天一大联考
2023—2024 学年(上)高一年级期末考试
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　B

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　集合 A 中的元素符合 $3\leqslant x<6$ 的只有 3 和 5.

2. 答案　B

命题意图　本题考查命题的否定.

解析　全称量词命题的否定为存在量词命题,则原命题的否定为 $\exists x>0,\ln x-x\geqslant 0$.

3. 答案　C

命题意图　本题考查同角三角函数的基本关系.

解析　原式 $=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan\alpha+1}=\dfrac{8}{7}$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查三角函数的概念.

解析　由题意知 $\begin{cases}\cos\alpha=\sin\dfrac{\pi}{6},\\ \sin\alpha=\cos\dfrac{\pi}{6},\end{cases}$ 则 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.

5. 答案　B

命题意图　本题考查对数的运算性质.

解析　由已知可得 $\begin{cases}0=m\lg 10^{-12}+n,\\ 120=m\lg 1+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=10,\\ n=120,\end{cases}$ 可得 $D=10\lg I+120$,令 $10\lg I+120=40$,可得 $\lg I=-8$, $I=10^{-8}$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查对数函数和二次函数的单调性.

解析　因为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,所以函数 $y=x^2-2kx+5$ 在 $[1,2]$ 上单调递减且恒大于零,则 $\begin{cases}k\geqslant 2,\\ 2^2-4k+5>0,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant k<\dfrac{9}{4}$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查奇函数的单调性、解不等式.

解析　$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e^x+1}=-f(x)$,所以 $f(x)$

为奇函数,且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 不等式 $f(\ln t)+2f\left(\ln\frac{1}{t}\right)>0$ 可转化为 $f(\ln t)>-2f(-\ln t)=2f(\ln t)$,

则 $f(\ln t)<0=f(0)$,所以 $\ln t>0$,解得 $t>1$,故不等式的解集为 $(1,+\infty)$.

8. **答案** A

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 当 $x\in[0,2\pi]$ 时,$\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right]$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰好有 4 个零点和 4 个最值点,所以 $2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$,得 ω 的取值范围是 $\left[\frac{23}{12},\frac{13}{6}\right)$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** BD

命题意图 本题考查诱导公式和三角恒等变换.

解析 $\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,故 A 错误;$2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,故 B 正确;$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 错误;$\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$,故 D 正确.

10. **答案** AC

命题意图 本题考查不等式的性质.

解析 对于 A,若 $xz^2>yz^2$,则 $z^2>0$,故 $x>y$,故 A 正确;

对于 B,当 $z=0$ 时,$xz^2=yz^2$,故 B 错误;

对于 C,若 $x>y>0$,则 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$,又 $z<0$,所以 $\frac{z}{x}>\frac{z}{y}$,故 C 正确;

对于 D,若 $z>y>x$,则 $z-x>z-y>0$,则 $\frac{1}{z-x}<\frac{1}{z-y}$,故 D 错误.

11. **答案** ABD

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意可得 $A=2$,由 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$,可得 $2\sin\varphi=1$,又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,根据函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称,可得 $\omega\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$,解得 $\omega=2$,可得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于 A,最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 A 正确;

对于 B,若 $x=-\frac{\pi}{12}$,则 $2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0$,故 B 正确;

对于 C,当 $x\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$,$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,故 C 错误;

对于 D,由 $f(x)=0$,得 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=1$ 时,$x=\frac{5\pi}{12}$,当 $k=2$ 时,$x=\frac{11\pi}{12}$,

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 2 个零点，故 D 正确.

12. 答案　ABC

命题意图　本题考查抽象函数的性质.

解析　对于 A，令 $x=y=0$，得 $f(0)=2f(0)$，得 $f(0)=0$，故 A 正确；

对于 B，令 $x=1,y=-1$，得 $\dfrac{f(1)}{e^{-1}}+\dfrac{f(-1)}{e}=f(1-1)=0$，所以 $f(-1)=-e^2f(1)=-e^2$，故 B 正确；

对于 C，由 A 知 $f(0)=0$，所以 $e^0f(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{e^{-x}}+\dfrac{f(-x)}{e^x}=f(0)=0$，即 $e^xf(x)+e^{-x}f(-x)=0$，所以 $e^xf(x)$ 为奇函数，故 C 正确；

对于 D，$f(1)=f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{e}}f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}f(1)<f(1)$，$f(2)=\dfrac{2}{e}f(1)<f(1)$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不具有单调性，故 D 错误.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　2

命题意图　本题考查弧度制和扇形的有关计算.

解析　圆心角化为弧度为 $\dfrac{3\pi}{4}$ rad，所以半径为 $\dfrac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{4}}=2$.

14. 答案　9

命题意图　本题考查对数的运算性质.

