2023届高三冲刺卷(一) 全国卷
理科数学试题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\left\{x\left|\frac{1}{9}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant 1,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,则 $A\cap B=$

A.$\{0,2\}$　　B.$\{1,2\}$　　C.$\{0,1,2\}$　　D.$\{1,2,4\}$

2.已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}=-\frac{2}{1+\mathrm{i}}$,则 z 在复平面内所对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.已知 $\cos 2x=-\frac{1}{3}$,则 $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为

A.$\frac{9}{16}$　　B.$\frac{5}{6}$　　C.$\frac{13}{20}$　　D.$\frac{17}{24}$

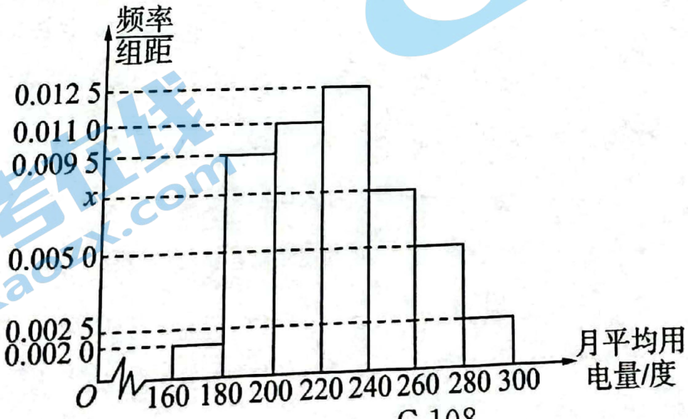
4.已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\x-2y+2\geqslant 0,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-8y$ 的最大值是

A.4　　B.6　　C.8　　D.12

5.一个集合中含有4个元素,从该集合的子集中任取一个,则所取子集中含有3个元素的概率为

A.$\frac{4}{7}$　　B.$\frac{3}{5}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{4}$

6.某汽车生产厂家研发了一种电动汽车,为了了解该型电动汽车的月平均用电量(单位:度)情况,抽取了150名户主手中的该型电动汽车进行调研,绘制了如图所示的频率分布直方图,其中,第5组小长方形最高点的纵坐标为 x,则该型电动汽车月平均用电量在[200,280)的户主人数为



A.98　　B.103　　C.108　　D.112

7.某班学生的学习成绩ξ(满分100分)服从正态分布:$\xi \sim N(85,\sigma^2)$,且$P(83<\xi<87)=0.3$,$P(78<\xi<83)=0.12$,$P(\xi<78)=$

A.0.14　　B.0.18　　C.0.23　　D.0.26

8.已知函数$f(x)=a(3-x)+\dfrac{bx}{x+1}$的图象过点(0,1)与$\left(3,\dfrac{9}{4}\right)$,则函数$f(x)$在区间[1,4]上的最大值为

A.$\dfrac{3}{2}$　　B.$\dfrac{7}{3}$　　C.$\dfrac{5}{4}$　　D.$\dfrac{8}{5}$

9.已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$,$P$为$C$右半支上一点,且$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{4}$,$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2a^2$,则双曲线$C$的离心率为

A.2　　B.4　　C.6　　D.9

10.在等比数列$\{a_n\}$中,公比$q=2$,且$\dfrac{1}{a_9}+\dfrac{1}{a_{10}}+\dfrac{1}{a_{11}}+\dfrac{1}{a_{12}}=\dfrac{6}{a_{10}^2}$,则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=$

A.3　　B.12　　C.18　　D.24

11.定义在**R**上的函数$f(x)$满足,①对于互不相等的任意$x_1,x_2\in(0,2]$都有$f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$,且当$x>1$时,$f(x)>0$,②$f(x+2)=-f(x)$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立,③$y=f(x+2)$的图象关于直线$x=-2$对称,则$f(-10)$、$f\left(-\dfrac{9}{2}\right)$、$f(3)$的大小关系为

A.$f(-10)<f\left(-\dfrac{9}{2}\right)<f(3)$　　B.$f\left(-\dfrac{9}{2}\right)<f(3)<f(-10)$

C.$f(-10)<f(3)<f\left(-\dfrac{9}{2}\right)$　　D.$f(3)<f(-10)<f\left(-\dfrac{9}{2}\right)$

12.已知函数$f(x)$与$g(x)$定义域都为**R**,满足$f(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{e^x}$,且有$g'(x)+xg'(x)-xg(x)<0$,$g(1)=2e$,则不等式$f(x)<4$的解集为

A.(1,4)　　B.(0,2)

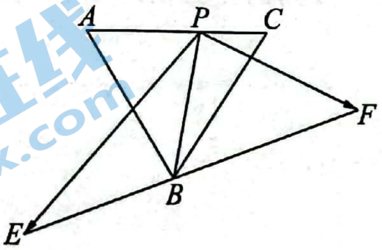
C.$(-\infty,2)$　　D.$(1,+\infty)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13."$\exists x\in\mathbf{R}$,使得$x^2-6ax+3a<0$"为假命题,则实数a的取值范围为________.

