2023 北京怀柔高二（上）期末

数　　学

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 若直线的倾斜角为 60°，则直线的斜率为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. 若直线 $2x+y-1=0$ 与直线 $x-my=0$ 垂直，则 $m=$（　　）

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知抛物线 $C:x^2=4y$，则焦点坐标为（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{16},0\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{16}\right)$　　C. $(1,0)$　　D. $(0,1)$

4. 若点 $A(1,2,3)$，点 $B(4,-1,0)$，且 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$，则点 C 的坐标为（　　）

A $(3,0,1)$　　B. $(2,1,2)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

5. 若圆 $O_1:x^2+y^2=r^2$ 与圆 $O_2:(x-2)^2+y^2=9$ 相内切，则 r 为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 5　　D. 1 或 5

6. 将单位圆 $x^2+y^2=1$ 上所有点的横坐标变为原来的 3 倍，再将纵坐标变为原来的 2 倍，得到的曲线方程为（　　）

A $9x^2+4y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{9}+4y^2=1$

C. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　D. $9x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 已知双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率是 2，则其渐近线的方程为（　　）

A. $x\pm\sqrt{3}y=0$　　B. $\sqrt{3}x\pm y=0$

C. $x\pm 3y=0$　　D. $3x\pm y=0$

8. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{2}$，$AA_1=1$，则直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C 内直线

所成的角中最小角为（　　）

A. 30°　　　　B. 45°　　　　C. 60°　　　　D. 90°

9. 在平面内，A、B是两个不同的定点，C是动点，若$\dfrac{|AC|}{|BC|}=2$，则点C的轨迹为（　　）

A. 圆　　　　B. 椭圆　　　　C. 双曲线　　　　D. 抛物线

10. 从 7 个人中选 4 人负责元旦三天假期的值班工作，其中第一天安排 2 人，第二天和第三天均安排 1 人，且人员不重复，则不同安排方式的种数可表示为（　　）

A　$C_7^4A_3^3$　　　　B. $C_7^1A_6^3$　　　　C. $C_7^2C_5^2$　　　　D. $C_7^2A_5^2$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

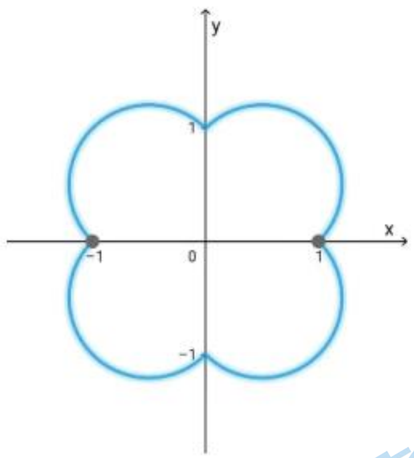
11. 圆$x^2+y^2-2x=0$的圆心为________，半径为________.

12. 过点 $-1,2$ 且与直线$l:x+y+1=0$平行的直线方程为__________.

13. 在$(2x-1)^5$ 展开式中，x的系数为____________.

14. 设双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的左右焦点分别是F_1，F_2，点P在双曲线上，则$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=$_________；若$\angle F_1PF_2$为直角，则点P的纵坐标的是____________.

15. 数学中有许多美丽的曲线，它蕴藏于特有的抽象概念，公式符号，推理论证，思维方法等之中，揭示了规律性，是一种科学的真实美.如曲线$C:x^2+y^2=|x|+|y|$，（如图所示），给出下列三个结论



①曲线C关于直线$y=x$对称;

②曲线C上任意一点到原点的距离都小于$\sqrt{2}$；

③曲线C围成的图形的面积是$2+\pi$.

其中，正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在平面直角坐标系中，已知圆M的圆心在直线$y=-2x$上，且与直线$x+y-1=0$相切于点$P(2,-1)$.

（1）求圆 M 的方程；

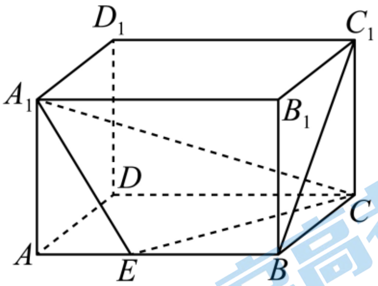
（2）若定点 $A(3,0)$，点 B 在圆上，求 $|AB|$ 的最小值.

