北京市东城区 2021—2022 学年度第二学期高三综合练习(一)

数学参考答案及评分标准

2022.4

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)D	(2)C	(3)B	(4)A	(5)C
(6)D	(7)B	(8)A	(9)B	(10)D

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)64　　(12)5

(13)4;7　　(14)$(-1,\ln 2)$;$(e,+\infty)$

(15)①③④(答案不唯一)

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)$f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x=\frac{a}{2}\sin 2\omega x$.

选择条件①④:

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,即 $\omega=1$. 所以 $f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x$.

因为 $f(\frac{\pi}{4})=1$,所以 $\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1$,即 $a=2$. 所以 $f(x)=\sin 2x$. …………… 7 分

选择条件③④:

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,即 $\omega=1$. 所以 $f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x$.

因为函数 $f(x)$ 的最大值为 1,所以 $\frac{a}{2}=1$,即 $a=2$. 所以 $f(x)=\sin 2x$. … 7 分

(Ⅱ)$g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

因为 $y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增,

所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi<x<\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间为 $(0,\frac{3\pi}{8})$ 和 $(\frac{7\pi}{8},\pi)$. ………… 13 分

(17)(共 14 分)

解:(Ⅰ)因为 $AA_1\perp$平面 ABC,所以 $AA_1\perp AB$,$AA_1\perp AC$.

因为 $AB\perp AC$,所以 $AC\perp$平面 AA_1B_1B. 所以 $AC\perp AB_1$.

因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AC/\!/A_1C_1$,所以 $A_1C_1\perp AB_1$.

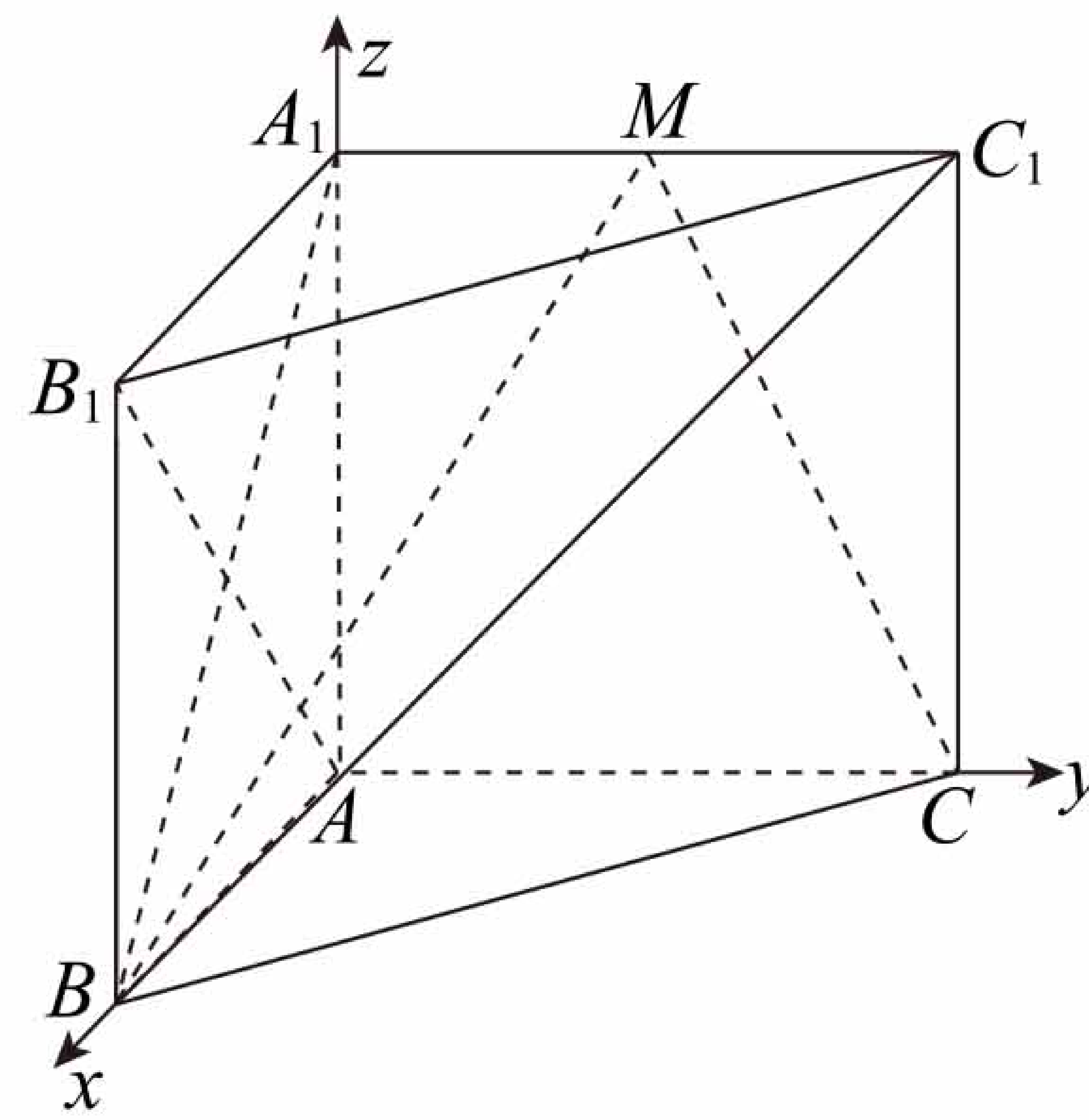
又因为 $AA_1=AB$,所以四边形 AA_1B_1B 为正方形.

