

数学参考答案及评分标准

2022.4

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

- (1)D                    (2)C                    (3)B                    (4)A                    (5)C
- (6)D                    (7)B                    (8)A                    (9)B                    (10)D

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

- (11)64                    (12)5
- (13)4;7                    (14)(-1,ln2);(e,+∞)

(15)①③④(答案不唯一)

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)

解:(I)  $f(x) = a \sin \omega x \cos \omega x = \frac{a}{2} \sin 2\omega x.$

选择条件①④:

因为函数  $f(x)$  图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ,

所以  $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$ , 即  $\omega = 1$ . 所以  $f(x) = \frac{a}{2} \sin 2x.$

因为  $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ , 所以  $\frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , 即  $a = 2$ . 所以  $f(x) = \sin 2x.$  ..... 7 分

选择条件③④:

因为函数  $f(x)$  图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ,

所以  $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$ , 即  $\omega = 1$ . 所以  $f(x) = \frac{a}{2} \sin 2x.$

因为函数  $f(x)$  的最大值为 1, 所以  $\frac{a}{2} = 1$ , 即  $a = 2$ . 所以  $f(x) = \sin 2x.$  ... 7 分

(II)  $g(x) = f(x) - 2\cos^2 \omega x + 1 = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}).$

因为  $y = \sin x$  在  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) (k \in \mathbf{Z})$  上单调递增,

所以  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}).$

所以  $-\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z}).$

所以函数  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上的单调递增区间为  $(0, \frac{3\pi}{8})$  和  $(\frac{7\pi}{8}, \pi).$  ..... 13 分



解:(I)因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,所以  $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AC$ .

因为  $AB \perp AC$ ,所以  $AC \perp$  平面  $AA_1B_1B$ .所以  $AC \perp AB_1$ .

因为在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, $AC \parallel A_1C_1$ ,所以  $A_1C_1 \perp AB_1$ .

又因为  $AA_1 = AB$ ,所以四边形  $AA_1B_1B$  为正方形.

连接  $A_1B$ ,则  $AB_1 \perp A_1B$ .

又因为  $A_1B \cap A_1C_1 = A_1$ ,所以  $AB_1 \perp$  平面  $BA_1C_1$ .

因为  $BM \subset$  平面  $BA_1C_1$ ,所以  $AB_1 \perp BM$ . ..... 6 分

(II)因为  $AB, AC, AA_1$  两两垂直,所以如图建立

空间直角坐标系  $A-xyz$ .

可得  $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0)$ ,

$A_1(0,0,1), B_1(1,0,1), C_1(0,1,1)$ .

则  $\vec{BC} = (-1,1,0), \vec{AB_1} = (1,0,1)$ ,

$\vec{A_1B} = (1,0,-1)$ .

设  $\vec{A_1M} = \lambda \vec{A_1C_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$ ,

$$\begin{aligned} \vec{BM} &= \vec{BA_1} + \vec{A_1M} = \vec{BA_1} + \lambda \vec{A_1C_1} \\ &= (-1,0,1) + \lambda(0,1,0) = (-1,\lambda,1). \end{aligned}$$

设  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  为平面  $BCM$  的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BM} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x + y = 0, \\ -x + \lambda y + z = 0. \end{cases}$$