17. 已知抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$.

（1）求 p 的值；

（2）过点 F　直线 l 与抛物线 C 交于 A， B 两个不同点，若 AB 的中点为 $M(3,-2)$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

18. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=3$， $AD=AA_1=2$，点 E 在 AB 上，且 $AE=1$.

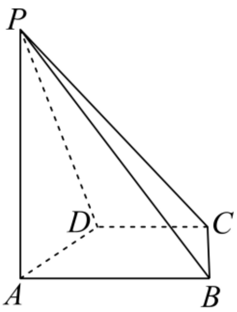


（1）求直线 BC_1 与 A_1C 所成角的大小；

（2）求 BC_1 与平面 A_1EC 所成角的正弦值.

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle DAB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

$PA\perp AD$， $AB=3$， $CD=AD=2$， $PA=2\sqrt{3}$.



（1）求证：$CD//$ 平面 PAB；

（2）求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的大小.

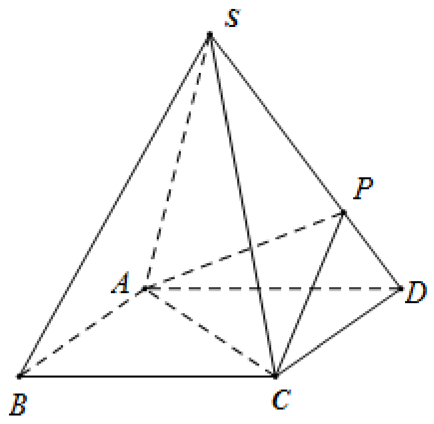
20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2，且 $|F_1F_2|=4$，且 $a=\sqrt{2}b$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A， B 两个不同的点，求证： x 轴上存在定点 P，使得直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零.

21.

如图，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面是正方形，每条侧棱的长都是底面边长的 $\sqrt{2}$ 倍，P 为侧棱 SD 上的点.



（I）求证：$AC \perp SD$；

（II）若 $SD \perp$ 平面 PAC，求二面角 $P\text{-}AC\text{-}D$ 的大小；

（III）在（II）的条件下，侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE /\!/$ 平面 PAC.若存在，求 $SE：EC$ 的值；若不存在，试说明理由.

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】A

【解析】

【详解】因为直线的倾斜角为$60°$，所以直线的斜率$k=\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}$，故选 A.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】利用两直线垂直，斜率相乘为-1，列出方程求解即可.

【详解】$\because$直线$2x+y-1=0$与直线$x-my=0$垂直，

$\therefore -2\times\frac{1}{m}=-1(m\neq 0)$

$\therefore m=2$

故选：C

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据抛物线的方程直接求出焦点即可.

【详解】由抛物线$C:x^2=4y$可得其焦点在y轴上，其焦点坐标为$(0,1)$.

故选:D.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】设$C(x,y,z)$，根据$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$列方程组即可求解.

【详解】设$C(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AC}=(x-1,y-2,z-3)$,$\overrightarrow{CB}=(4-x,-1-y,-z)$，

因为$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$，所以$\begin{cases}x-1=2(4-x)\\y-2=2(-1-y)\\z-3=2(-z)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\y=0\\z=1\end{cases}$.

故点C的坐标为$(3,0,1)$.

故选:A.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根究两圆内切满足的圆心距和半径差的关系即可求解.

【详解】圆 $O_1: x^2+y^2=r^2$ 的圆心和半径为 $O_1(0,0), r$ ，圆 $O_2: (x-2)^2+y^2=9$ 的圆心和半径为 $O_2(2,0), R=3$,由两圆内切，所以 $|O_1O_2|=|R-r| \Rightarrow 2=|3-r| \Rightarrow r=1$ 或 $r=5$，

故选：D

6. 【答案】C

【解析】

【分析】由题意可知：单位圆 $x^2+y^2=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$，将其整理代入圆的方程即可求解.

