覆盖本市，请设计一个多塔覆盖方案。

8. 至少发射几颗地球定点的通讯卫星，可以使其信号覆盖地球？

9. 如果我国要发射一颗气象监测卫星，监测我国的气象情况，请你设计一个合理的卫星定点位置或卫星轨道。

10. 在网上收集资料，了解有关“铱星计划”的内容，在班里做一个相关内容的综述，并发表对这件事的看法。

案例2　测量学校内、外建筑物的高度项目的过程性评价

【目的】本案例是案例1的深化。给出过程性评价，体现如何让学生在交流过程中展现个性、学会交流、归纳总结，发现问题、积累经验、提升素养。

【评价过程】在每一个学生都完成“测量报告”后，安排交流讲评活动。安排讲评的报告应当有所侧重。比如，测量结果准确，测量过程清晰，测量方法有创意，误差处理得当，报告书写认真等；或者误差明显而学生自己没有察觉，测量过程构建的模型有待商榷等。事实表明，这种形式的交流讲评，往往是数学建模过程中使学生收获最大的环节。

附件：某个小组的研究报告的展示片段摘录。

测量不可及“理想大厦”的方法

1.两次测角法

（1）测量并记录测量工具距离地面hm；

（2）用大量角器，将一边对准大厦的顶部，计算并记录仰角α；

（3）后退am，重复（2）中的操作，计算并记录仰角β；

（4）楼高x的计算公式为：

$$x=\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}+h,$$

其中α，β，a，h如图1所示。

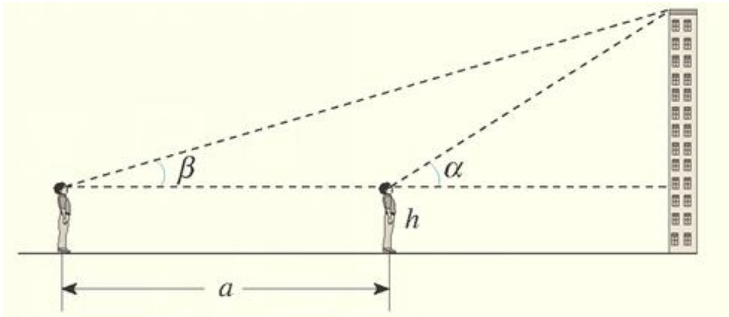


图 1 两次测角法示意图

2.镜子面反射法

（1）将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能够看到房顶的位置，测量人与镜子的距离；

（2）将镜子后移 am，重复（1）中的操作；

（3）楼高 x 的计算公式为：

$$x=\frac{ah}{a_2-a_1},$$

其中 a_1，a_2 是人与镜子的距离，a 是两次观测时镜面之间的距离，h 是人的“眼高”，如图 2 所示。根据光的反射原理，利用相似三角形的性质联立方程组，可以得到这个公式。

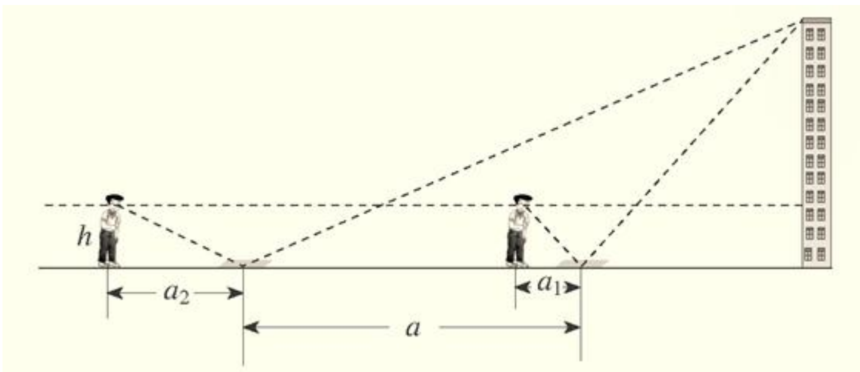


图 2 镜面反射法示意图

实际测量数据和计算结果，测量误差简要分析：

（1）两次测角法

实际测量数据：

	第一次	第二次
仰角	67°	52°

后退距离为 25m，人的“眼高”为 1.5m，计算可得理想大厦的高度约为 71.5m，

结果与期望值（70m～80m）相差不大。误差的原因是铅笔在纸板上画出度数时不够精确。减小误差的方法是几个人分别测量高度及仰角，再求平均值，误差就能更小。

（2）镜面反射法

实际测量数据：

	第一次	第二次
人与镜子距离	3.84 m	3.91m

镜子的相对距离 10m，人的“眼高”为 1.52m。计算可得理想大厦的高度约为 217m，结果与期望值相差较大。

产生误差有以下几点原因：

镜面放置不能保持水平；

两次放镜子的相对距离太短，容易造成误差；

人眼看镜内物像时，两次不一定都看准镜面上的同一个点；

人体不一定在两次测量时保证高度不变。

综上所述，要做到没有误差很难，但可以通过某些方式使误差更小，我们准备用更多的测量方法找出理想的结果。

对上面的测量报告，教师和同学给出评价。比如，对测量方法，教师和同学评价均为“优”，因为对不可及的测量对象选取了两种可行的测量方法；对测量结果，教师评价为“良”，同学评价为“中”，因为两种方法得到的结果相差较大。

对测量结果的评价，教师和同学产生差异的原因是，教师对测量过程的部分项目实施加分，包括自制测量仰角的工具等因素作了误差分析；同学则进一步分析产生误差的主要原因，包括：

（1）测量工具问题。两次测角法的同学，自制量角工具比较粗糙，角度的刻度误差较大；镜面反射法的同学，选用的镜子线度太大，造成镜间距测量有较大误差。

（2）间距差的问题。这是一个普遍的问题。间距差 a 值是测量者自己选定的，因为没有较长的卷尺测量距离，有的同学甚至选间距差 a 是 1m。由于间距太小，两次测量的角度差或者人与镜的距离差太小，最终导致计算结果产生巨

大误差。当学生意识到了这个问题后，他们利用运动场 100m 跑道的自然长度作为间距差 a，使得测量精度得到较大提高。

（3）不少学生用自己的身高代替“眼高”，反映了学生没有很好地理解测量过程中的“眼高”应当是测量的高度，如照片所示。

在结题交流过程中，教师通过测量的现场照片，引导学生发现问题，让学生分析测量误差产生的原因。学生们在活动中意识到，书本知识和实践能力的联系与转化是有效的学习方式。

测量现场的照片和观察说明：

照片	说明
	左下图：测量角的工具（量角器）太小，造成仰角的测量误差很大。 右上图：用腕尺法测量时，腕尺应与地面垂直，手臂水平为好，否则就没有相似的直角三角形。 右下图：用镜子反射法时，要保持镜面水平，否则入射三角形和反射三角形就不相似。
	测量仰角的工具好：用一个量角器在复印机上放大复印 4 倍。在中心处绑上一个铅垂，这样测量视线和铅垂线之间的夹角可以在图上直接读出，这个角是待测仰角的余角。

	测量工具好：用自行车来测距离，解决了皮尺长度不够的问题。

【分析】建模活动的评价要关注结果，更要关注过程。

对测量方法和结果的数学评价可以占总评价的 60%，主要由教师作评价。评价依据是现场观察和学生上交的测量报告，关注的主要评价点有：

（1） 测量模型是否有效；

（2） 计算过程是否清晰准确，测量结果是否可以接受；

（3） 测量工具是否合理、有效；

（4） 有创意的测量方法（可获加分）；

（5） 能减少测量误差的思考和做法（可获加分）；

（6） 有数据处理的意识和做法（可获加分）；

……

非数学的评价可以占总评价的 40%，主要评价点有：

（1） 每一名成员在小组测量和计算过程中的工作状态；

（2） 测量过程中解决困难的机智和办法；

（3） 讨论发言、成果汇报中的表现等。

非数学的评价主要是在同学之间进行，可以要求学生们给出其他汇报小组成绩，并写出评价的简单理由。

案例 3　函数图象

【目的】说明数学抽象素养的表现和水平，体会评价“在熟悉的情境中直接抽象出数学概念和规则”的满意原则和加分原则。

【情境】学校宿舍与办公室相距 a m。某同学有重要材料要送交给老师，从宿舍出发，先匀速跑步 3min 来到办公室，停留 2 min，然后匀速步行 10 min 返回宿舍。在这个过程中，这位同学行进的速度和行走的路程都是时间的函数，画出速度函数和路程函数的示意图。

