2018 北京人大附中高三 2 月份内部特供卷

数　　学（文）（一）

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

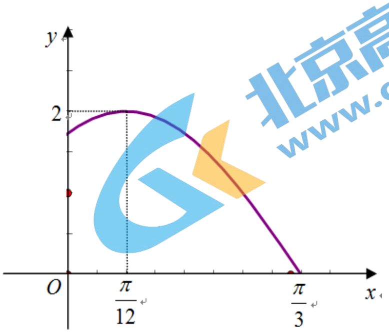
3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A．在区间 $\left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right]$ 上单调递减　　B．在区间 $\left[\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}\right]$ 上单调递增

C．在区间 $\left[\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}\right]$ 上单调递减　　D．在区间 $\left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right]$ 上单调递增

2．已知复数 $z_1=3+2\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，则 $z_1\cdot z_2$ 的虚部为（　　）

A．1　　B．$-\mathrm{i}$　　C．-1　　D．i

3．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4^x+a}{2^x}$ 是奇函数，则 $f\left(a\right)$ 的值为（　　）

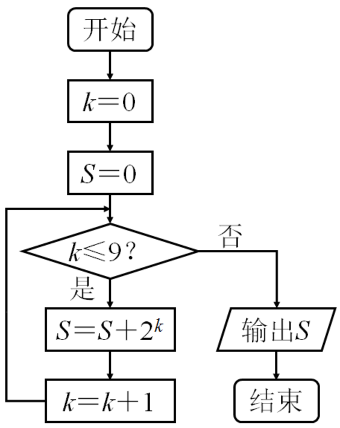
A．$-\dfrac{5}{2}$　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

4．计算 $\log_2 9\times\log_3 4+2\log_5 10+\log_5 0.25=$（　　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．6

5．执行如图所示的程序框图，输出 S，则 $\log_2(S+1)=$（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12



6. 对于平面 α 和直线 a，b，c，命题 p：若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$；命题 q：若 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，则 $a/\!/b$．则下列命题为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　B．$\neg p\vee q$　　C．$p\wedge\neg q$　　D．$\neg(p\vee q)$

7．已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-1\leqslant 0\\3x-y+1\geqslant 0\\x-y-1\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

8．设离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点与双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点重合，则椭圆方程为（　　）

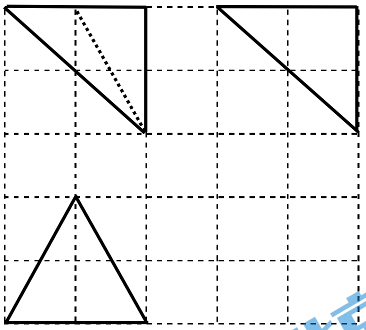
A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　B．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$　　　　C．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

9．已知集合$A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{1,2\}$　　　　B．$\{0,1,2\}$　　　　C．$\{-1,0,1\}$　　　　D．$\{0,1\}$

10．如图所示，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某三棱锥的三视图，则此几何体的体积为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．$\frac{2}{3}$



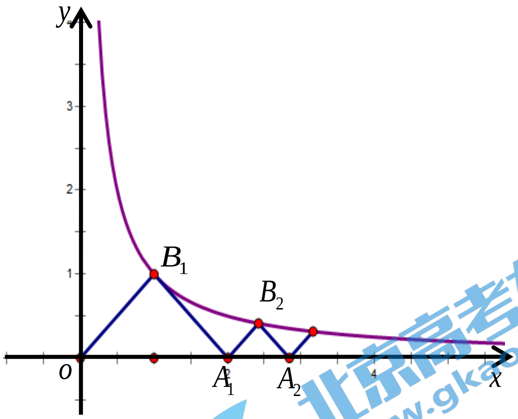
第 10 题图

11．已知球面上有 A、B、C 三点，且 $AB=AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，球心到平面 ABC 的距离为$\sqrt{3}$，则球的体积为（　　）

A．$\frac{4\pi}{3}$　　　　B．$\frac{32\pi}{3}$　　　　C．$\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$　　　　D．$\frac{64\pi}{3}$