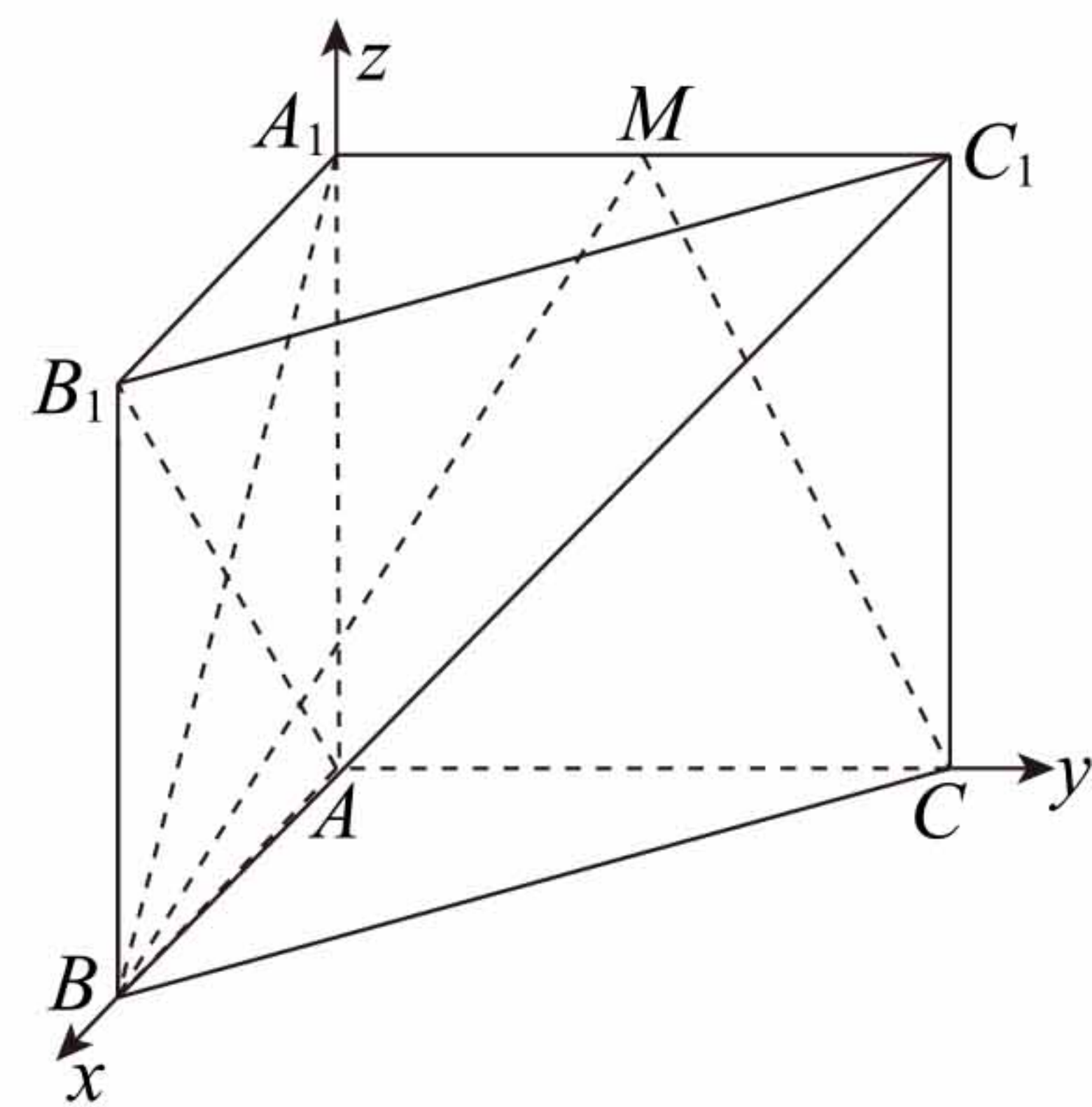
令  $x=1$ ,则  $y=1, z=1-\lambda$ ,可得  $\mathbf{n} = (1, 1, 1-\lambda)$ .

$$\text{则} \sin \frac{\pi}{4} = |\cos \langle \vec{AB_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\vec{AB_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{AB_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2} \times \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解得  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,则  $\mathbf{n} = (1, 1, \frac{1}{2})$ .

$$\text{因为} \frac{|\vec{A_1B} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{3},$$

所以点  $A_1$  到平面  $BCM$  的距离为  $\frac{1}{3}$ . ..... 14 分





解:(I)设事件  $A$  = “该市民年龄为 15 岁及以上”,

事件  $B$  = “该市民受教育程度为硕士研究生”.