连接 A_1B,则 $AB_1\perp A_1B$.

又因为 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$,所以 $AB_1\perp$平面 BA_1C_1.

因为 $BM\subset$平面 BA_1C_1,所以 $AB_1\perp BM$. ………………………………… 6 分

(Ⅱ)因为 AB,AC,AA_1 两两垂直,所以如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



可得 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,

$A_1(0,0,1)$,$B_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

则 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$,

$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$.

设 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{BA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$

$=(-1,0,1)+\lambda(0,1,0)=(-1,\lambda,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 BCM 的法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+\lambda y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=1$,$z=1-\lambda$,可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1-\lambda)$.

则 $\sin\frac{\pi}{4}=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}\times\sqrt{\lambda^2-2\lambda+3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,则 $\boldsymbol{n}=(1,1,\frac{1}{2})$.

因为 $\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$,

所以点 A_1 到平面 BCM 的距离为 $\frac{1}{3}$. ………………………………… 14 分

(18)(共 13 分)

解:(Ⅰ)设事件 A=“该市民年龄为 15 岁及以上”,

事件 B=“该市民受教育程度为硕士研究生”.

依题意,$P(A)=0.85$,$P(B|A)=0.06$.

由概率的乘法公式可得,

$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.85\times0.06=0.051$.

因此,从全市常住人口中随机选取 1 人,该市民年龄为 15 岁及以上

且受教育程度为硕士研究生的概率约为 0.051. ································ 3 分

(Ⅱ)从 Z 市 15 岁及以上的常住人口中随机选取 1 人,受教育程度为大学本科及

以上的概率为 $0.23+0.06+0.01=0.3$.

X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=(1-0.3)^2=0.49$,

$P(X=1)=C_2^1\times0.3\times(1-0.3)=0.42$,

$P(X=2)=0.3^2=0.09$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.49	0.42	0.09

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times0.49+1\times0.42+2\times0.09=0.6$. ··········· 11 分

(Ⅲ)$a>b$. ··· 13 分

(19)(共 15 分)

解:(Ⅰ)函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

由 $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2-1}$得 $f'(x)=\dfrac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}$.

则 $f'(2)=\dfrac{4a-5}{9}=-1$,

解得 $a=-1$. ·· 5 分

(Ⅱ) $f'(x)=\dfrac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}$.

令 $g(x)=-x^2+2ax-1(x>1)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$2ax\leqslant 0$，因此 $g(x)=-x^2+2ax-1<0$ 恒成立，

所以 $f'(x)=\dfrac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，没有最大值.