【分析】回顾课标的要求："在实际情境中能够用图象揭示函数性质，整体反映函数的基本特征"。本题答案的示意图如图 3 所示。解答本题时，能给出速度函数或路程函数的大部分示意图，根据满意原则，可以认为达到数学抽象素养水平一的要求；能够全部画出速度函数和路程函数示意图（二者自变量一致），可以认为达到数学抽象素养水平二的要求。这个问题也可以考察直观想象等素养。

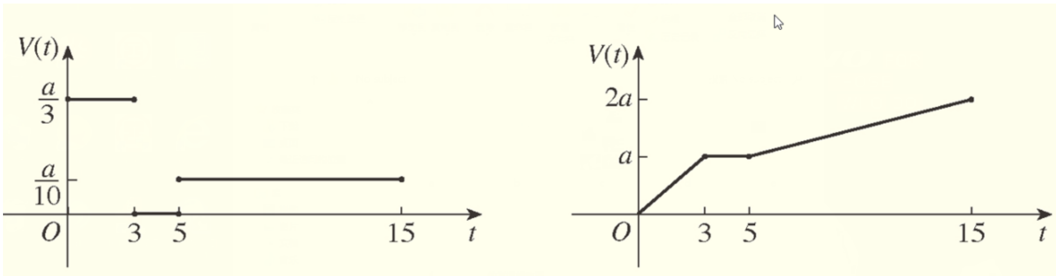


图 3 速度函数和路程函数示意图

案例 4　传令兵问题

【目的】说明数学抽象素养的表现和水平，体会评价"分析数学命题的条件与结论，在具体的情境中抽象出数学问题"的满意原则和加分原则。

【情境】有一支队伍长 L m，以速度 v 匀速前进。排尾的传令兵因传达命令赶赴排头，到达排头后立即返回，往返速度不变。回答下列问题：

（1）如果传令兵行进的速度为整个队伍行进速度的 2 倍，求传令兵回到排尾时所走的路程；

（2）如果传令兵回到排尾时，全队正好前进了 L m，求传令兵行走的路程。

【分析】正确给出（1）的解答，可以认为达到数学抽象素养水平一的要求；正确给出（2）的解答，可以认为达到数学抽象素养水平二的要求。这个问题也可以考察逻辑推理、数学运算等素养。本题可以作如下解答：

(1)传令兵往返速度为 $2v$，从排尾到排头所需时间为 $\frac{L}{2v-v}$，从排头到排尾

所需时间为 $\frac{L}{2v+v}$。故传令兵往返共用时间为：$\frac{L}{2v-v}+\frac{L}{2v+v}=\frac{4L}{3v}$，往返路程为 $2v\times\frac{4L}{3v}=\frac{8}{3}L$。

(2)设传令兵的行进速度为 v'，则传令兵从排尾到排头所需时间为 $\frac{L}{v'-v}$，从排头到排尾所需时间为 $\frac{L}{v'+v}$，往返共用时间为：$t=\frac{L}{v'-v}+\frac{L}{v'+v}$，往返所走路程为 tv'。由传令兵回到排尾时全队正好前进了 L，则 $L=vt$，故

$$
\begin{aligned}
&t(v'^2-v^2)=2v'L,\\
&t^2(v'^2-v^2)=2v'tL,\\
&(tv')^2-2L(v't)-L^2=0,\\
&v't=(1+\sqrt{2})L。
\end{aligned}
$$

传令兵往返路程为 $(1+\sqrt{2})L$。

【拓展】如果传令兵从排尾到排头的行进速度为整个队伍行进速度的 $\frac{3}{2}$，从排头再回到排尾的行进速度为整个队伍行进速度的 $\frac{1}{2}$，求传令兵行走的路程。

案例 5　跑道问题

【目的】说明数学直观想象素养的表现和水平，体会评价“在现实情境中，建立实物的几何图形，能够根据图形想象实物；体会图形与图形、图形与数量的关系”的满意原则、加分原则。

【情境】400 m 标准跑道最内圈的示意图如图 4，其中左右两边均是半径为 36 m 的半圆弧。（注：400m 标准跑道最内圈约为 400 m。）

（1）求每条直道的长度（圆周率取 3.14，结果精确到 1m）；

（2）建立平面直角坐标系 xOy, 写出跑道上半部分对应的函数解析式。

图 4 标准跑道内圈示意图

【分析】回顾课程标准的要求：“在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标

准方程与一般方程；能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系。”

如果能够完成（1）的计算，可以认为达到直观想象素养水平一的要求；能够基本得到（2）所要求的表达式，可以认为达到直观想象素养水平二的要求。这个问题也可以考察数学运算等素养。本题解答如下：

（1）因为跑道两端的弧形合起来是一个完整的圆周，所以弧形部分跑道的长度为 $2\times3.14\times36=226.08$(m)，两条直道长度为 $400-226.08=173.92$(m)。所以每条直道长约为 $173.92\div2\approx87$ m。

（2）建立如图 5 所示的平面直角坐标系。

当 $0\le x<36$ 时，圆的方程为 $(x-36)^2+y^2=36^2$，函数解析式为 $y=\sqrt{72x-x^2}$；

当 $36\le x<123$ 时，函数解析式为 $y=36$；

当 $123\le x\le159$ 时，函数解析式为 $y=\sqrt{246x-x^2-13833}$。

所以函数解析式为：

$$y=\begin{cases}\sqrt{72x-x^2}, 0\le x<36;\\ 36, 36\le x<123;\\ \sqrt{246x-x^2-13833}, 123\le x\le159.\end{cases}$$

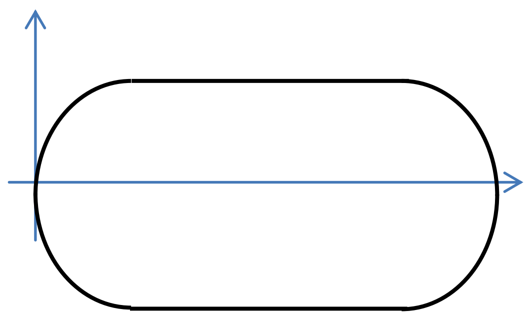


图 5 建立坐标系示意图（没有坐标单位）

【拓展】可以考虑以图形的中心为原点建立平面直角坐标系。

案例 6　距离问题

【目的】说明如何考查学生数学抽象、直观想象和数学运算等素养达成的综合情况，体会“要关注数学核心素养各要素的不同特征及要求，更要关注数学核心素养的综合性与整体性。”

【情境 1】在数轴上，对坐标分别为x_1和x_2的两点 A 和 B，用绝对值定义两点间的距离，表示为$d\left(A,B\right)=\left|x_1-x_2\right|$。回答下面的问题：

（1）在数轴上任意取三点 A，B，C，证明

$d\left(A,B\right)\le d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$。

（2）设 A 和 B 两点的坐标分别为-3 和 2，找出满足$d\left(A,B\right)=d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$的点 C 的范围，再找出满足$d\left(A,B\right)<d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$的点 C 的范围。