14.$(x+2)^4(x-1)^3$展开式中x^2的系数为________.

15.如图所示,$\triangle ABC$是边长为8的等边三角形,点P为AC边上的一个动点,长度为6的线段EF的中点为点B,则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的取值范围是________.



16.直线$l:x+y-1=0$与椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$交于$A,B$两点,长轴的右顶点为点$P$,则$\triangle ABP$的面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知△ABC 的角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，满足 $\sqrt{3}a\cos C+a\sin C=\sqrt{3}b$，$bc=\frac{1}{3}$，$b+c-\sqrt{2}a=0$.

（1）求 A；

（2）求△ABC 外接圆的半径 R.

18.（12 分）某农科所统计了单位面积某种化肥实施量 x（kg）和玉米相应产量 Y（kg）的相关数据，制作了数据对照表：

x(kg)	16	20	24	29	36
Y(kg)	340	350	362	404	454

若在合理施肥范围内 x 与 Y 具有线性相关关系，

（1）求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）请利用线性回归方程预测 $x=40$ kg 时的玉米产量.

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：

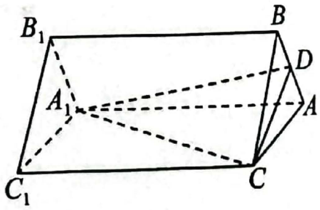
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

19.（12 分）已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 $\sqrt{2}$，底面边长为 2，D 为 AB 的中点.

（1）证明：$CD\perp A_1D$；

（2）求二面角 $D-A_1C-A$ 的大小；

（3）求直线 CA 与平面 A_1CD 所成角的正弦值.



20.(12 分)已知斜率存在的直线 l 过点 $P(1,0)$ 且与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点.

(1)若直线 l 的斜率为 1，M 为线段 AB 的中点，M 的纵坐标为 2，求抛物线 C 的方程；

(2)若点 Q 也在 x 轴上，且不同于点 P，直线 AQ,BQ 的斜率满足 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$，求点 Q 的坐标.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2a}x^2+x(a>0)$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2a}x^2+x(a>0)$ 在其定义域上有唯一零点，求实数 a 的值.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\varphi,\\ y=1+t\sin\varphi.\end{cases}$($t$ 为参数).

(1)若 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，求直线 l 的普通方程和曲线 C 的的直角坐标方程；

(2)过点 $P(0,-3)$ 向直线 l 作垂线，垂足为 Q，说明点 Q 的轨迹为何种曲线.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+3|$.

(1)解不等式 $f(x)+|x-3|>8$；

(2)若 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的最小值.

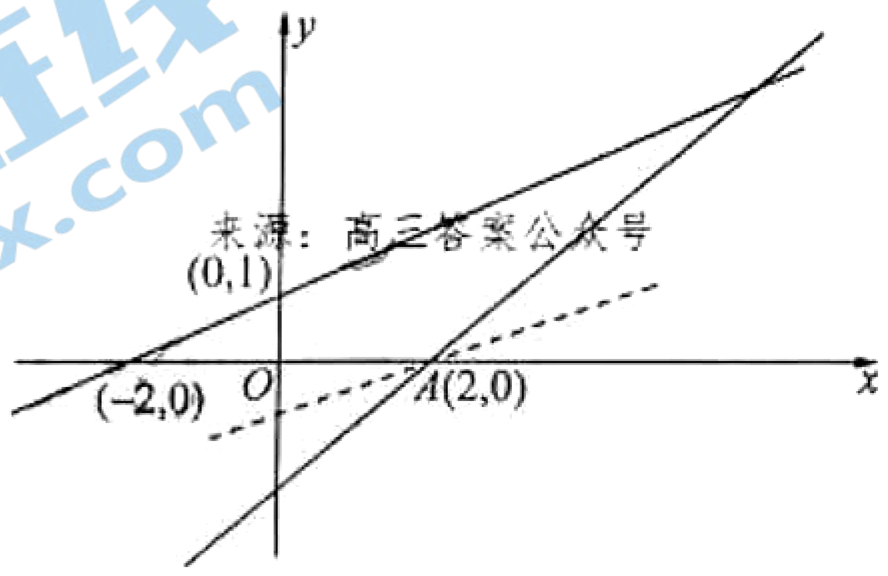
理科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】$B=\left\{x\left|\frac{1}{9}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\leqslant1,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\{x\mid0\leqslant x\leqslant2,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 C.