【详解】设得到曲线上任意一点 (x',y')，由题意可知：单位圆 $x^2+y^2=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$，整理可得：$\begin{cases} x=\dfrac{x'}{3} \\ y=\dfrac{y'}{2} \end{cases}$，又 (x,y) 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上，

所以 $(\frac{x'}{3})^2+(\frac{y'}{2})^2=1$，整理变形可得：$\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$，

所以单位圆 $x^2+y^2=1$ 上所有点的横坐标变为原来的 3 倍，再将纵坐标变为原来的 2 倍，得到的曲线方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

故选：C.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据双曲线的离心率求出 b 的值，进而可得答案.

【详解】由双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 可得 $a=1, c=\sqrt{1+b^2}$,

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{1}=2 \Rightarrow b=\sqrt{3}$，

所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{1}x=\pm\sqrt{3}x$，

即 $\sqrt{3}x \pm y=0$.

故选：B

8. 【答案】B

【解析】

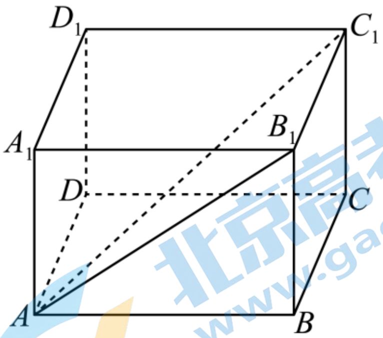
【分析】设 l 是平面 BB_1C_1C 内任一直线，$\vec{n}$ 是 l 的一个方向向量.

当 $l//BC$ 或 l 与 BC 重合时，$\angle B_1C_1A$ 即等于线线角，在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中，求出即可；当 l 与 BC 不平行且

不重合时．设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$，则 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 可以作为空间向量的一个基底.则 $\overrightarrow{AC_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，根据平面向量基本定理以及共线向量可得到 l 的一个方向向量 $\overrightarrow{n_1}=m\vec{b}+\vec{c}$.设线线角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{n_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{2m+1}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2+1}}\right|$.令 $t=\left(\dfrac{2m+1}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2+1}}\right)^2$，用判别式法求出 $0\le t\le\dfrac{1}{2}$，即可得到 $0\le\cos\theta\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而求出结果.

【详解】如图，连接 AB_1 .



设 l 是平面 BB_1C_1C 内任一直线，$\vec{n}$ 是 l 的一个方向向量.

①当 $l//BC$ 或 l 与 BC 重合时，$\angle B_1C_1A$ 即等于直线 AC_1 和 l 所成的角.

又 $B_1C_1\perp AB_1$，$B_1C_1=\sqrt{2}$，$AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1{}^2}=2$，

则在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中，$\tan\angle B_1C_1A=\dfrac{AB_1}{B_1C_1}=\sqrt{2}$；

②当 l 与 BC 不平行且不重合时.

设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$，则 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 可以作为空间向量的一个基底，

且 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，$\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直，

则 $\overrightarrow{AC_1}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，且 $\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=\sqrt{6}$.

根据平面向量基本定理，可知 $\exists\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，$\vec{n}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，显然 $\mu\ne0$，

则 $\vec{n}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$ 与向量 $\overrightarrow{n_1}=\dfrac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$ 共线，

所以 $\overrightarrow{n_1}=\dfrac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$ 也是 l 的一个方向向量.

设 $m=\dfrac{\lambda}{\mu}$，则 $\overrightarrow{n_1}=m\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=m\vec{b}+\vec{c}$.

设直线 AC_1 和 l 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{n_1}\right\rangle\right|$.

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_1}=\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(m\vec{b}+\vec{c}\right)=m\vec{b}^2+\vec{c}^2=2m+1$，$\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=\sqrt{6}$，

$\left|\overrightarrow{n_1}\right|^2=\left(m\vec{b}+\vec{c}\right)^2=m^2\vec{b}^2+\vec{c}^2=2m^2+1$，所以$\left|\overrightarrow{n_1}\right|=\sqrt{2m^2+1}$，

则$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{n_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_1}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}\right|=\left|\dfrac{2m+1}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2+1}}\right|$.