依题意,  $P(A) = 0.85, P(B|A) = 0.06$ .

由概率的乘法公式可得,

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.85 \times 0.06 = 0.051.$$

因此,从全市常住人口中随机选取 1 人,该市民年龄为 15 岁及以上

且受教育程度为硕士研究生的概率约为 0.051. .... 3 分

(II)从 Z 市 15 岁及以上的常住人口中随机选取 1 人,受教育程度为大学本科及

以上的概率为  $0.23 + 0.06 + 0.01 = 0.3$ .

$X$  的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = (1-0.3)^2 = 0.49,$$

$$P(X=1) = C_2^1 \times 0.3 \times (1-0.3) = 0.42,$$

$$P(X=2) = 0.3^2 = 0.09,$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	0.49	0.42	0.09

故  $X$  的数学期望  $E(X) = 0 \times 0.49 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.09 = 0.6$ . .... 11 分

(III)  $a > b$ . .... 13 分

(19)(共 15 分)

解:(I)函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

$$\text{由 } f(x) = \frac{x-a}{x^2-1} \text{ 得 } f'(x) = \frac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}.$$

$$\text{则 } f'(2) = \frac{4a-5}{9} = -1,$$

解得  $a = -1$ . .... 5 分



$$(II) f'(x) = \frac{-x^2 + 2ax - 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$\text{令 } g(x) = -x^2 + 2ax - 1 (x > 1).$$

① 当  $a \leq 0$  时,  $2ax \leq 0$ , 因此  $g(x) = -x^2 + 2ax - 1 < 0$  恒成立,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{-x^2 + 2ax - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 没有最大值.

② 当  $0 < a \leq 1$  时,  $g(x) = -x^2 + 2ax - 1 < g(1) \leq 0$  恒成立,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{-x^2 + 2ax - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 没有最大值.

③ 当  $a > 1$  时, 方程  $-x^2 + 2ax - 1 = 0$  的两个根为

$$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}, x_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}.$$

由  $a > 1$  得  $0 < x_1 < 1$ , 且  $1 < a < x_2$ .

当  $x \in (1, +\infty)$  时有

$x$	$(1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

函数  $f(x)$  在  $x = a + \sqrt{a^2 - 1}$  处取得最大值.

综上,  $a$  的取值范围为  $(1, +\infty)$ . ..... 15 分

(20)(共 15 分)

$$\text{解: (I) 由题设, 得 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 2c = 2\sqrt{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases} \quad \text{解得 } a = 2, b = 1.$$

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 5 分



(II) 存在直线  $x=1$  符合题意.

直线  $l$  的方程为  $y=k(x-4)$ .

$$\text{由} \begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \text{得} (4k^2+1)x^2-32k^2x+(64k^2-4)=0.$$

$$\text{由} \Delta=(-32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-4)>0 \text{得} -\frac{\sqrt{3}}{6}<k<\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 < x_2)$ ,

$$\text{则} x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+1}, x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2+1}.$$

设直线  $x=t$  与直线  $l$  交于点  $Q(t, y_Q)$ .

$$\text{因为} \frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|QA|}{|QB|},$$

$$\text{所以} \left| \frac{4-x_1}{4-x_2} \right| = \left| \frac{x_1-t}{t-x_2} \right|.$$

由题设, 知  $-2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2, x_1 < t < x_2$ .

$$\text{所以} \frac{4-x_1}{4-x_2} > 0, \frac{x_1-t}{t-x_2} > 0.$$

$$\text{所以} \frac{4-x_1}{4-x_2} = \frac{x_1-t}{t-x_2}.$$

整理, 得  $8t-(t+4)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$ .

$$\text{所以} 8t-(t+4) \cdot \frac{32k^2}{4k^2+1} + \frac{2(64k^2-4)}{4k^2+1} = 0.$$

解得  $t=1$ .