2.B 【解析】由 $z-\mathrm{i}=-\frac{2}{1+\mathrm{i}}$可得 $z=-\frac{2}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}=-1+2\mathrm{i}$，故复数 z 所对应的点$(-1,2)$位于第二象限.故选 B.

3.B 【解析】$\cos2x=-\frac{1}{3}$，而 $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}=1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\right.$ $\left.\frac{1}{2}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x\right]=1+\frac{1}{2}\cos2x=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.故选 B.

4.A 【解析】由约束条件画出可行域如图所示，



则目标函数 $z=2x-8y$ 在点 $A(2,0)$取得最大值，代入得 $2\times2-8\times0=4$，故 $z=2x-8y$ 的最大值为 4.故选 A.

5.D 【解析】4 个元素的集合所有子集共 $2^4=16$ 个，设此集合为$\{a,b,c,d\}$，事件 A："所取子集中含有 3 个元素"，则事件 A 的基本事件个数为 4 个，即$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，所以 $P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.故选 D.

6.C 【解析】由$(0.002+0.0095+0.011+0.0125+x+0.005+0.0025)\times20=1$，得 $x=0.0075$，$\therefore$直方图中 $x=0.0075$.$\therefore$月平均用电量在$[200,280)$的用户有 $20\times(0.011+0.0125+0.0075+0.005)\times150=108$户.故选 C.

7.C 【解析】$\because\frac{83+87}{2}=85$，$\therefore P(\xi<83)=\frac{1-P(83<\xi<87)}{2}=0.35$，$\therefore P(\xi<78)=P(\xi<83)-P(78<\xi<83)=0.35-0.12=0.23$.故选 C.

8.B 【解析】$\because$函数 $f(x)=a(3-x)+\frac{bx}{x+1}$的图象过点$(0,1)$与$\left(3,\frac{9}{4}\right)$，$\therefore f(0)=1$，$f(3)=\frac{9}{4}$，则$\begin{cases}\frac{3b}{4}=\frac{9}{4},\\3a=1,\end{cases}$解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=3$，故函数 $f(x)$的解析式为：$f(x)=\frac{3x}{x+1}-\frac{x}{3}+1$.而 $f(x)=\frac{3x}{x+1}-\frac{x}{3}+1=\frac{3(x+1)-3}{x+1}-\frac{x}{3}+1=\frac{13}{3}-\left[\frac{3}{x+1}+\frac{x+1}{3}\right]\leqslant\frac{13}{3}-2\sqrt{\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x+1}{3}}=\frac{7}{3}$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最大值为$\frac{7}{3}$.故选 B.

9.A 【解析】$\because\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2a^2$，$\therefore|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2=2a^2$ 可得$|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=8a^2$.又$|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=2a$，于是可得$|\overrightarrow{PF_1}|=4a$，$|\overrightarrow{PF_2}|=2a$，

$\therefore\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\frac{1}{4}$，整理可得 $c^2=4a^2$，

$\therefore c=2a$，$e=2$.故选 A.

10.B 【解析】$\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a_{12}}=\left(\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{12}}\right)+\left(\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{a_{11}}\right)=\frac{a_9+a_{12}}{a_9a_{12}}+\frac{a_{10}+a_{11}}{a_{10}a_{11}}=\frac{a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}}{a_{10}a_{11}}=\frac{a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}}{2a_{10}^2}$，

$\because\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a_{12}}=\frac{6}{a_{10}^2}$，$\therefore\frac{6}{a_{10}^2}=\frac{a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}}{2a_{10}^2}$，$\therefore a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=12$.故选 B.

11.B 【解析】不妨设 $x_1>x_2$，$\because x_1,x_2\in(0,2]$，$\therefore\frac{x_1}{x_2}>1$，由于当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，

$\therefore f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2]$ 上单调递增. 又 $\because f(x+2)=-f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 来源：高三答案公众号

$\because y=f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，$\therefore y=f(x)$ 向左平移两个单位长度关于直线 $x=-2$ 对称，

$\therefore y=f(x)$ 关于直线 $x=0$(y 轴)对称，$\therefore y=f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-10)=f(10)=f(2)$，$f\left(-\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

$f(3)=f(-1)=f(1)$，$\therefore f\left(-\dfrac{9}{2}\right)<f(3)<f(-10)$，故选 B.