令$t=\left(\dfrac{2m+1}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2+1}}\right)^2=\dfrac{4m^2+4m+1}{12m^2+6}$，整理可得$(12t-4)m^2-4m+6t-1=0$，

该方程有解，即$\Delta=(-4)^2-4(12t-4)(6t-1)=-144\left(2t^2-t\right)\geq 0$，

解得$0\leq t\leq\dfrac{1}{2}$，即$0\leq\left(\dfrac{2m+1}{\sqrt{6}\sqrt{2m^2+1}}\right)^2\leq\dfrac{1}{2}$，即$0\leq\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{n_1}\right\rangle\right|\leq\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$0\leq\cos\theta\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\theta\in\left[0^\circ,90^\circ\right]$，$\cos\theta$在$\left[0^\circ,90^\circ\right]$上单调递减，

所以当$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\theta$取最小值为$45^\circ$.

又$\tan\angle B_1C_1A=\sqrt{2}>1$，即$\angle B_1C_1A>45^\circ$.

综上所述，直线AC_1与平面BB_1C_1C内直线所成　角中最小角为45°.

故选：B.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】建系设出A、B、C的坐标，利用已知条件，转化求解C的轨迹方程，推出结果即可.

【详解】在平面内，A，B是两个定点，C是动点，以$\overrightarrow{AB}$方向为x正方向，线段AB的中点为原点，

建立平面直角坐标系，设$|AB|=2a$，

则$A(-a,0)$，$B(a,0)$，设点C的坐标为(x,y)，

所以$\overrightarrow{AC}=(x+a,y)$，$\overrightarrow{BC}=(x-a,y)$

因为$\dfrac{|AC|}{|BC|}=2$，即$\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=2$，

所以$(x+a)^2+y^2=4(x-a)^2+4y^2$，即$3x^2+3y^2-10ax+3a^2=0$，

化简得$\left(x-\dfrac{5}{3}a\right)^2+y^2=\dfrac{16a^2}{9}$，

所以点C的轨迹为圆.

故选：A.

10. 【答案】D

【解析】

【分析】用分步计数原理.先选出 2 人安排在第一天，再选出 2 人安排在后两天，将结果乘起来即可.

【详解】用分步计数原理.

第一步，从 7 个人中选 2 人的负责值班第一天，不同安排方式的种数C_7^2；

第二步，剩余 5 人选取 2 人安排在第二天和第三天，不同安排方式的种数A_5^2.

所以，不同安排方式的种数可表示为$C_7^2A_5^2$.

故选：D.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】　①. $(1,0)$　②. 1

【解析】

【分析】先对圆的一般方程进行配方转化为标准方程，从而得到圆心的坐标与半径.

【详解】因为圆$x^2+y^2-2x=0$可化为$(x-1)^2+y^2=1$，

所以所求圆心为$(1,0)$，半径为1.

故答案为：$(1,0)$；1.

12. 【答案】$x+y-1=0$

【解析】

【分析】根据平行直线系设直线方程为$x+y+c=0,(c\neq 1)$，代入 $-1,2$ 即可求解.

【详解】设与与直线$l:x+y+1=0$平行的直线方程为$x+y+c=0,(c\neq 1)$，将点 $-1,2$ 代入得$c=-1$，

所以所求方程为$x+y-1=0$，

故答案　：$x+y-1=0$

13. 【答案】10

【解析】

【分析】写出$(2x-1)^5$展开式的通项为$T_{r+1}=(-1)^r\times 2^{5-r}\cdot C_5^r\cdot x^{5-r}$，令$5-r=1$，解出$r$代入即可得到结果.

【详解】$(2x-1)^5$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x)^{5-r}\times(-1)^r=(-1)^r\times 2^{5-r}\cdot C_5^r\cdot x^{5-r}$，$r=0,1,2,3,4,5$.

令$5-r=1$，可得$r=4$.

所以，x的系数为$(-1)^4\times 2^{5-4}\cdot C_5^4=10$.

故答案为：10.

14. 【答案】 ①. $2\sqrt{3}$ ②. $\pm\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据双曲线的方程及定义可求出$||PF_1|-|PF_2||$，设$P(x_0,y_0)$，再利用向量数量积为零求解即可.