所以存在直线  $x=1$  符合题意. .... 15 分

(21)(共 15 分)

解:(I) 4, 1, 2, 3; 3, 1, 2, 4; 2, 1, 3, 4. .... 4 分

(II) 由于数列  $E: e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ , 其中  $e_i \in \{0, 1\} (i=1, 2, \dots, n-1, n \geq 2)$ ,

不妨设  $E: e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  中恰有  $s$  项为 1,

若  $s=0$ , 则  $A: n, n-1, \dots, 1$  符合题意;

若  $s=n-1$ , 则  $A: 1, 2, \dots, n$  符合题意;



若  $0 < s < n-1$ , 则设这  $s$  项分别为  $e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_s}$  ( $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ ),

构造数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ , 令  $a_{k_1+1}, a_{k_2+1}, \dots, a_{k_s+1}$  分别为

$n-s+1, n-s+2, \dots, n$ ,

数列  $A$  的其余各项  $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{n-s}}$  ( $m_1 < m_2 < \dots < m_{n-s}$ ) 分别为

$n-s, n-s-1, \dots, 1$ .

经验证, 数列  $A$  符合题意. .... 9 分

(III) 对于符合题意的数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 5$ ).

① 当  $n$  为奇数时, 存在数列  $A': a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  符合题意,

且数列  $A$  与  $A'$  不同,  $T(A)$  与  $T(A')$  相同.

按这样的方式可由数列  $A'$  构造出数列  $A$ .

所以  $n$  为奇数时, 这样的数列  $A$  有偶数个.

当  $n=3$  时, 这样的数列  $A$  也有偶数个.

② 当  $n$  为偶数时,

如果  $n, n-1$  是数列  $A$  中不相邻的两项, 交换  $n$  与  $n-1$  得到数列  $A'$  符合题意,

且数列  $A$  与  $A'$  不同,  $T(A)$  与  $T(A')$  相同.

按这样的方式可由数列  $A'$  构造出数列  $A$ .

所以这样的数列  $A$  有偶数个.

如果  $n, n-1$  是数列  $A$  中的相邻两项, 由题设知, 必有  $a_{n-1} = n, a_n = n-1, a_1 = n-2$ .

除这三项外,  $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$  是一个  $n-3$  项的符合题意的数列  $A$ .

由①可知, 这样的数列  $A$  有偶数个.

综上, 这样的数列  $A$  有偶数个. .... 15 分



## 2022 北京高三各区一模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三一模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【**高三一模**】—【**一模试题**】，即可**免费获取**全部一模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多**一模排名**等信息，考后持续更新！



# 微信搜一搜

北京高考资讯

The screenshot shows the WeChat public account interface for '北京高考资讯' (Beijing Gaokao Information). On the left, there is a vertical menu with the following items: '一模试题' (First Mock Exam Questions), '二模试题' (Second Mock Exam Questions), '高考真题' (Gaokao Real Questions), '期末试题' (Final Exam Questions), and '各省热门试题' (Popular Exam Questions from Various Provinces). The '一模试题' item is highlighted with a red box. Below the menu is a navigation bar with three items: '高三一模' (Senior 3 First Mock Exam), '热门资讯' (Popular Information), and '福利资料' (Welfare Materials). The '高三一模' item is also highlighted with a red box. In the center, there is a QR code with the text '识别二维码查看下载 北京各区一模试题&答案' (Scan the QR code to view and download Beijing's first mock exam questions and answers). On the right side, there is a promotional graphic with an orange background. It features a cartoon illustration of a student sitting at a desk with books, writing. Above the student, there are two speech bubbles: one says '这里有最新热门试题' (Here are the latest popular exam questions) and the other says '考后最快更新分享' (Share the fastest updates after the exam). The overall design is clean and professional, with a focus on providing exam resources.