【情境 2】城市的许多街道是相互垂直或平行的，因此，往往不能沿直线行走到达目的地，只能按直角拐弯的方式行走。如果按照街道的垂直和平行建立平面直角坐标系，对两点$A\left(x_1,y_1\right)$和$B\left(x_2,y_2\right)$，类比“情境 1”中的方式定义两点间距离为

$$d\left(A,B\right)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|,$$

回答类似的问题：

（1）在平面直角坐标系上任意取三点 A，B，C，证明

$d\left(A,B\right)\le d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$。

（2）设 A 和 B 两点坐标分别为$\left(x_1,y_1\right)$和$\left(x_2,y_2\right)$，找出满足$d\left(A,B\right)=d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$的点 C 的范围，再找出满足$d\left(A,B\right)<d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$的点 C 的范围。

【分析】考虑下面核心素养达成的等级划分标准。

对于“情境 1”中的问题，基本上给出（1）或（2）的证明，可以认为达到数学抽象、逻辑推理、直观想象和数学运算素养水平一的要求。

对于“情境 2”中的问题，关键点是通过理解特殊的“两点间距离”定义，考察学生的直观想象和数学抽象素养。对于问题（1），如果学生能够对平面上固定

的三点 A，B，C，说明 $d(A,B)\le d(A,C)+d(B,C)$，可以认为达到数学抽象、逻辑推理、直观想象和数学运算等素养水平一的要求；进一步，如果学生对任意的三点 A，B，C，得到该结果，可以认为达到相应素养水平二的要求。对于问题（2），只要学生画出基本符合要求的图形，可以认为达到相应素养水平二的要求；进一步，如果学生还能给出清晰的证明，可以适当加分。

【拓展】在“情境 2”中的距离意义下，画出到定点 $O(0,0)$ 的距离等于 1 的点 $P(x,y)$ 所形成的图形。从上述距离的定义出发，给出“点到直线的距离”的定义，并计算已知点到已知直线的距离。

案例 7　四棱锥的平行问题

【目的】以空间中的平行关系为知识载体，以探索作图的可能性为数学任务，依托判断、说理等数学思维活动，说明逻辑推理素养水平一、水平二的表现，体会满意原则和加分原则。

【情境】如图 6，在四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中，$AB\,//\,DC$。回答下面的问题：

（1）在侧面 PAB 内能否作一条直线段使其与 DC 平行？如果能，请写出作图过程并给出证明；如果不能，请说出理由。

（2）在侧面 PBC 中能否作出一条直线段使其与 AD 平行？如果能，请写出作图的过程并给出证明；如果不能，请说出理由。

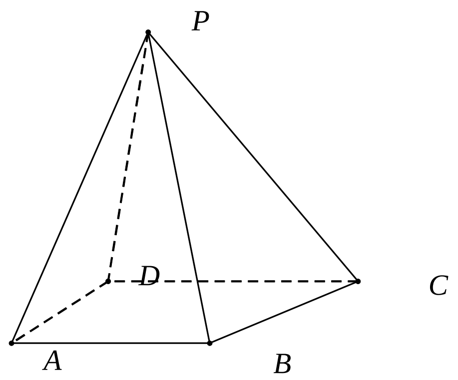


图 6 四棱锥示意图

【分析】直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直等位置关系

是高中立体几何内容的重点，也是教学的难点。设计开放性问题，让学生在运用与平行和垂直的相关定理进行判断、说理的活动过程中，提高直观想象和逻辑推理素养；通过这样的活动也可以对学生达到相应素养水平进行评价。

（1）能作出平行线。具体作法是，在侧面 *PAB* 内作 *AB* 的平行线；因为 *AB* 与 *DC* 平行，依据平行公理，这条平行线也必然平行于 *DC*。完成这个过程，说明学生知道在平面内作与平面外直线平行的直线，需要寻求平面外直线与这个平面之间的关联，依据满意原则，可以认为达到逻辑推理素养水平一的要求。

（2）需要分别判断。如果 *AD* 与 *BC* 平行，可以参照（1）的方法作出平行线。如果 *AD* 与 *BC* 不平行，不能作出平行线；用反证法进行说理，假设侧面 *PBC* 内存直线与 *AD* 平行，可推证 *AD* 与侧面 *PBC* 平行，依据性质定理，可推证 *AD* 与 *BC* 平行，这与条件矛盾。完成这个过程，说明学生能够理解直线与平面平行的相关定理以及定理之间的逻辑关系，依据满意原则，可以认为达到逻辑推理素养水平二的要求。

案例 8　覆盖问题

【目的】以平面几何为知识载体，以证明“周长一定的四边形中正方形所围面积最大”为数学任务，说明逻辑推理素养水平一、水平二、水平三和数学抽象素养水平一、水平二的表现，体会满意原则和加分原则。

【情境】设桌面上有一个由铁丝围成的封闭曲线，周长是 $2L$。回答下面的问题：

（1）当封闭曲线为平行四边形时，用直径为L的圆形纸片是否能完全覆盖这个平行四边形？请说明理由。

（2）求证：当封闭曲线是四边形时，正方形的面积最大。

【分析】虽然问题涉及的知识不难，但由于问题中的封闭曲线是动态的、问题是开放的，因此需要一定的数学抽象和逻辑推理素养才可能抓住问题的本质。如果学生能够构建过渡性命题、完成概念的抽象过程，并且论证途径清晰、推理过程表述严谨，可以认为达到逻辑推理素养水平三的要求。

（1）首先，需要从生活语言到数学语言，表达清楚什么是完全覆盖。最初的生活语言可以是，周长为 $2L$ 的平行四边形包含的点都在直径为 L 的圆面内，显然这个层面的表达是无法进行论证的；用数学语言可以表述为，周长为 $2L$

的平行四边形内的任意一点到圆心的距离不大于 $\frac{L}{2}$，可是，这样的表述又脱离了完全覆盖的背景；因此需要在表述中加上条件，比如让平行四边形的对称中心与圆的圆心重合。鼓励学生回顾并表述上面的思维过程。如果学生能够完成前两个过程，根据满意原则，可以认为达到数学抽象素养水平一的要求；如果学生能够完成三个过程，根据加分原则，可以认为达到数学抽象素养水平二的要求。

如果学生能够得到可以完全覆盖的结论，但只是证明了平行四边形对角线的长度不大于 L，说明学生已经有了论证的思路，但还没有理解完全覆盖的几何本质，依据满意原则，可以认为达到逻辑推理素养水平一的要求。

如果学生进一步证明平行四边形四个顶点到对称中心距离不大于圆的半径，但没有说明平行四边形内其他点的情况，说明学生理解了完全覆盖的几何本质，但证明过程还不够严谨，依据满意原则，可以认为达到逻辑推理素养水平二的要求。

如果学生能够完整证明平行四边形上的点到对称中心距离都不大于圆的半径，说明学生基本掌握了数学证明，依据加分原则，可以认为达到逻辑推理素养水平三。

（2）可以启发学生，采用列举、筛选的方法考察各种形式的四边形，逐一排除面积较小的四边形，构建一个递进式的证明路径，如图 7 所示。

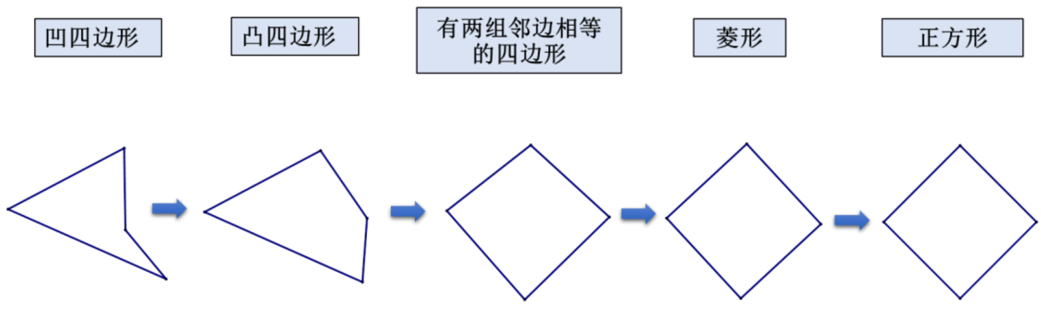


图 7 探索证明路径

如果学生能够独立完成上面的过程，说明对较复杂的新问题，能够直观想象、创造性地构建证明路径，依据满意原则，可以认为达到逻辑推理素养水平二的要求；如果学生能够进一步用数学语言严谨论证所得到的结论，根据加分原则，可以认为达到逻辑推理素养水平三的要求。