【详解】由$\frac{x^2}{3}-y^2=1$可知$a=\sqrt{3},c=2$，

故$||PF_1|-|PF_2||=2a=2\sqrt{3}$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

设$P(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{F_1P}=(x_0+2,y_0),\overrightarrow{F_2P}=(x_0-2,y_0)$，

因为$\angle F_1PF_2$为直角，

所以$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=x_0{}^2-4+y_0{}^2=0$，

因为$\frac{x_0{}^2}{3}-y_0{}^2=1$，

所以$3y_0{}^2+3-4+y_0{}^2=4y_0{}^2-1=0$，

解得$y_0=-\frac{1}{2}$或$y_0=\frac{1}{2}$

故答案为：$2\sqrt{3}$；$\pm\frac{1}{2}$.

15. 【答案】①③

【解析】

【分析】根据点的对称性可判断①，由曲线方程知曲线关于原点，x，y轴对称，当$x\geq 0$，$y\geq 0$时，可得$x^2+y^2-x-y=0$，可得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以可得曲线为$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为圆心，$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的半圆，由此可作出曲线$C$的图象，从而通过运算可判断命题②③的真假.

【详解】设点$A(x,y)$在曲线C上，则$x^2+y^2=|x|+|y|$，$A(x,y)$关于直线$y=x$对称的点$A'(y,x)$，将$A'(y,x)$代入曲线C中得$y^2+x^2=|y|+|x|$，因此$A'(y,x)$在曲线C上，故①正确，

曲线$C:x^2+y^2=|x|+|y|$可知曲线C关于原点，x，y轴对称，

当$x\geq 0$，$y\geq 0$时，可得$x^2+y^2-x-y=0$，可得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以可得曲线为$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为圆心，$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的半圆，曲线上任意点到原点的距离的最大值为$|OC|+r=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，曲线$C$上任意一点到原点的距离都小于或等于$\sqrt{2}$，故命题②错误；

根据对称性可知曲线C围成的图形的面积为 4 个半圆的面积加上边长为$\sqrt{2}$的正方形的面积，即

$\sqrt{2}\times\sqrt{2}+4\times\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2+\pi$，故命题③正确；

故答案为：①③

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】（1）$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

（2）$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法设得圆 M $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，再根据题意得到关于 a,b 的方程，进而求得 r，由此得到圆 M 的方程；

（2）利用定点到圆上动点的最小距离的求法求解即可.

【小问 1 详解】

设圆 M 为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则 $M(a,b)$，半径为 r，

因为圆心 $M(a,b)$ 在直线 $y=-2x$ 上，所以 $b=-2a$，

因为直线 $x+y-1=0$ 与圆 M 相切于点 $P(2,-1)$，所以直线 $x+y-1=0$ 与直线 PM 垂直，

所以 $k_{PM}=1$，即 $\frac{b+1}{a-2}=1$，则 $\frac{-2a+1}{a-2}=1$，解得 $a=1$，则 $b=-2$，

所以 $r=|PM|=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$，

故圆 M 为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

【小问 2 详解】

因为 $(3-1)^2+(0+2)^2>2$，所以点 $A(3,0)$ 在圆 M 外，

因为 $|AM|=\sqrt{(3-1)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $|AB|_{\min}=|AM|-r=\sqrt{2}$，即 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

17. 【答案】（1）2；　　（2）$2\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】（1）解 $\frac{p}{2}=1$，即可得出答案；

（2）点差法求出直线 AB 的斜率，得到直线 l 的方程，根据抛物线的定义求出 $|AB|=8$，根据点到直线的距离公式求出点 O 到直线 l 的距离 d，即可求出面积.

【小问 1 详解】

由已知可得，$\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$.

【小问 2 详解】

由（1）知，抛物线的方程为 $y^2=4x$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，显然 $x_1\neq x_2$，

两式作差可得，$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$，即 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$.

因为 AB 的中点为 $M(3,-2)$，所以 $y_1+y_2=-4$，则 $y_1-y_2=-(x_1-x_2)$，

即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以直线 l 斜率为 -1，此时直线方程为 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

联立 l 与抛物线的方程 $\begin{cases}x+y-1=0\\y^2=4x\end{cases}$ 可得，$y^2+4y-4=0$，

$\Delta=4^2-4\times(-4)=32>0$，直线与抛物线有两个交点，满足

所以，直线 l 方程为 $x+y-1=0$.