12.D 【解析】由 $f(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{e^x}$ 可得 $f'(x)=\dfrac{g(x)e^x+(x+1)g'(x)e^x-(x+1)g(x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{xg'(x)+g'(x)-xg(x)}{e^x}$，

而 $g'(x)+xg'(x)-xg(x)<0$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 又 $g(1)=2e$，而 $f(1)=\dfrac{2\times g(1)}{e^1}=\dfrac{4e}{e}=4$.

$f(x)<4=f(1)$，$\therefore x>1$，故不等式 $f(x)<4$ 的解集为 $(1,+\infty)$. 故选 D.

13. $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ 【解析】$\because$“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-6ax+3a<0$”为假命题，$\therefore$“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-6ax+3a\geqslant0$ 成立”为真命题，于是 $\Delta=36a^2-12a\leqslant0$，即 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{3}$，故答案为 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

14.24 【解析】展开式中 x^2 的项为 $(-1)^3C_4^3x^2\cdot2^2+2^4\cdot C_3^1x^2\cdot(-1)+C_4^3 2^3\cdot C_3^2(-1)^2\cdot x^2=24x^2$，$\therefore$ 展开式中 x^2 的系数为 24. 故答案为 24.

15.[39,55] 【解析】$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BF})=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BE})=|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2-9$. 当点 P 位于点 A 或点 C 时，$|\overrightarrow{PB}|$ 取最大值 8. 当点 P 为于 AC 的中点时，$|\overrightarrow{PB}|$ 取最小值，即 $|\overrightarrow{PB}|_{\min}=8\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，$\therefore|\overrightarrow{PB}|$ 的取值范围为 $[4\sqrt{3},8]$，$\therefore\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的取值范围为 $[39,55]$.

16. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 【解析】直线 l 与椭圆 C 联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ x+y-1=0,\end{cases}$ 得 $3x^2-4x-2=0$，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4}{3}$，$x_1x_2=-\dfrac{2}{3}$.

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}\right]}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$，由椭圆 C 知点 $P(2,0)$，故点 P 到直线 $l:x+y-1=0$ 的距离：$d=\dfrac{|2+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\triangle ABP$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，故答案为 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

17.解：(1)由 $\sqrt{3}a\cos C+a\sin C=\sqrt{3}b$ 可得 $\sqrt{3}\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin B$， ………… 2 分

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore\sqrt{3}\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$， ………… 4 分

$\therefore\sin A\sin C=\sqrt{3}\cos A\sin C$，

$\because\sin C\neq0$，$\therefore\tan A=\sqrt{3}$，而 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2) $\because bc=\dfrac{1}{3}$，$b+c-\sqrt{2}a=0$，

$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\dfrac{2a^2-\dfrac{2}{3}-a^2}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}$，整理得 $a^2=1$，

$\therefore a=1$. ………… 10 分

由正弦定理可得 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 12 分

18.解：(1) 由表中数据计算得，$\bar{x}=25$， ………… 1 分

$\bar{y}=382$, ………………………………………………………………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=1\,438$, ………………………………………………………………………… 4 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=244$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=5.893$, ……………………………………………………………………………… 7 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=382-5.893\times25=234.675$. ……………………………………………………………………… 8 分

所以回归方程为$\hat{y}=5.893x+234.675$. ……………………………………………………………………… 9 分

(2) 将 $x=40$ kg 代入回归方程得$\hat{y}=5.893x+234.675$, ………………………………………………………… 10 分

故预测 $x=40$ kg 时，玉米产量为 $5.893\times40+234.675=470.395$ kg. ………………………………………… 12 分

19.(1)证明：∵三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，

∴$\triangle ABC$ 为正三角形，而 D 为 AB 的中点，

∴$CD\perp AB$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

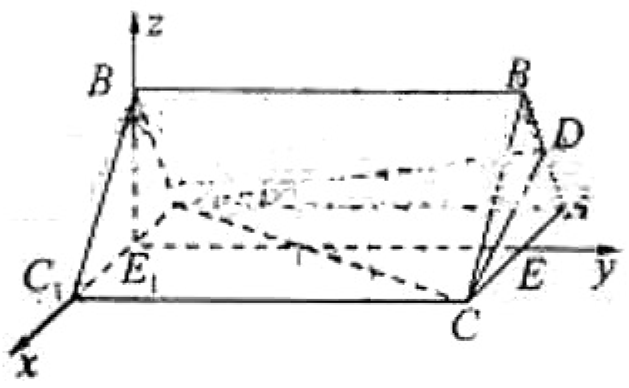
又平面 $ABB_1A_1\perp$平面 ABC，∴$CD\perp$平面 ABB_1A_1，且 $A_1D\subset$平面 ABB_1A_1，

∴$CD\perp A_1D$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

(2)解：设 A_1C_1、AC 的中点分别为 E_1、E，连接 E_1E、B_1E_1.

