北京二中 2021-2022 学年度高三年级下学期开学考试试卷

（2022 年 2 月）

线 姓名 封 学号 班级 密

一. 选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．设集合 $A=\{x\mid x^2+4x<0\}$，集合 $B=\{n\mid n=2k-1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{-3,-1,1,3\}$　　D．$\{-3,-1\}$

2. 已知 $\dfrac{2}{1+ai}=1-\mathrm{i}\ (a\in\mathbf{R})$，则 $a=$

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. -2

3.袋中有大小完全相同的 2 个红球和 2 个黑球，不放回地依次摸出两球，设“第一次摸得黑球”为事件 A，“摸得的两球不同色”为事件 B，则概率 $P(B\mid A)$ 为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

4．在 $(x-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中，x^3 的系数为

A．-20　　B．20　　C．-10　　D．10

5．“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献．十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$．若第一个单音的频率为 f，则所有单音的频率之和为

A．$\dfrac{f(1-\sqrt[3]{2^2})}{1-\sqrt[12]{2}}$　　B. $\dfrac{f(1-\sqrt[12]{2^{11}})}{1-\sqrt[12]{2}}$　　C. $\dfrac{-f}{1-\sqrt[12]{2}}$　　D. $\dfrac{f(1-\sqrt[12]{2^{13}})}{1-\sqrt[12]{2}}$

6.从数字1,2,3,4,5中，取出3个数字(允许重复)，组成三位数，各位数字之和等于 6，这样的三位数的个数为

A．13　　B．10　　C．9　　D．7

7．要得到函数 $y=\sqrt{2}\cos x$ 的图象，只需将函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点的

A.横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

B.横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

C.横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动$\frac{\pi}{4}$个单位长度

D.横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动$\frac{\pi}{8}$个单位长度

8. 在四边形 $ABCD$ 中，“$\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

9.已知函数 $f(x)=\sin x-|\cos x|$，则下列结论正确的个数是

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　　　② $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

③ $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增　　　　④函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称

A. 1　　　　B.2　　　　C.3　　　　D.4

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, x<0,\\ \log_a(x+1)+1, x\geq 0\end{cases}$（$a>0$,且 $a\neq 1$）在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且函数 $g(x)=|f(x)|+x-2$ 恰好有两个零点，则 a 的取值范围是

A. $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup\{\frac{3}{4}\}$　　　　B. $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup\{\frac{3}{4}\}$

C. $(0,\frac{2}{3}]$　　　　D. $[\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每题 5 分，共 25 分）

11. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一个焦点为 $F(2,0)$，则 $a=$________，双曲线 C 的渐近线方程是________.

12. 在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=2$，D 为 AB 的中点，P 是线段 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 的最小值是________.

13. 已知直线 $x-y+m=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ 相交，能说明“直线 $x-y+m=0$ 截圆 $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ 所得弦长不小于 $2\sqrt{3}$”是假命题的一个 m 的值为________.

14. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，又点 $A(-1,0)$，则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值是________.