又 $x_1+x_2=6$，根据抛物线的定义可知 $|AB|=x_1+x_2+p=8$.

点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

18. 【答案】（1）90°

（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【解析】

【分析】（1）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，利用空间向量的数量积求解直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值即可.

（2）求出平面 A_1EC 的法向量，利用平面法向量与直线方向向量的夹角即可求解线面角

【小问 1 详解】

以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A_1(2,0,2),C(0,3,0),B(2,3,0),C_1(0,3,2),E(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-2,3,-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$. 所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1C}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{4-4}{\sqrt{8}\times\sqrt{17}}=0$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BC_1}$，故直线 A_1C 与 BC_1 所成角为 90° .

【小问 2 详解】

因为 $\overrightarrow{EC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2)$，

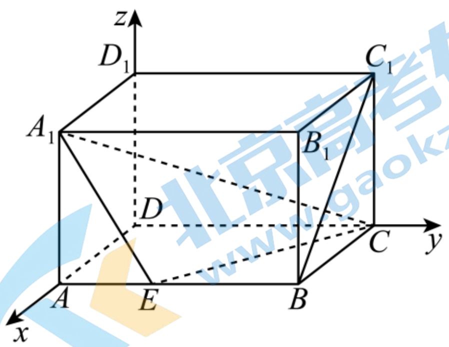
设平面 A_1EC 的法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-2z=0,\\ -2x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=2$， $z=1$,于是 $\vec{m}=(2,2,1)$，

设 BC_1 与平面 A_1EC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\vec{m}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{|-4+0+2|}{2\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

所以 BC_1 与平面 A_1EC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$



19. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\dfrac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】(1) 由题意可得 $AB//CD$，然后根据线面平行的判定定理即可得到结果;

(2) 以点 A 为坐标原点，分别以 AB,AD,AP 为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系，结合法向量即可求得二面角的大小.

【小问 1 详解】

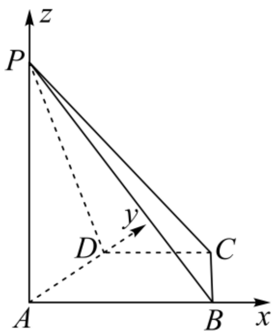
因为在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\angle DAB=\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $AB//CD$，

因为 $AB\subset$ 平面 PAB， $CD\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CD//$ 平面 PAB

【小问 2 详解】



因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

又因　$PA\perp AD$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

以点 A 为坐标原点，分别以 AB,AD,AP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0),P\left(0,0,2\sqrt{3}\right),B(3,0,0),D(0,2,0),C(2,2,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x=0\\ 2y-2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{3}z\end{cases}$，令 $z=1$，则 $y=\sqrt{3}$

所以 $\vec{n}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$

又因为 $AD\perp$ 平面 PAB，平面 PAB 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$

设平面 PAB 与平面 PCD 所成角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

显然二面角为锐角，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

所以平面 PAB 与平面 PCD 所成角　$\dfrac{\pi}{6}$.

20. 【答案】(1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出椭圆 C 的方程；(2) 对直线 l 的斜率是否存在，进行分类讨论：当直线 l 的斜率存在时，设直线 l：$y=k(x+2)$.设 x 轴上存在定点 $P(t,0)$，利用“设而不求法”表示出 $k_{PA}+k_{PB}=0$，求出 $P(-4,0)$；再由对称性判断出直线 l 的斜率不存在时符合题意.

【小问 1 详解】

由题意可得：$\begin{cases}2c=4\\a^2=b^2+c^2\\a=\sqrt{2}b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}c=2\\a^2=8\\b=2\end{cases}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

【小问 2 详解】

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

当直线 l 的斜率存在时，设为 k，则直线 l：$y=k(x+2)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\y=k(x+2)\end{cases}$，消去 y 可得：$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-8=0$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{8k^2-8}{1+2k^2}$.