12．如图所示，设曲线$y=\frac{1}{x}$上的点与x轴上的点顺次构成等腰直角三角形OB_1A_1，$A_1B_2A_2,\cdots$，直角顶点在曲线$y=\frac{1}{x}$上，A_n的横坐标为a_n，记$b_n=\frac{2}{a_n+a_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{b_n\}$的前 120 项之和为（　　）

A．10　　　　B．20　　　　C．100　　　　D．200



第 12 题图

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，满足$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=7$，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为________．

14．已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，则$\sin(\beta-\alpha)=$________．

15．在$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$内随机地取一个数 k，则事件“直线$y=kx+k$与圆$(x-1)^2+y^2=1$有公共点”发生的概率为________．

16．已知函数$g(x)$对任意的$x\in\mathbf{R}$，有$g(-x)+g(x)=x^2$．设函数$f(x)=g(x)-\dfrac{x^2}{2}$，且$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增．若$f(a)+f(a-2)\leqslant 0$，则实数a的取值范围为_____．

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

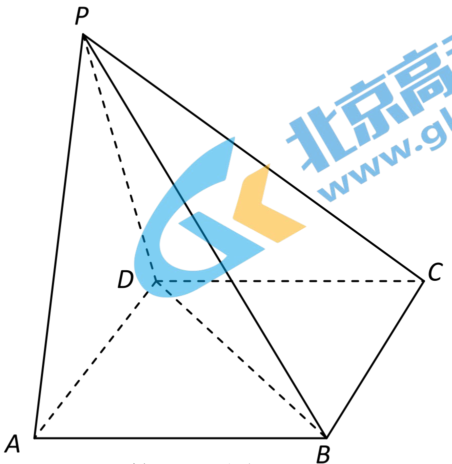
17．（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_3=7$，$S_9=99$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）若$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

18．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$PD\perp AC$．



第 18 题图

（Ⅰ）证明：直线$AC\perp$平面PBD；

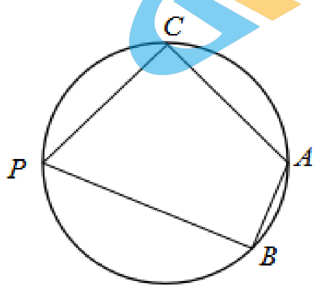
（Ⅱ）若$DP=DA=DB=1$，$PB=\sqrt{3}$，求四棱锥$P-ABCD$的体积．

19．（本小题满分 12 分）

六安市某棚户区改造，四边形$ABPC$为拟定拆迁的棚户区，测得$\angle BPC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AC=4$千米，$AB=2$千米，工程规划用地近似为图中四边形$ABPC$的外接圆内部区域．

（Ⅰ）求四边形$ABPC$的外接圆半径R；

（Ⅱ）求该棚户区即四边形$ABPC$的面积的最大值．



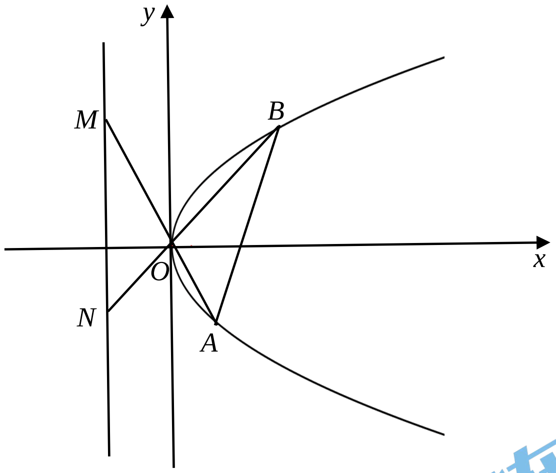
第 19 题图

20.（本小题满分 12 分）

已知经过抛物线$C: y^2=4x$的焦点F的直线l与抛物线C相交于两点$A\left(x_1, y_1\right)$，$B\left(x_2, y_2\right)$，直线AO，BO分别交直线$m: x=-1$于点M，N.

（Ⅰ）求证：$x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$；

（Ⅱ）求线段MN长的最小值.