案例 9　鞋号问题

【目的】在寻求变量简单变化规律的过程中，说明数学建模素养的表现和水平，体会评价过程中的满意原则和加分原则。

【情境】网上购鞋常常看到下面的表格（表 2）。

表 2 脚长与鞋号对应表

脚长 a_n/mm	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265
鞋号 b_n	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

请解决下面的问题：

（1）找出满足表 2 中对应规律的计算公式，通过实际脚长 a 计算出鞋号 b。

（2）根据计算公式，计算 30 号童鞋所对应的脚长是多少？

（3）如果一个篮球运动员的脚长为 282mm, 根据计算公式，他该穿多大号的鞋？

【分析】数学建模素养的一个基本表现，就是能够针对具体的数据，选择合适的函数表达数量之间的关系，解决实际问题。在这样的活动中，可以体现数学建模素养不同水平的表现。

（1）可以把表中的两行数据看成两个数列，分别为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$。仔细观察可以知道，这两个数列分别满足下面的递推关系：

$$a_{n+1}=a_n+5，a_1=220；$$

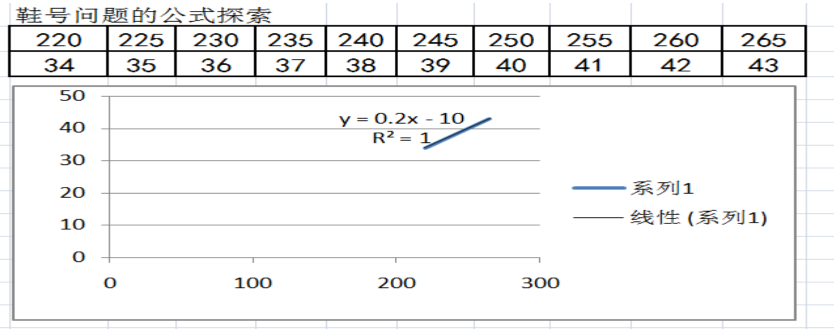
$$b_{n+1}=b_n+1，b_1=34。$$

由此得到 $a_n=215+5n$ 和 $b_n=33+n$，于是有 $b_n=0.2a_n-10$。如果学生能够找到并且准确表达脚长与鞋号之间的线性关系，根据满意原则，可以认为达到数学建模素养水平一的要求。

进一步，将脚长和对应的鞋号记作（a, b），在平面直角坐标系中描点，观察到线性关系，然后建立关系式 $b= 0.2a-10$。这说明学生能够借助图形直观发现变化规律，并且能够用函数清晰表达变化规律，根据加分原则，可以加分。

如果学生构建数据表，利用计算工具的电子表格做出散点图，选择几种函

数模型进行拟合；对比拟合结果，发现线性函数的拟合效果最好，相关系数为1，进而确定计算公式是一个线性模型，最后确定模型中的参数，如图 8 所示。根据加分原则，可以针对“善于使用计算工具”加分。


鞋号问题的公式探索

220	225	230	235	240	245	250	255	260	265
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

图 8 计算机模拟示意图

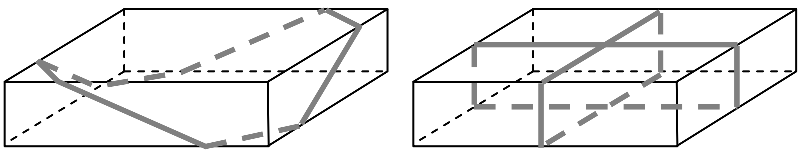
（2）令 b=30，代入公式 b= 0.2a−10，得 a=200，脚的长度为 200mm。虽然计算过程是套用已知结果，但由 b 求 a 涉及到简单的反函数，可以认为达到数学建模素养水平二的要求。

（3）当 a =282 时，代入公式 b = 0.2a−10，得 b = 46.4。分两种情况：如果简单地进行“4 舍 5 入”，选 46 号鞋或者直接选 46.4 号鞋，依然可以认为达到数学建模素养水平二的要求。如果知道作出的结论要符合实际，提出穿鞋要“不挤脚”，因此选 47 号鞋；或者提出要考虑脚型、鞋型，根据解答情况，，可以加分。

案例 10　包装彩绳

【目的】在把实际问题转化为数学问题的过程中，说明数学建模素养不同水平的表现，体会评价的满意原则和加分原则。

【情境】过年了，佳怡准备去探望奶奶，到商店买了一盒点心。售货员为她做了一个捆扎（如图 9(1)所示），并在角上配了一个花结，这样的包装显得更加美观。售货员说，这样的捆扎不仅漂亮，而且比一般的十字捆扎（如图 9(2)所示）包装更节省彩绳。你同意这种说法吗？请给出你的理由。(注：长方体点心盒的高小于长、宽。)



（1）　　　　　　（2）

图 9 点心盒的两种包装

【分析】在数学建模的过程中，常常要把实际问题数学化。特别是，需要借助几何直观才能论证的问题，通常是学生数学建模的难点。因此对于这样一类问题，难点处理的差异能够反映数学建模素养的不同水平。

如果学生能够结合几个具体的长方体盒子，通过捆扎操作、测量比较的方法，得到针对这几个盒子的结论，并且能够通过归纳、提出一般长方体盒子情况下的猜想，即便不能给出证明，根据满意原则，也可以认为达到数学建模水平一的要求。

如果学生能够用字母表示各段绳长，将长方体盒子平面展开，把问题转化为平面上折线长度的比较，把“扎紧”的表述转化为两点间直线段，最后给出一般性的结论，可以认为达到数学建模水平二的要求。

如果不考虑花结用绳，或者认为两种捆扎方法中花结的用绳长度相同，一个推理过程的范例可以表述如下：

设长方体点心盒子的长、宽、高分别为 x，y，z，依据图 9(2)的捆扎方式，把彩绳的长度记作 l。因为长方体的每个面上的那一段绳都与相交的棱垂直，所以 $l=2x+2y+4z$。

依据图 9(1)的捆扎方式，可以想象将长方体盒子展开在一个平面上，则彩绳的平面展开图是一条由 A 到 A 的折线。在“扎紧”的情况下，彩绳的平面展开图是一条由 A 到 A 的线段，记为 $A'A''$（如图 10），这时用绳最短，绳长记作 m，则

$$m=|A'A''|=\sqrt{(2y+2z)^2+(2x+2z)^2}$$
$$=2\sqrt{(y+z)^2+(x+z)^2}\text{。}$$

因为两个正数的大小关系与它们的平方的大小关系相同，由

$$l^2-m^2=(2x+2y+4z)^2-4[(y+z)^2+(x+z)^2]$$
$$=8(z^2+xy+xz+yz)>0,$$

得 $l>m$。因此，图 9(1)所示的捆扎方式节省材料。

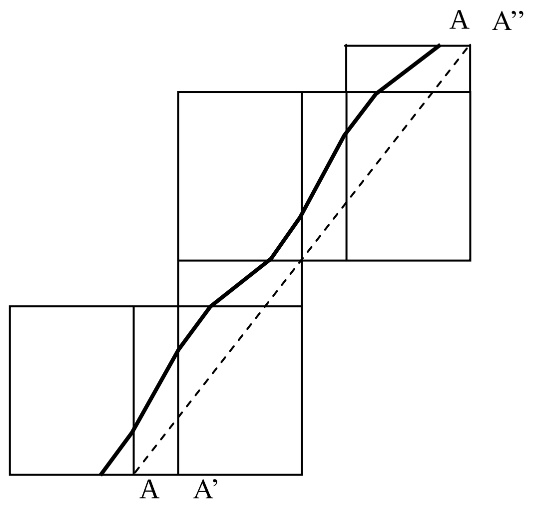


图 10 长方体盒子的平面展开示意图

如果学生能够完成以上工作，可以认为达到数学建模水平二的要求。如果思路清晰、表达准确，还可以适当加分。

案例 11　体重与脉搏

【目的】在构建“比例模型”解决实际问题的过程中，给出数学建模素养水平二、水平三的表现，体会评价的满意原则和加分原则。

【情境】生物学家认为，睡眠中的恒温动物依然会消耗体内能量，主要是为了保持体温。研究表明，消耗的能量 E 与通过心脏的血流量 Q 成正比；并且根据生物学常识知道，动物的体重与体积成正比。