解析　由 $a^{\log_3 a}=81$，两边取以 3 为底的对数得 $\log_3 a^{\log_3 a}=\log_3 81$，所以 $(\log_3 a)^2=4$，所以 $\log_3 a=2$ 或 -2，又因为 $a>1$，所以 $a=9$.

15. 答案　$\left(-\dfrac{3\pi}{16},\dfrac{3\pi}{16}\right)$

命题意图　本题考查正切函数的图象与性质.

解析　由题意得 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$，由 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$，得 $2\alpha+\dfrac{\pi}{8}\in\left(-\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right)$，由 $\tan\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)>-1$，可得 $-\dfrac{\pi}{4}<2\alpha+\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$，得 $-\dfrac{3\pi}{16}<\alpha<\dfrac{3\pi}{16}$.

16. 答案　$\dfrac{1}{2}$

命题意图　本题考查函数图象.

解析　因为 $y=-\log_9 x=\log_{\frac{1}{9}}x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以若 $f(x)$ 的图象上存在关于直线 $y=x$ 对称的两个点，则关于 x 的方程 $\dfrac{3}{\sqrt{4-x}}-a\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上有实根，即方程 $a=\dfrac{3^{x+1}}{\sqrt{4-x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 在 $(-\infty,0]$ 上有实根. 设 $g(x)=\dfrac{3^{x+1}}{\sqrt{4-x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$，则易得 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，所以 $g(x)\leqslant g(0)=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$，故 a 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查集合的表示与运算.

解析 （Ⅰ）由 $x^2-9x+18\leqslant 0$，解得 $3\leqslant x\leqslant 6$，

所以 $B=\{x|3\leqslant x\leqslant 6\}$，…………（3 分）

所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<3$ 或 $x>6\}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由 $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$，…………（6 分）

于是 $\begin{cases}m<3,\\ m+7>6,\end{cases}$ …………（8 分）

解得 $-1<m<3$，

所以 m 的取值范围为 $(-1,3)$. …………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查指数函数的性质.

解析 （Ⅰ）因为 $f(x)$ 的图象过坐标原点，

所以 $f(0)=1+b=0$，…………（2 分）

解得 $b=-1$. …………（4 分）

（Ⅱ）若 $0<a<1$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，…………（5 分）

所以 $m=f(-1)$，$n=f(1)$，所以 $f(-1)+3f(1)=0$，即 $\frac{1}{a}-1+3(a-1)=0$，…………（6 分）

解得 $a=\frac{1}{3}$（$a=1$ 舍去）. …………（8 分）

若 $a>1$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，…………（9 分）

所以 $m=f(1)$，$n=f(-1)$，所以 $f(1)+3f(-1)=0$，即 $a-1+3\left(\frac{1}{a}-1\right)=0$，…………（10 分）

解得 $a=3$（$a=1$ 舍去）.

综上，a 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 3. …………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 （Ⅰ）因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，…………（2 分）

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\sqrt{2}$，…………（3 分）

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[(2\alpha-\beta)-\alpha]=\frac{\tan(2\alpha-\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(2\alpha-\beta)\tan\alpha}=\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1+(-\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. …………（6 分）

（Ⅱ）$\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$，…………（9 分）

所以 $\sin 2\beta=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta+\cos^2\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{5}}{1+\frac{2}{25}}=\frac{10\sqrt{2}}{27}$. …………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查对勾函数的性质.

解析 （Ⅰ）易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，从而 $f(-b)=-f(b)$，…………（2 分）

因为 $g(x)=f(x)-4$，所以 $g(b)=f(b)-4=-8$，得 $f(b)=-4$， ………………………… (3 分)

所以 $g(-b)=f(-b)-4=-f(b)-4=0$. ……………………………………………… (5 分)

(Ⅱ) 若 $a\leqslant 0$，则 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(x)\geqslant a$ 在 $x\in[4,+\infty)$ 时恒成立，所以 $f(x)_{\min}=f(4)=4+\frac{a}{4}\geqslant a$，解得 $a\leqslant\frac{16}{3}$，所以 $a\leqslant 0$. …… (7 分)

若 $a>0$，由 $x>0$ 可得 $f(x)=x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$，当且仅当 $x=\frac{a}{x}$，即 $x=\sqrt{a}$ 时等号成立，

则 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增. ………………………… (9 分)

若 $a>16$，则 $f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}\geqslant a$，解得 $0<a\leqslant 4$，与 $a>16$ 矛盾；………………… (10 分)

若 $0<a\leqslant 16$，则 $f(x)_{\min}=f(4)=4+\frac{a}{4}\geqslant a$，解得 $a\leqslant\frac{16}{3}$，所以 $0<a\leqslant\frac{16}{3}$. ………………… (11 分)

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{16}{3}\right]$. ……………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 (Ⅰ) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x+1=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1$. ………………………… (2 分)

由条件知 $f(x)$ 的最小正周期 T 为 π，所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$. ……………………………………………… (3 分)