∵三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，∴A_1C_1、E_1E、B_1E_1 两两相互垂直，

于是以 E_1 为坐标原点，E_1C_1、E_1E、E_1B_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，…………………… 4 分



∴$A_1(-1,0,0)$，$A(-1,\sqrt{2},0)$，$C(1,\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$，$D\left(-\dfrac{1}{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

则$\overrightarrow{CA_1}=(-2,-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CA}=(-2,0,0)$. ………………………………………… 5 分

设平面 A_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=-2x-\sqrt{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{2}$，$z=\sqrt{3}$，于是 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{2},\sqrt{3})$. …………………………………………………… 7 分

又∵$E_1B_1\perp$平面 C_1CAA_1，∴平面 CAA_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

设二面角 $D-A_1C-A$ 的大小为 θ，经观察 θ 为锐角，则

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{1\times0+(-\sqrt{2})\times0+\sqrt{3}\times1}{1\times\sqrt{6}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

即二面角 $D-A_1C-A$ 的大小为$\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………………… 9 分

(3)解：∵$\overrightarrow{CA}=(-2,0,0)$，由(1)知平面 A_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{2},\sqrt{3})$，

设直线 CA 与平面 A_1CD 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2|}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

即直线 CA 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………………………… 12 分

22.解：(1)由直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+t\cos\varphi, \\ y=1+t\sin\varphi, \end{cases}$

$\because \varphi=\frac{\pi}{4}$，$\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$ ………………………………………………………… 1 分

$\therefore$ 直线 l 的普通方程为 $y-1=x+1$，………………………………………………………… 2 分

即 $y=x+2$.来源：高三答案公众号 ………………………………………………………… 3 分

由 $\rho=4\cos\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，………………………………………………………… 4 分

因为 $x=\rho\cos\theta$，$x^2+y^2=\rho^2$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$. ………………………………………………………… 5 分

(2)若 $\varphi=0$，由 $\frac{y-1}{x+1}=\tan\varphi$ 可知直线 l 的方程为 $y=1$，于是过点 $P(0,-3)$ 向直线 l 作垂线，垂足为 $Q(0,1)$. ………… 6 分

若 $\varphi\neq0$，由直线 l 的参数方程可知直线 l 的斜率为 $\tan\varphi$，

$\therefore$ 过点 $P(0,-3)$ 且与直线 l 垂直的直线方程为 $y=-\frac{1}{\tan\varphi}x-3$. ………………………………………… 7 分

联立方程组 $\begin{cases} y=\tan\varphi\cdot(x+1)+1, \\ y=-\frac{1}{\tan\varphi}x-3, \end{cases}$ 整理得 $y^2+2y-3=-x^2-x$，

$\therefore$ 点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2+x+2y-3=0$，………………………………………………………… 9 分

即 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{17}{4}$，显然，点 $(0,1)$ 也在 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{17}{4}$ 上，

所以动点 Q 的轨迹为以点 $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{17}}{2}$ 为半径的圆. ………………………………………… 10 分

23.解：(1)$\because f(x)+|x-3|=|x+3|+|x-3|$，$\therefore$ 解不等式 $|x+3|+|x-3|>8$，

而 $|x+3|+|x-3|=\begin{cases} -2x, x\leqslant-3, \\ 6, -3<x\leqslant3, \\ 2x, x>3, \end{cases}$ ………………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant-3$ 时，$-2x>8$，解得 $x<-4$；………………………………………………………… 3

当 $x>3$ 时，$2x>8$，解得 $x>4$，………………………………………………………… 4

$\therefore$ 不等式 $f(x)+|x-3|>8$ 的解集为 $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$. ……………………………………… 5

(2)由 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$ 可得 $m\geqslant\frac{|x+3|}{|x-3|+|x+9|}$. ………………………………………… 6

$\because |x-3|+|x+9|\geqslant2|x+3|$，当且仅当 $(x-3)(x+9)\geqslant0$，即 $x\leqslant-9$ 或 $x\geqslant3$ 时，等号成立. ……………

$\therefore \frac{|x+3|}{|x-3|+|x+9|}\leqslant\frac{1}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，…………………………………………

故要使 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，只须 $m\geqslant\frac{1}{2}$，

即实数 m 的最小值为 $\frac{1}{2}$. ……………………………………………………

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。