表 3 给出一些动物体重与脉搏率对应的数据。

表 3 一些动物的体重和脉搏率

动物名	体重/g	脉搏率/（心跳次数 $\cdot \mathrm{min}^{-1}$）
鼠	25	670
大鼠	200	420
豚鼠	300	300
兔	2000	205
小狗	5000	120
大狗	30000	85
羊	50000	70

马	450000	38

回答下面的问题：

(1) 请根据生物学常识，给出血流量与体重之间关系的数学模型。

(2) 从表 3 可以看到，体重越轻的动物脉搏率越高。请根据上面所提供的数据寻求数量之间的比例关系，建立脉搏率与体重关系的数学模型。

(3) 根据表 3，作出动物的体重和脉搏率的散点图，验证建立的数学模型。

【分析】为了建立数学模型，需要进一步理解一些生物学概念，比如，血流量 Q 是单位时间流过的血量，脉博率 f 是单位时间心跳的次数；还需要进一步知道一些生物学假设，比如，心脏每次收缩挤压出来的血量 q 与心脏大小成正比，动物心脏的大小与这个动物体积的大小成正比。

因为数学建模只用到“比例分析”，因此在知识层面上学生困难不大，但学生通常对比例模型的分析思路比较陌生；同时，这个数学活动体现了跨学科的应用，因此如果能很好地解决问题，可以认为达到数学建模素养水平二、甚至水平三的要求。比如，下面的建模过程：

（1)因为动物体温通过身体表面散发热量,表面积越大,散发的热量越多，保持体温需要的能量也就越大，所以动物体内消耗的能量 E 与身体的表面积 S 成正比，可以表示为 $E=p_1S$。又因为动物体内消耗的能量 E 与通过心脏的血流量 Q 成正比，可以表示为 $E=p_2Q$。因此得到 $Q=pS$，其中 p_1，p_2 和 p 均为正的比例系数。

另一方面，因为体积 V 与体重 W 成正比，可以表示为 $V=r_1W$；又因为表面积 S 大约与体积 V 的$\frac{2}{3}$次方成正比，可以表示为 $S=r_2V^{\frac{2}{3}}$，因此得到 $S=rW^{\frac{2}{3}}$，其中 r_1，r_2，r 为正的比例系数。所以可以构建血流量与体重关系的数学模型：$Q=k_1W^{\frac{2}{3}}$，其中 k_1 为正的比例系数。根据脉搏率的定义 $f=\frac{Q}{q}$，再根据生物学假设 $q=cW$（c 为正的比例系数），最后得到 $f=\frac{Q}{q}=\frac{kW^{\frac{2}{3}}}{cW}$，也就是 $f=k\cdot W^{-\frac{1}{3}}$，其中 k 为正的待定系数。

(2)脉搏率与体重关系的数学模型说明,恒温动物体重越大,脉搏率越低；

脉搏率与体重的$\frac{1}{3}$次方成反比。表 3 中的数据基本上反映了这个反比例的关系。

（3）图 11 是原始数据的散点图，图 12 是以 $\ln W$ 和 $\ln f$ 为坐标的散点图。可以看出到，数据取对数之后基本满足线性关系，因此得到体重和脉搏率的对数线性模型，可以把这个模型表达为 $\ln f = \ln k - \frac{\ln W}{3}$。

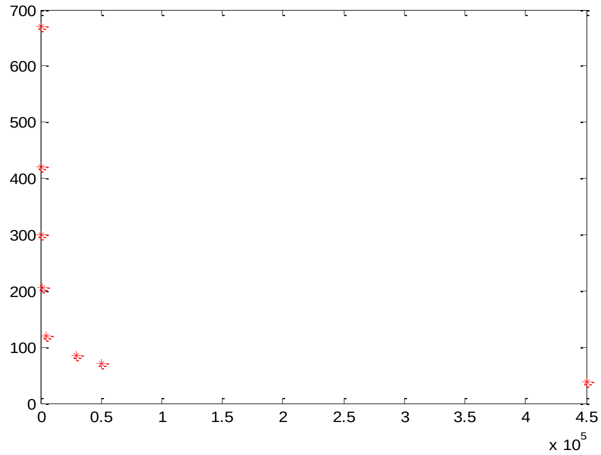


图 11 脉搏率 f 与体重 W 的散点图

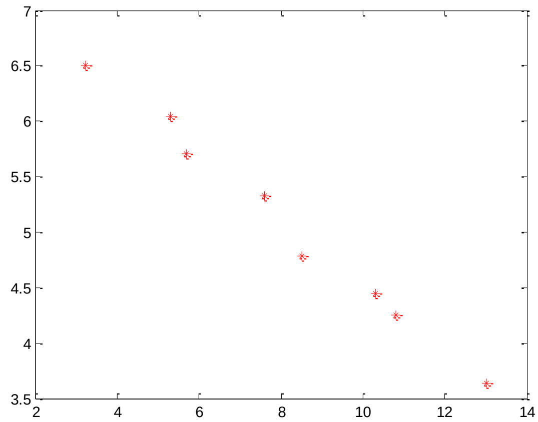


图 12 $\ln f$ 与 $\ln W$ 的散点图

如果学生在上述分析过程中思路清晰、表达准确，可以认为达到数学建模素养水平三的要求。如果在分析或者论证过程中还有一些创意，比如，对脉搏率与体重关系的模型两边取对数，形成对数线性模型；能够用相关系数进行线性相关性判断；能够用方差分析方法检验模型的适合程度；等等；根据加分原则，可以相应加分。

因为这个问题的分析线索比较长，学生在建模求解的过程中，可能会得到一些有价值的中间结论，或者有些学生最终也不能把整个过程进行到底，甚至

有些学生不经过任何分析就给出拟合函数（如图 13 所示）。这些情况都是数学建模和数据分析素养水平达成程度的表现，可以适度加分或者扣分。

体重（克）	脉搏率（心跳次数/分钟）
25	670
200	420
300	300
2000	205
5000	120
30000	85
50000	70
450000	38