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

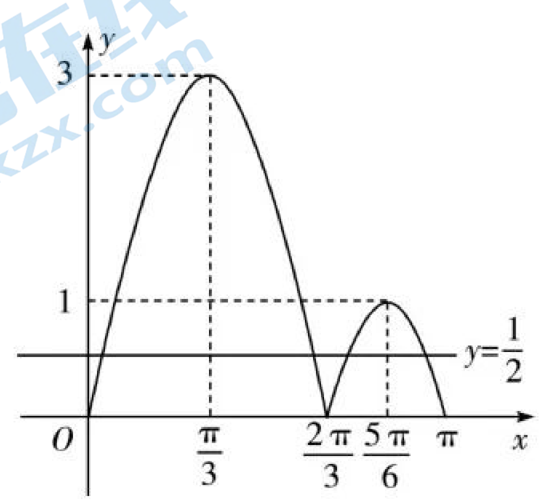
得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………… (6 分)

(Ⅱ) $|f(x)|=\frac{1}{2}$ 的实数根，即 $y=|f(x)|$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点横坐标. ………………… (7 分)

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{3}$，由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，得 $x=\frac{5\pi}{6}$，

作出 $y=|f(x)|$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$，大致如图：



……………………………………………………………………………… (9 分)

由图可知，$y=|f(x)|$的图象与直线$y=\frac{1}{2}$在$[0,\pi]$上有4个交点.其中两个关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，另外两个关于直线$x=\frac{5\pi}{6}$对称，

所以4个交点的横坐标之和为$\frac{\pi}{3}\times 2+\frac{5\pi}{6}\times 2=\frac{7\pi}{3}$，即所求的实数根之和为$\frac{7\pi}{3}$. ……………………（12分）

22. **命题意图** 本题考查对数函数与二次函数的综合问题.

解析 （Ⅰ）由题意知$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_a\frac{1}{2}=-1$，所以$a=2$，$f(x)=\log_2(x+1)$. ……………………（1分）

$f(2x+3)f\left(\frac{x}{2}\right)=\log_2(2x+4)\log_2\frac{x+2}{2}=[\log_2(x+2)+1][\log_2(x+2)-1]=[\log_2(x+2)]^2-1$，…（3分）

不等式$f(2x+3)f\left(\frac{x}{2}\right)<3$即$[\log_2(x+2)]^2-4<0$，所以$-2<\log_2(x+2)<2$， ……………………（4分）

得$\frac{1}{4}<x+2<4$，即$-\frac{7}{4}<x<2$，

所以原不等式的解集为$\left(-\frac{7}{4},2\right)$. ……………………（5分）

（Ⅱ）当$k\in(0,2)$，$x\in[m,8]$时，$\left|\frac{kx}{2}-\frac{1}{x}-1\right|\geq 0$，$\frac{2-k}{x}>0$，又$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以当$x\in[m,8]$时，不等式$f\left(\left|\frac{kx}{2}-\frac{1}{x}-1\right|\right)<f\left(\frac{2-k}{x}\right)$恒成立，等价于$\left|\frac{kx}{2}-\frac{1}{x}-1\right|<\frac{2-k}{x}$恒成立，

即$k-2<\frac{k}{2}x^2-x-1<2-k$恒成立. ……………………（6分）

当$x=8$时，$k-2<32k-9<2-k$，得$\frac{7}{31}<k<\frac{1}{3}$. ……………………（7分）

设函数$g(x)=\frac{k}{2}x^2-x-1$，其图象开口向上，对称轴方程为$x=\frac{1}{k}\in\left(3,\frac{31}{7}\right)$，

因为$g\left(\frac{1}{k}\right)-(k-2)=1-k-\frac{1}{2k}\leq 1-2\sqrt{k\times\frac{1}{2k}}=1-\sqrt{2}<0$，所以$g\left(\frac{1}{k}\right)<k-2$， ……………………（8分）

而$k-2<\frac{k}{2}x^2-x-1<2-k$对任意$x\in[m,8]$恒成立，所以$\frac{1}{k}<m<8$，

所以$g(x)$在$[m,8]$上的最小值为$g(m)=\frac{k}{2}m^2-m-1$. ……………………（9分）

原问题转化为：存在$k\in\left(\frac{7}{31},\frac{1}{3}\right)$，使得$g(m)>k-2$，即$\left(\frac{m^2}{2}-1\right)k-m+1>0$，

因为$m>\frac{1}{k}>3$，所以$\frac{m^2}{2}-1>0$，要使$\left(\frac{m^2}{2}-1\right)k-m+1>0$成立，只需$\left(\frac{m^2}{2}-1\right)\times\frac{1}{3}-m+1>0$，……（10分）

解得$m>3+\sqrt{5}$（$m<3-\sqrt{5}$舍去）， ……………………（11分）

又$m\in\mathbf{N}^*$，所以m的最小值为6. ……………………（12分）