设 x 轴上存在定点 $P(t,0)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-0}{x_1-t}$，$k_{PB}=\frac{y_2-0}{x_2-t}$.

因为 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-0}{x_1-t}+\frac{y_2-0}{x_2-t}=0$，所以 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1\times(x_2-t)+y_2(x_1-t)}{(x_1-t)(x_2-t)}=0$，

所以 $y_1\times(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，即 $k(x_1+2)\times(x_2-t)+k(x_2+2)(x_1-t)=0$，

整理得：$2x_1x_2+(2-t)(x_1+x_2)-4t=0$，

所以 $2\times\frac{8k^2-8}{1+2k^2}+(2-t)\left(-\frac{8k^2}{1+2k^2}\right)-4t=0$，

所以 $16k^2-16-16k^2+8tk^2-4t-8tk^2=0$，解得：$t=-4$.

即 $P(-4,0)$.

当直线 l 的斜率不存在时，由对称性可知：A，B 关于 x 轴对称，由 $P(-4,0)$，可知直线 PA 与直线 PB 关于 x 轴对称，所以直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零.符合题意.

综上所述：x 轴上存在定点 $P(-4,0)$，使得直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为零.

21. 【答案】(I) 见解析 (II) 30°；(III) 2:1.

【解析】

【分析】(I) 连 BD，设 AC 交于 BD 于 O，由题意知 SO⊥平面 ABCD．以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立坐标系 O-xyz，设底面边长为 a，求出高 SO，从而得到点 S 与点 C 和 D 的坐标，求出向量 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{SD}$，计算它们的数量积，从而证明出 OC⊥SD，则 AC⊥SD；(II) 根据题意先求出平面 PAC 的一个法向量 $\overrightarrow{DS}$ 和平面 DAC 的一个法向量 $\overrightarrow{OS}$，设所求二面角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{DS}}{|\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{DS}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

从而求出二面角的大小；（III）在棱 SC 上存在一点 E 使 BE∥平面 PAC，根据（II）知 $\overrightarrow{DS}$ 是平面 PAC 的一个法向量，设 $\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CS}$，求出 $\overrightarrow{BE}$，根据 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DS}=0$ 可求出 t 的值，从而即当 SE：EC=2：1 时，$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{DS}$，而 BE 不在平面 PAC 内，故 BE∥平面 PAC

【详解】(I) 证明：连 BD，设 AC 交 BD 于 O，由题意 SO⊥AC．在正方形 ABCD 中，AC⊥BD，所以 AC⊥平面 SBD，得 AC⊥SD

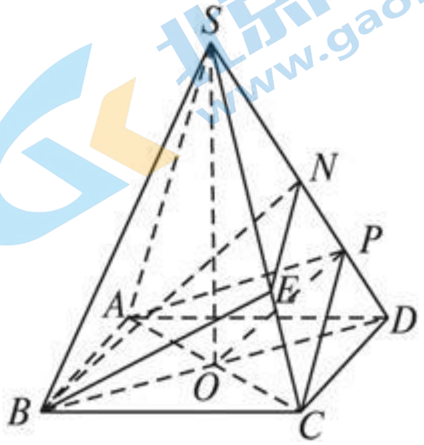
（II）设正方形边长 a，则 $SD=\sqrt{2}a$．

又 $OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，所以∠SDO＝60°．

连 OP，由（I）知 AC⊥平面 SBD，所以 AC⊥OP，且 AC⊥OD．所以∠POD 是二面角 P－AC－D 的平面角．

由 SD⊥平面 PAC，知 SD⊥OP，所以∠POD＝30°，

即二面角 P－AC－D 的大小为 30°



（III）在棱 SC 上存在一点 E，使 BE∥平面 PAC．

由（II）可得 $PD=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，故可在 SP 上取一点 N，使 PN＝PD．过 N 作 PC 的平行线与 SC 的交点即为 E．连 BN，在△BDN 中知 BN∥PO．

又由于 NE∥PC，故平面 BEN∥平面 PAC，得 BE∥平面 PAC．

由于 SN∶NP＝2∶1，故 SE∶EC＝2∶1

考点：1．直线与平面垂直的判定；2．二面角求解；3．线面平行的判定

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。