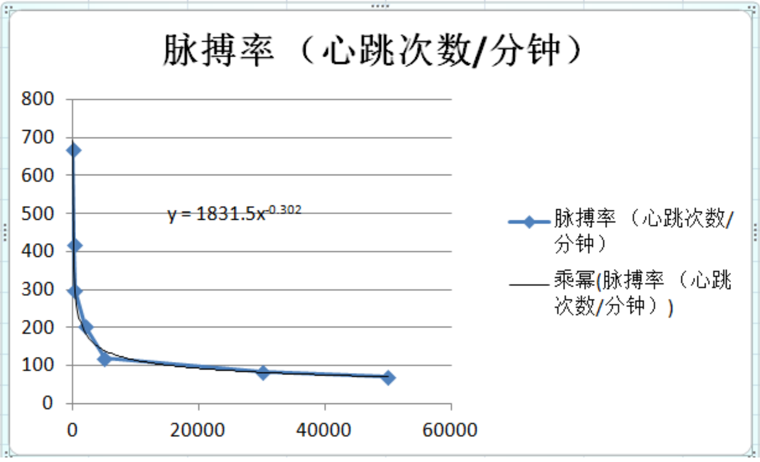


图 13

案例 12　估算地球周长

【目的】说明直观想象素养水平的表现和水平，体会评价“在现实情境中，建立实物的几何图形，能够根据图形想象实物”的满意原则和加分原则。

【情境】古希腊地理学家埃拉托色尼（Eratosthenes，前 275-前 193）用下面的方法估算地球周长。他从书中得知，位于尼罗河第一瀑布的塞伊尼（现在的阿斯旺，在北回归线上），夏至那天正午立竿无影；同样在夏至那天，他所在的城市——埃及北部的亚历山大城，立杆可测得日影角大约为 7°（图 14）。埃拉托色尼猜想造成这个差异的原因是地球是圆的，并且因为太阳距离地球很远（现代科学观察得知，太阳光到达地球表面需要 8.3 s，光速 300000km/s），太阳光平行照射在地球上。根据平面几何知识，平行线内错角相等，因此日影角与两地对应的地心角相等。他又派人测得两地距离大约为 5000 希腊里，约合 800 *km*；因为 360° 大约为 7° 的 50 倍，于是他估算地球周长约为 800×50 =40000km，这与地球实际周长 40076km 相差无几。

（1）试画出平面示意图；

（2）试由埃拉托色尼的估算结果，给出你的推理过程。

【分析】如果学生能够画出基本合理的草图，可以认为达到直观想象素养水平一的要求；能够画出清晰合理的示意图，可以认为达到直观想象素养水平二的要求。本题也考察逻辑推理等素养。比如，下面的分析过程。

（1）如图14所示，记赛伊尼为点A，亚历山大为点B。在两个点处太阳光平行，因为内错角相等得到弧AB对应的地心角为7°，弧AB的长度为800km。

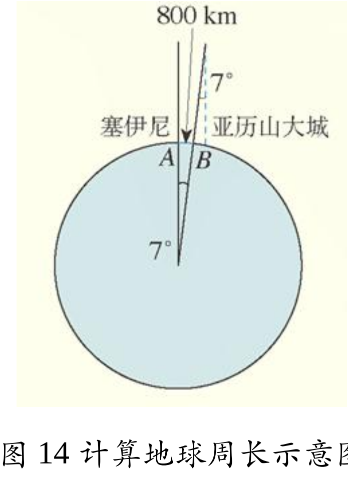


图 14 计算地球周长示意图

（2）由弧AB长乘 360 与 7 之比可以近似得到地球周长。

案例 13　影子问题

【目的】说明直观想象素养的表现和水平，体会满意原则和加分原则。

【情境】如图 15，广场上有一盏路灯挂在高 10m 的电线杆顶上，记电线杆的底部为A。把路灯看作一个点光源，身高 1.5m 的女孩站在离A点 5m 的B处。回答下面的问题：

图 15 路灯下的女孩

（1）若女孩以 5m 为半径绕着电线杆走一个圆圈，人影扫过的是什么图形，求这个图形的面积；

（2）若女孩向点A前行 4m 到达D点，然后从D点出发，沿着以BD为对

角线的正方形走一圈，画出女孩头顶影子的轨迹，说明轨迹的形状。

【分析】回顾课程标准中相关内容的要求：从空间几何体的整体观察入手，认识空间图形。

如果学生能够在问题（1）中回答出人影扫过的图形是环形，或者在问题（2）的解答中提到棱锥，可以认为达到直观想象素养水平二的要求。如果学生能够清晰准确地回答两个问题，可以认为达到直观想象素养水平三的要求。比如，下面的回答。

（1）如图16所示，S 为路灯位置，C 为女孩头顶部，女孩的影子为线段 BP。女孩绕着电线杆走一个圆圈，人影扫过的是一个环形。

已知 $SA=10$ m，$AB=5$ m，$BC=1.5$ m。设 $BP=x$，则由 $BC//SA$，得 $\frac{BP}{AP}=\frac{BC}{SA}$，即 $\frac{x}{x+5}=0.15$，解得 $x=\frac{15}{17}$。因此环形面积为

$$\pi(AP^2-AB^2)=\pi((x+5)^2-5^2)=\frac{2775}{289}\pi\approx 30.166\ (\text{m}^2)\ 。$$

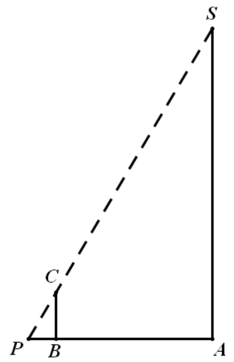


图 16 路灯下女孩几何示意图

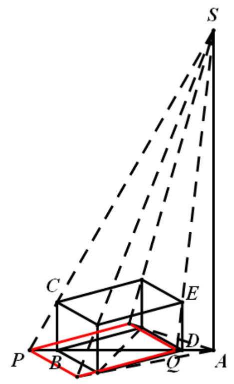


图 17

（2）如图17，女孩头部运动的轨迹是以 CE 为对角线的正方形（CE 与 BD 平行且相等），且该正方形平行于地面，则在点光源 S 的投射下，投影应与原图形相似，因此女孩头部影子的轨迹也是一个正方形。

【拓展】如果这个女孩绕一个半径为 2m 的圆周走一圈，那么人影扫过的图形是什么？人影扫过的面积是多少？

案例 14　圆柱体截面问题

【目的】说明直观想象素养的表现和水平，体会满意原则和加分原则。

【情境】在一个密闭透明的圆柱型桶内装一定体积的水。

(1)将圆柱桶分别直立、水平、倾斜放置时，写出圆柱桶内的水平面可能呈现出的所有几何形状，画出直观示意图。

(2)参考图 18，对上述结论给出证明。

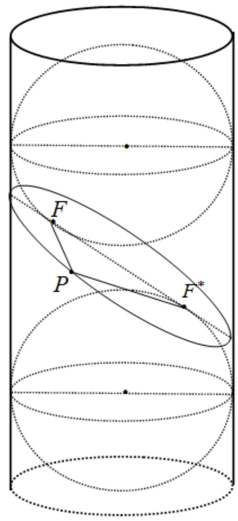


图 18

【分析】回顾课程标准中相关内容要求：“利用实物、计算机软件等观察空间图形，认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征，能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构。”

如果学生能够比较完整地回答（1）的第一个问题，可以认为达到直观想象素养水平一的要求；能比较完整地回答（1）的第二个问题，可以认为达到直观想象素养水平二的要求；能比较完整地回答（2）的问题，可以认为达到直观想象素养水平三的要求。此题也考察逻辑推理等素养。比如，下面的回答：