第（20）题图

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=a(x-\frac{1}{x})-\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若$a=1$，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$P\left(1, f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

（Ⅱ）若对任意$x\geqslant 1$，都有$f(x)\geqslant 0$恒成立，求实数a的取值范围.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（选修 4-4：坐标系与参数方程）（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系中，以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线l的参数方程为$\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），曲线$C$的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$；

（Ⅰ）求直线l的直角坐标方程和曲线C的直角坐标方程；

（Ⅱ）若直线l与曲线C交点分别为A，B，点$P(1,0)$，求$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$的值.

23.（选修 4-5：不等式选讲）（本小题满分 10 分）

设函数$f\left(x\right)=\left|x-2\right|-\left|2x+1\right|$.

（Ⅰ）解不等式$f\left(x\right)\leqslant 0$；

（Ⅱ）$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x\right)-2m^2\leqslant 4m$恒成立，求实数$m$的取值范围.

数学试题答案

一、 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	D	B	C	B	D	B	A	B	A

二、填空题

13.【答案】 $\frac{\pi}{6}$

14.【答案】 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

15.【答案】 $\frac{1}{3}$

16.【答案】 $a\leqslant 1$

三、解答题

17.（本小题满分 12 分）

【答案】（Ⅰ）由题意得：$\begin{cases} a_1+2d=7 \\ 9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=99 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=3 \\ d=2 \end{cases}$，

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得：$b_n=\frac{2n+1}{2^n}$，

$$T_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\ldots+\frac{2n+1}{2^n} \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}} \qquad ②$$

①−②得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$，

故 $T_n=5-\frac{2n+5}{2^n}$．

18.（本小题满分 12 分）

【答案】（Ⅰ）连接 AC 交 BD 与 E，

$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\therefore AC\perp BD$，

而 $PD\perp AC$，$BD\subset$平面 PBD，$PD\subset$平面 PBD， $PD\cap BD=D$，

$\therefore$直线 $AC\perp$平面 PBD．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $AC\perp$平面 PBD，

易得 $V_{P-ABCD}=V_{A-PBD}+V_{C-PBD}=2V_{C-PBD}$，

在 $\triangle PBD$ 中， $BD=1$， $PD=1$， $PB=\sqrt{3}$，易得 $\angle PDB=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

而 $CE\perp$平面 PBD，所以 EC 即为 C 到平面 PBD 的高，

在菱形 $ABCD$ 中， $CE=AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故 $V_{C-PBD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBD}\cdot EC=\frac{1}{8}$，

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{4}$．

19.（本小题满分 12 分）

【答案】（Ⅰ）由题得：在$\triangle ABC$中，$AC=4$，$AB=2$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$

由余弦定理得：$BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{7}$，

由正弦定理得：$2R=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{4}{3}\sqrt{21}$，

所以$R=\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$BC=2\sqrt{7}$，

由余弦定理得：$BC^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC\cdot\cos\angle BPC$，

即$28+PB\cdot PC=PB^2+PC^2\geqslant 2PB\cdot PC$，

所以$PB\cdot PC\leqslant 28$（当且仅当$PB=PC$时等号成立），

而$S_{APBC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC+\frac{1}{2}PB\cdot PC\cdot\sin\angle BPC$，

故$S_{APBC}=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}PB\cdot PC\leqslant 9\sqrt{3}$.

答：四边形$ABPC$的面积的最大值为$9\sqrt{3}$.

20.（本小题满分 12 分）

【答案】（Ⅰ）易知$F(1,0)$，设$AB:x=\lambda y+1$，

则$\begin{cases}x=\lambda y+1\\ y^2=4x\end{cases}$得$y^2-4\lambda x-4=0$，

$\therefore y_1y_2=-4$，

$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$；

（Ⅱ）设$A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，所以$k_{AO}=\frac{4}{y_1}$，$k_{BO}=\frac{4}{y_2}$，

所以AO的方程是:$y=\frac{4}{y_1}x$，

由$\begin{cases}y=\frac{4}{y_1}x\\ x=-1\end{cases}$，$\therefore y_M=\frac{4}{-y_1}$，