15．在平面直角坐标系中，动点 $P(x,y)$ 到两条坐标轴的距离之和等于它到点 $(1,1)$ 的距离，记点 P 的轨迹为曲线 W．

（Ⅰ）给出下列三个结论：

①曲线 W 关于原点对称；

②曲线 W 关于直线 $y=x$ 对称；

③曲线 W 与 x 轴非负半轴，y 轴非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$；

其中，所有正确结论的序号是______________；

（Ⅱ）曲线 W 上的点到原点距离的最小值为______________．

三. 解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16．（本小题满分 13 分）

在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $a=1$，$2\cos C+c=2b$．

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一确定，求 ΔABC 的面积．

条件①：ΔABC 的周长为 $\sqrt{3}+1$；

条件②：$b=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

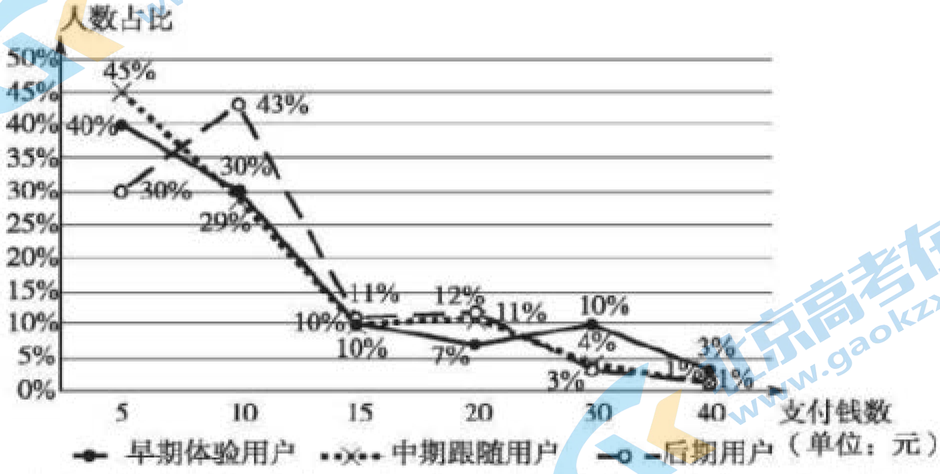
条件③：$B=\frac{\pi}{4}$．

17.（本小题满分 14 分）

2019 年 6 月，国内的 5G 运营牌照开始发放. 从 2G 到 5G，我们国家的移动通信业务用了不到 20 年的时间，完成了技术上的飞跃，跻身世界先进水平. 为了解高校学生对 5G 的消费意愿，2019 年 8 月，从某地在校大学生中随机抽取了 1000 人进行调查，样本中各类用户分布情况如下：

用户分类	预计升级到 5G 的时段	人数
早期体验用户	2019 年 8 月至 2019 年 12 月	270 人
中期跟随用户	2020 年 1 月至 2021 年 12 月	530 人
后期用户	2022 年 1 月及以后	200 人

我们将大学生升级 5G 时间的早晚与大学生愿意为 5G 套餐支付更多的费用作比较，可得出下图的关系(例如早期体验用户中愿意为 5G 套餐多支付 5 元的人数占所有早期体验用户的 40%).



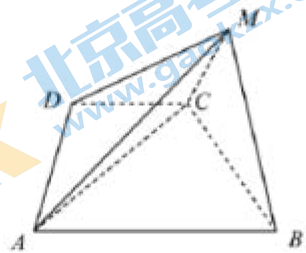
（I）从该地高校大学生中随机抽取 1 人，估计该学生愿意在 2021 年或 2021 年之前升级到 5G 的概率；

（II）从样本的早期体验用户和中期跟随用户中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中愿意为升级 5G 多支付 10 元或 10 元以上的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（III）2019 年底，从这 1000 人的样本中随机抽取 3 人，这三位学生都已签约 5G 套餐，能否认为样本中早期体验用户的人数有变化？说明理由.

18．（本小题满分 14 分）．

如图，在四棱锥 $M-ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle ADC=\angle BMC=90^\circ$，$MB=MC$，$AD=DC=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，平面 $BCM\perp$ 平面 $ABCD$．



（Ⅰ）求证：$CD\parallel$ 平面 ABM；

（Ⅱ）求证：$AC\perp$ 平面 BCM；

（Ⅲ）在棱 AM 上是否存在一点 E，使得二面角 $E-BC-M$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$？若存在，求出 $\frac{AE}{EM}$ 的值；若不存在，请说明理由．

19．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，若 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上的最小值为-2，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $0<a<8$，证明：对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-2$ 恒成立．

班级　学号　姓名　密　封　线

20．（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，$\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 M 是椭圆 C 上一点，且不与顶点重合，若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P，直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q．求证：$\triangle BPQ$ 为等腰三角形．

21．（本小题满分 15 分）

已知集合 $S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正整数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列$\}\ (n\geq 2)$，函数

$$g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

对于 $(a_1,a_2,\cdots a_n)\in S_n$，定义：$b_i=g(a_i-a_1)+g(a_i-a_2)+\cdots+g(a_i-a_{i-1}),\ i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$b_1=0$，称 b_i 为 a_i 的满意指数．排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的生成列；排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的母列．

（Ⅰ）当 $n=6$ 时，写出排列 $3,5,1,4,6,2$ 的生成列及排列 $0,-1,2,-3,4,3$ 的母列；

（Ⅱ）证明：若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 为 S_n 中两个不同排列，则它们的生成列也不同；

（Ⅲ）对于 S_n 中的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 τ：将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项，其它各项顺序不变，得到一个新的排列．证明：一定可以经过有限次变换 τ 将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 变换为各项满意指数均为非负数的排列．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。