（1）圆柱桶直立放置时，水平面为圆面；水平放置时，水平面为矩形面；倾斜放置时，水平面为椭圆面或者部分椭圆面。可能呈现的所有类型的几何图形，如图 19 所示。

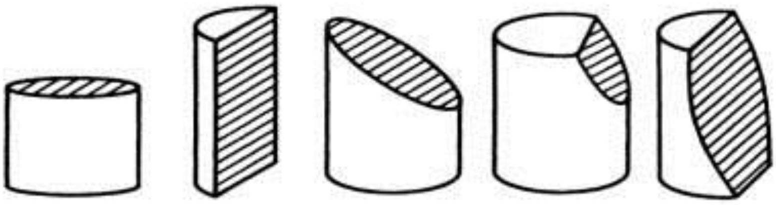


图 19 水平面可能出现的几何形状

（2）圆柱桶直立放置时，水平面相当于平行于底面的截面，因此水平面是圆面。

圆柱桶水平放置时，水平面与圆柱侧面的两条交线是圆柱的母线，它们平行且相等，且垂直于水平面与圆柱底面的两条交线，所以水平面是矩形面。

圆柱桶倾斜放置时，水平面相当于用平面斜截圆柱时所得到的截面。如图 20 所示，上下两球与截面和圆柱侧面均相切，两球面与圆柱侧面分别相切于以 BC，DE 为直径且平行于圆柱底面的大圆 O_1 和 O_2，两球面与斜截面分别相切于点 F 和 F'，斜截面与 BD，CE 分别交于点 A 和 A'，P 为所得截面边缘上一点（即斜截面与圆柱侧面交线上一点）。设过点 P 的圆柱的母线与圆 O_1 和 O_2 分别交于点 M 和 N，则 PM 和 PN 分别是两球面的一条切线。

由于 PM 和 PF 是同一个球面的切线，故 $PM=PF$，同理 $PN=PF'$，于是有 $PF+PF'=PM+PN=MN$ 为定值，即点 P 到 F 和 F' 距离之和为定值，所以这时的截面是椭圆面。

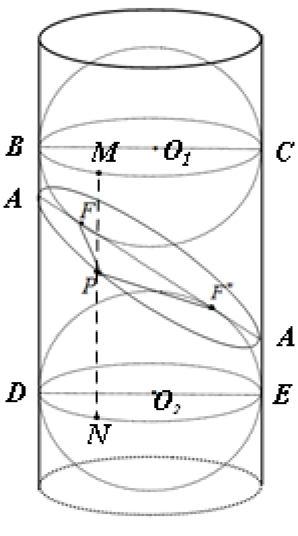


图 20

案例 15　过河问题

【目的】以平面向量的运算为知识载体，以科学情境下确定游船的航向、航程为数学任务，借助理解运算对象、运用运算法则、探索运算思路、设计运算程序、实施运算过程等一系列数学思维活动，说明数学运算素养水平二和水平三的表现，体会满意原则和加分原则。

【情境】长江某地南北两岸平行。如图21所示，江面宽度d=1km，一艘游船从南岸码头A出发航行到北岸。假设游船在静水中的航行速度$\boldsymbol{v}_1$的大小为$|\boldsymbol{v}_1|$=10km/h，水流的速度$\boldsymbol{v}_2$的大小为$|\boldsymbol{v}_2|$=4km/h。设$\boldsymbol{v}_1$和$\boldsymbol{v}_2$的夹角为θ（$0<\theta<180^\circ$），北岸的点A'在A的正北方向。回答下面的问题：

（1）　当$\theta=120^\circ$时，判断游船航行到达北岸的位置是在A'的左侧还是右侧，并说明理由。

（2）　当$\cos\theta$多大时，游船能到达A'处？需要航行多长时间？

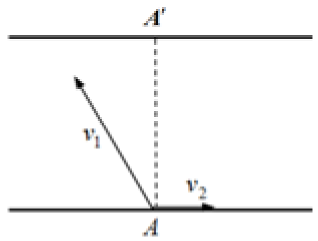


图21河流两岸示意图

【分析】回答这个问题需要几何直观下的代数运算。

（1）首先要知道游船航行速度是静水速度与水流速度之和，然后会按比例画示意图判断航行方向。如果学生能够用向量加法的平行四边形法则画出示意图、并给出合理解释，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平一的要求。

如果学生把航行速度即速度之和表示为$\boldsymbol{v}$，可以通过计算航行速度向量$\boldsymbol{v}$与水流速度向量$\boldsymbol{v}_2$之间的夹角进行判断，由

$$\cos<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2>=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}=\frac{-4}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}<0,$$

判断游船到达的位置在A'的左侧。说明学生不仅能够理解向量的加法，还能够根据题意，运用向量数量积运算求解向量之间的夹角，根据加分原则，可以认为达到数学运算素养水平二的要求。

（2）首先要将“游船能到达A'处”抽象为游船的实际航向与河岸垂直，即游船的静水速度和水流速度的合速度方向与$\overrightarrow{AA'}$相同，将合速度运算与平面向量的加法运算联系起来，画出速度合成示意图（如图 22）。根据满意原则，学生能够画出向量加法意图，可以认为达到数学运算素养水平一的要求。

通过解三角形，求得$\cos\theta$值为$-\frac{2}{5}$；通过$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}_1|\sin\theta=2\sqrt{21}$，得到航行时间$\frac{1}{2\sqrt{21}}$h。说明学生能够将题目中提供的数据信息与几何图形有机联系，并且能够明晰运算途径、得到运算结果，根据加分原则，可以认为达到数学运算素养水平二的要求。

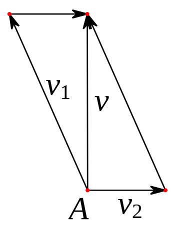


图 22

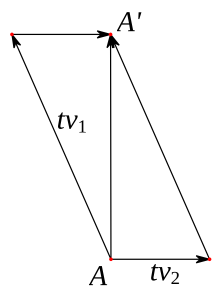


图 23

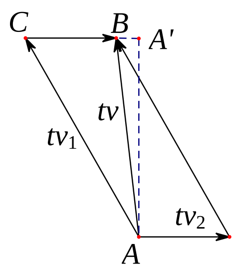


图 24

如果学生直接画出位移合成示意图（如图 23，图中t为到达对岸的时间），说明学生不仅能用向量加法而且能够用向量的数乘运算来表达问题，可以在数学运算素养水平二的基础上加分。

进一步，如果学生能够通过直角三角形计算出$\cos\theta=-\frac{2}{5}$，由勾股定理，通过$(10t)^2-(4t)^2=1$解得$t=\frac{1}{2\sqrt{21}}$h。说明学生能够运用勾股定理建立方程求解，根据加分原则，可以认为达到数学运算素养水平三的要求。

【拓展】在本题背景下，可以设计数学运算素养拓展问题，比如当$\theta=120^0$

时，游船航行到北岸的实际航程是多少？

为了回答这个问题，可以先依据题意画出向量加法的示意图，如图 24 所示，然后利用向量数量积运算求得

$$|t\boldsymbol{v}|^2=t^2(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)^2=t^2(10^2-2\times10\times4\times\cos120^\circ+4^2)=156t^2$$ 。

在 Rt$\Delta AA'C$ 中，因为 $t|\boldsymbol{v}_1|\cos30^\circ=1$，从而 $t=\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$，所以 $AB=\dfrac{2\sqrt{13}}{5}km$。如果学生能够完成这个过程，说明学生能够综合运用向量的加法、数乘、数量积运算和勾股定理，恰到好处地设计运算程序、完成问题求解，根据加分原则，可以在数学运算素养水平三的基础上加分。

案例 16　隧道长度

【目的】以解三角形为知识载体，以生活情境下的隧道测量为数学任务，借助明确运算对象、探索运算思路、设计运算程序、实施运算等一系列数学思维活动，说明数学运算素养的水平一和水平二的表现，体会满意原则。

【情境】如图25所示，A，B，C为山脚两侧共线的三点，在山顶P处测得三点的俯角分别为α,β,γ。计划沿直线AC开通穿山隧道，为求出隧道DE的长度，你认为还需要直接测量出AD，EB，BC中的哪些线段的长度？根据条件，并把你认为需要测量的线段长度作为已知量，写出计算隧道DE 长度的运算步骤。