同理由$\begin{cases}y=\frac{4}{y_2}x\\ x=-1\end{cases}$，$\therefore y_N=\frac{4}{-y_2}$

$\therefore|MN|=|y_M-y_N|=|\frac{4}{-y_1}-\frac{4}{-y_2}|=4|\frac{y_1-y_2}{y_1y_2}|$　　①，

且由（Ⅰ）知$y_1y_2=-4$，$y_1+y_2=4\lambda$，

$\therefore|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{\lambda^2+1}$，

代入①得到:$|MN|=|y_1-y_2|=4\sqrt{\lambda^2+1}$，

$|MN|\geqslant 4$，仅当$\lambda=0$时，$|MN|$取最小值4，

综上所述：$|MN|$的最小值是4．

21．（本小题满分 12 分）

【答案】（Ⅰ）当$a=1$时，$f(x)=(x-\frac{1}{x})-\ln x$，$f(1)=0$，

所以$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，

即曲线$y=f(x)$在点$P\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y=x-1$；

（Ⅱ）$f'\left(x\right)=\frac{ax^2-x+a}{x^2}$，

若$a\leqslant 0$，则当$x>1$时，

$x-\frac{1}{x}>0$，$\ln x>0$，$\therefore f(x)<0$，不满足题意；

若$a>0$，则当$\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，即$a\geqslant\frac{1}{2}$时，$f'\left(x\right)\geqslant 0$恒成立

$\therefore f\left(x\right)$在$[1,+\infty)$上单调递增，而$f\left(1\right)=0$，

所以当$x\geqslant 1$时，$f\left(x\right)\geqslant 0$，满足题意，

当$\Delta>0$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，$f'\left(x\right)=0$，有两个不等实根设为x_1，x_2，且$x_1<x_2$，

则$x_1x_2=1$，$x_1+x_2=\frac{1}{a}>0$，

$\therefore 0<x_1<1<x_2$，当$1<x<x_2$时，$f'\left(x\right)<0$，

故$f\left(x\right)$在$\left(1,x_2\right)$上单调递减，而$f\left(1\right)=0$，

当$x\in(1,x_2)$时，$f(x)<0$，不满足题意.

综上所述，$a\geqslant\frac{1}{2}$.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．（选修 4-4：坐标系与参数方程）（本小题满分 10 分）

【答案】（Ⅰ）$l:x+y-1=0$，曲线$C:x^2+y^2-4x=0$，

（Ⅱ）法 1：将$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）代入曲线$C$的方程，得$t^2+\sqrt{2}t-3=0$，

$\therefore |t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{14}$，

$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{14}}{3}$.

法 2：设圆心与x轴交于O、D，则$|PA||PB|=|OP|\cdot|PD|=1\times 3=3$，

而$|PA|+|PB|=|AB|=\sqrt{14}$，

$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA||PB|}=\frac{\sqrt{14}}{3}$.

23．【答案】（Ⅰ）$f\left(x\right)\leqslant 0$，即$|x-2|\leqslant|2x+1|$，

即$x^2-4x+4\leqslant 4x^2+4x+1$，$3x^2+8x-3\geqslant 0$，

解得 $x \geqslant \frac{1}{3}$ 或 $x \leqslant -3$，

所以不等式 $f(x) \leqslant 0$ 的解集为 $\left\{ x \middle| x \geqslant \frac{1}{3} 或 x \leqslant -3 \right\}$.

（Ⅱ） $f(x) = |x-2| - |2x+1| = \begin{cases} x+3, x < -\frac{1}{2} \\ -3x+1, -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ -x-3, x > 2 \end{cases}$，

故 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$，

因为对于 $\forall x \in \mathbf{R}$，使 $f(x) - 2m^2 \leqslant 4m$ 恒成立.

所以 $2m^2 + 4m \geqslant \frac{5}{2}$，即 $4m^2 + 8m - 5 \geqslant 0$，解得 $m \geqslant \frac{1}{2}$ 或 $m \leqslant -\frac{5}{2}$，

$\therefore m \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.