②当 $0<a\leqslant 1$ 时，$g(x)=-x^2+2ax-1<g(1)\leqslant 0$ 恒成立，

所以 $f'(x)=\dfrac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，没有最大值.

③当 $a>1$ 时，方程 $-x^2+2ax-1=0$ 的两个根为

$x_1=a-\sqrt{a^2-1}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-1}$.

由 $a>1$ 得 $0<x_1<1$，且 $1<a<x_2$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时有

x	$(1,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

函数 $f(x)$ 在 $x=a+\sqrt{a^2-1}$ 处取得最大值.

综上，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. …………………………………………… 15 分

(20)(共 15 分)

解：(Ⅰ)由题设，得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ 2c=2\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………… 5 分

(Ⅱ)存在直线 $x=1$ 符合题意.

直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-32k^2x+(64k^2-4)=0$.

由 $\Delta=(-32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-4)>0$ 得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$,

则 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{4k^2+1}$.

设直线 $x=t$ 与直线 l 交于点 $Q(t,y_Q)$.

因为 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|QA|}{|QB|}$,

所以 $\left|\dfrac{4-x_1}{4-x_2}\right|=\left|\dfrac{x_1-t}{t-x_2}\right|$.

由题设,知 $-2\leqslant x_1\leqslant 2$,$-2\leqslant x_2\leqslant 2$,$x_1<t<x_2$.

所以 $\dfrac{4-x_1}{4-x_2}>0$, $\dfrac{x_1-t}{t-x_2}>0$.

所以 $\dfrac{4-x_1}{4-x_2}=\dfrac{x_1-t}{t-x_2}$.

整理,得 $8t-(t+4)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$.

所以 $8t-(t+4)\cdot\dfrac{32k^2}{4k^2+1}+\dfrac{2(64k^2-4)}{4k^2+1}=0$.

解得 $t=1$.

所以存在直线 $x=1$ 符合题意. ………………………………………………… 15 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)4,1,2,3; 3,1,2,4; 2,1,3,4. ………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由于数列 E:$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$,其中 $e_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n-1,n\geqslant 2)$,

不妨设 E:$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 中恰有 s 项为 1,

若 $s=0$,则 A:$n,n-1,\cdots,1$ 符合题意;

若 $s=n-1$,则 A:$1,2,\cdots,n$ 符合题意;

若 $0<s<n-1$，则设这 s 项分别为 $e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_s}(k_1<k_2<\cdots<k_s)$，

构造数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$，令 $a_{k_1+1},a_{k_2+1},\cdots,a_{k_s+1}$ 分别为

$n-s+1,n-s+2,\cdots,n$，

数列 A 的其余各项 $a_{m_1},a_{m_2},\cdots,a_{m_{n-s}}(m_1<m_2<\cdots<m_{n-s})$ 分别为

$n-s,n-s-1,\cdots,1$.

经验证，数列 A 符合题意. …………………………………………………… 9 分

（Ⅲ）对于符合题意的数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant5)$.

①当 n 为奇数时，存在数列 $A':a_n,a_{n-1},\cdots,a_1$ 符合题意，

且数列 A 与 A' 不同，$T(A)$ 与 $T(A')$ 相同.

按这样的方式可由数列 A' 构造出数列 A.

所以 n 为奇数时，这样的数列 A 有偶数个.

当 $n=3$ 时，这样的数列 A 也有偶数个.

②当 n 为偶数时，

如果 $n,n-1$ 是数列 A 中不相邻的两项，交换 n 与 $n-1$ 得到数列 A' 符合题意，

且数列 A 与 A' 不同，$T(A)$ 与 $T(A')$ 相同.

按这样的方式可由数列 A' 构造出数列 A.

所以这样的数列 A 有偶数个.

如果 $n,n-1$ 是数列 A 中的相邻两项，由题设知，必有 $a_{n-1}=n,a_n=n-1,a_1=n-2$.

除这三项外，$a_2,a_3,\cdots,a_{n-2}$ 是一个 $n-3$ 项的符合题意的数列 A.

由①可知，这样的数列 A 有偶数个.

综上，这样的数列 A 有偶数个. ………………………………………………… 15 分