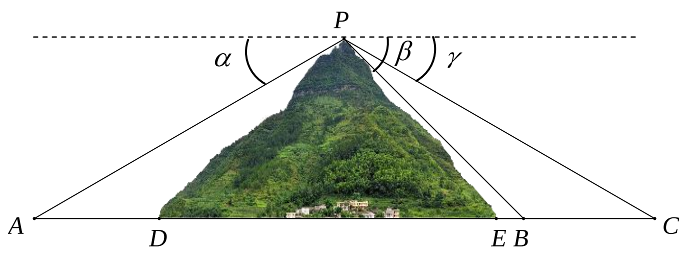


图 25 计算隧道长度示意图

【分析】由已经测得的三个角α,β,γ，依据平面几何知识可以知道，ΔPAB，ΔPBC的三个内角已经确定，进而形状已经确定，因此还需要通过确定三角形的边长来确定三角形的大小。进一步，为了能够计算隧道 DE 的长度，由解三角形的知识，可以推断出还需要确定所有线段 AD，EB，BC 的长度。

首先在ΔPBC中进行运算，依据正弦定理写出 BC 与 PB（或 PC）之间的等量关系式，表达出 PB（或 PC）。如果学生能够完成这个步骤，说明学生已经熟悉常规的解三角形问题及其解法，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平一的要求。

如果学生能够继续在ΔPAB（或ΔPAC）中，由正弦定理写出 PB 与 AB（或 PC 与 AC）之间的等量关系式，用已知角度α,β,γ和测量得的线段 AD，EB，BC 长度正确写出线段 DE 长度的表达式，说明学生能够清晰表达图 37 中多个三角形之间的关系，并且能够探索出运算程序、正确实施，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平二的要求。

案例 17　迭代计算问题

【目的】迭代方法是现代计算数学的基本方法。借助用“牛顿切线法”和“二分法”求一元二次方程解的问题，考察理解运算对象、把握运算规律、表达运算过程、设计运算程序等一系列数学运算的思维活动，说明数学运算素养水平三的表现，体会满意原则和加分原则。

【情境】研究一元二次方程$x^2+x+1=0$的求解问题，这是经典的求黄金分割的方程式。令$f(x)=x^2+x-1$，对抛物线$y=f(x)$，持续实施下面“牛顿切线法”的步骤：

在点 (1,1)处作抛物线的切线交x轴于（x_1,0）；

在点$(x_1, f(x_1))$处作抛物线的切线，交x轴于点（x_2,0）；

在点$(x_2, f(x_2))$处作抛物线的切线，交x轴于点（x_3,0）；

……

得到一个数列$\{x_n\}$。回答下列问题：

（1）求x_1的值；

（2）设$x_{n+1}=g(x_n)$，求$g(x_n)$的解析式；

（3）用“二分法”求方程的近似解，给出前四步结果。比较“牛顿切线法”和“二分法”的求解速度。

【分析】在数值计算中“牛顿切线法”和“二分法”是最为常用的两种方法。

（1）求出抛物线在点$(1,1)$处切线方程$y-1=f'(1)(x-1)$，得到$y=3x-2$。令$y=0$，得到$x_1=\dfrac{2}{3}$。如果完成这个步骤，说明学生能够正确运用求导运算得到函数的切线方程，理解切线与x轴交点横坐标是所要求的运算对象，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平一的要求。

（2）求出抛物线在点$(x_n,f(x_n))$处的切线方程$y=(2x_n+1)(x-x_n)+(x_n{}^2+x_n-1)$。说明学生能够一般性地理解运算对象，并能够正确地予以数学表达，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平二的要求。

令$y=0$，得到$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n+1}$，进而$g(x_n)=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n+1}$。如果完成这个步骤，说明学生很好地理解迭代运算，并且能够正确地运用代数式予以表达，根据满意原则，可以认为达到数学运算素养水平三的要求。

（3）用求解公式可以得到一元二次方程的正根为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，近似解为0.618，就是著名的黄金分割数。用“二分法”求方程近似解的前四步为

因为$f(0)=-1$；$f(1)=1$，所以$f(x)$在区间(0,1)内至少有一个零点；

因为$f(0.5)$=-0.25，所以$f(x)$在区间(0.5,1)内至少有一个零点；

因为$f(0.75)=0.3125$，所以$f(x)$在区间(0.5,0.75)内至少有一个零点；

因为$f(0.625)=0.015625$，所以$f(x)$在区间(0.5,0.625)内至少有一个零点。

可以看到，用“二分法”计算前四步得到近似解为0.625。同样从x=1出发，用“牛顿切线法”解析式可求得第二步和第三步的近似解分别为$x_2\approx0.619$，$x_3\approx0.618$，比较“牛顿切线法”与“二分法”前几步的结果，可以看到“牛顿切线法”要比“二分法”快得多。如果学生完成这个步骤，根据加分原则，可以在数学运算素养水平三上加分。

【拓展】对于函数 $f(x)=x^2+x-1$，由 $f\left(0\right)<0$ 和 $f\left(1\right)>0$，可知函数在 $(0,1)$ 内至少有一个零点，设该零点为 x_0。若 $x_0<x_n$，求证 $x_0<g(x_n)<x_n$。

案例 18　估计考生总数

【目的】分别说明数学建模素养和数据分析素养水平一、水平二的表现，体会评价的满意原则和加分原则。

【情境】某大学美术系平面设计专业的报考人数连创新高，今年报名刚结束，某考生想知道报考人数。考生的考号按 0001，0002，…的顺序从小到大依次排列。这位考生随机地了解了 50 个考生的考号，具体如下：

0400 0904 0747 0090 0636 0714 0017 0432 0403 0276
0986 0804 0697 0419 0735 0278 0358 0434 0946 0123
0647 0349 0105 0186 0079 0434 0960 0543 0495 0974
0219 0380 0397 0283 0504 0140 0518 0966 0559 0910
0658 0442 0694 0065 0757 0702 0498 0156 0225 0327

请给出一种方法，根据这 50 个随机抽取的考号，帮助这位考生估计考生总数。

【分析】用样本空间的数字特征估计总体的数字特征或性质，是统计建模的基本思想和基本手法，既可以表现数学建模素养水平，也可以表现数据分析素养水平。

如果学生给出的方法体现了用样本估计总体的思想，并且述说的理由合理，即便表述得不完整、不清楚、不到位，根据满意原则，都可以认为达到数据分析素养水平一的要求。比如，用给出数据的最大值 986（与 0986 对应）估计考生总数；用数据的最大值与最小值的和（986+17=1003）估计考生总数；借助数据中的部分数据的信息（如平均值、中位数等）估计考生的总数；等等。

如果学生能够理解数据分析的思想，过程述说比较清楚，数学表达比较到位，可以认为达到数据分析素养水平二的要求。比如：

设考生总数为 N，即 N 是最大考号。

方法一随机抽取的 50 个数的平均值应该和所有考号的平均值接近，即用样本的平均值估计总体的平均值。

这 50 个数的算术平均值是 24671÷50=493.42，它应该与 $\frac{N}{2}$ 接近。因此，估计 2007 年报考这所大学美术系平面设计专业的考生总数为

$$N \approx 493.42 \times 2 \approx 987\ (人)。$$

类似地，可以通过样本中位数得到 N 的估计。

方法二把这 50 个数据从小到大排列。这 50 个数把区间[0, N]分成 51 个小区间。由于 N 未知，除了最右边的区间外，其他区间都是已知的。可以利用这些区间长度来估计 N。

由于这 50 个数是随机抽取的，可以认为这 51 个区间的长度都近似等于[0, N]长的五十一分之一，即这些区间的长度都近似等于 $\frac{N}{51}$。因为区间长度相差可能比较大，所以求 50 个区间的平均长度。因为这 50 个区间长度的和，恰好是这 50 个数中的最大值 986，因此得到

$$N \approx \frac{986}{50} \times 51 \approx 1006\ 。$$

因为这是一道开放题，允许有不同的答案。只要学生能够对自己提出的方法给出合理的解释，可以认为达到相应水平的要求。