2024北京朝阳高三（上）期末

数　　学

2024.1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\,|\,\log_3 x<1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[0,3]$　　（B）$[0,3)$　　（C）$(0,3)$　　（D）$(0,3]$

（2）设 $a\in\mathbf{R}$，若复数 $(a-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点位于虚轴上，则 $a=$

（A）-4　　（B）-1　　（C）1　　（D）4

（3）若 $0<a<1$，则

（A）$a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{2}}$　　（B）$2^a<3^a$

（C）$\log_a\frac{1}{2}>\log_a\frac{1}{3}$　　（D）$\sin a>\cos a$

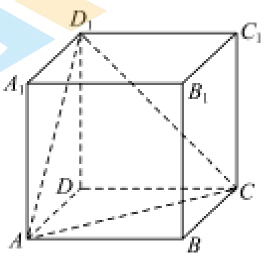
（4）在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=\sqrt{2},\ \angle A=\frac{\pi}{6},\ \cos C=-\frac{1}{3}$，则 $c=$

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{8\sqrt{3}}{9}$　　（D）$\frac{8}{3}$

（5）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,1),\ B(2,1)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 $|OP|$ 的最大值为

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{2}+1$

（6）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，且 $EB/\!/$ 平面 ACD_1，则 $\tan\angle DED_1$ 的最大值为



（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）1

（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（7）设函数 $f(x)=x+\frac{m}{x-2}(m\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $(-1,2)$，则“$-3<m\leqslant 0$”是“$f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 内有且仅有一个零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）设抛物线 C 的焦点为 F ，点 E 是 C 的准线与 C 的对称轴的交点，点 P 在 C 上，若 $\angle PEF=30^\circ$ ，则 $\sin\angle PFE=$

（A）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（9）根据经济学理论，企业生产的产量受劳动投入、资本投入和技术水平的影响，用 Q 表示产量， L 表示劳动投入， K 表示资本投入， A 表示技术水平，则它们的关系可以表示为 $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$ ，其中 $A>0,K>0,L>0,0<\alpha<1,0<\beta<1$. 当 A 不变， K 与 L 均变为原来的 2 倍时，下面结论中正确的是

（A）存在 $\alpha<\frac{1}{2}$ 和 $\beta<\frac{1}{2}$ ，使得 Q 不变

（B）存在 $\alpha>\frac{1}{2}$ 和 $\beta>\frac{1}{2}$ ，使得 Q 变为原来的 2 倍

（C）若 $\alpha\beta=\frac{1}{4}$ ，则 Q 最多可变为原来的 2 倍

（D）若 $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}$ ，则 Q 最多可变为原来的 2 倍

（10）在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=4\sqrt{2}$ ，当 $\lambda\in\mathbf{R}$ 时， $|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}|$ 的最小值为 4 ．若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ ， $\overrightarrow{AP}=\sin^2\theta\,\overrightarrow{AB}+\cos^2\theta\,\overrightarrow{AC}$ ，其中 $\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ ，则 $|\overrightarrow{MP}|$ 的最大值为

（A）2　　　　（B）4

（C）$2\sqrt{5}$　　　　（D）$4\sqrt{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(x+\frac{2}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为________．（用数字作答）

（12）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2 ， S_n 为其前 n 项和，且 a_2,a_4,a_8 成等比数列，则 $a_4=$ ________， $S_n=$ ________.

（13）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线过点 $(-2,1)$ ，则其离心率为________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1],\\ 2|x-a|-2, & x\in(1,3].\end{cases}$ 当 $a=0$ 时， $f(x)$ 的最大值为________；若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的一个取值为________.

（15）中国传统数学中开方运算暗含着迭代法，清代数学家夏鸾翔在其著作《少广缒凿》中用迭代法给出

一个“开平方捷术”，用符号表示为：已知正实数 N，取一正数 a_1 作为 $\sqrt{N}$ 的第一个近似值，定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{N}{a_n}, & n为奇数,\\ \dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}, & n为偶数,\end{cases}$$

则 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是 $\sqrt{N}$ 的一列近似值．当 $N=10$，$a_1=3$ 时，给出下列四个结论：

① $a_3^2>10$；

② $a_4a_5>10$；

③ $\exists n\geqslant 2$，$a_{2n-1}<a_{2n+1}$；

④ $\forall n\geqslant 2$，$|a_{2n}^2-10|<|a_{2n-1}^2-10|$．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+m\ (m\in\mathbf{R})$ 的图象过原点．

（Ⅰ）求 m 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

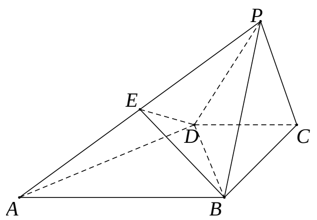
（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上单调递增，求正数 t 的最大值．

（17）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,DC$，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=2DC$，侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$，E 是 PA 的中点．

（Ⅰ）求证：$DE\,/\!/$ 平面 PBC；

（Ⅱ）已知 $AB=BC=2$，$PB=PC$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使四棱锥 $P-ABCD$ 唯一确定，求二面角 $E-BD-C$ 的余弦值．



条件①：$AP=2\sqrt{2}$；

条件②：$AP\perp BC$；

条件③：直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

(18)(本小题 13 分)

某学校开展健步走活动，要求学校教职员工上传 11 月 4 日至 11 月 10 日的步数信息．教师甲、乙这七天的步数情况如图 1 所示．

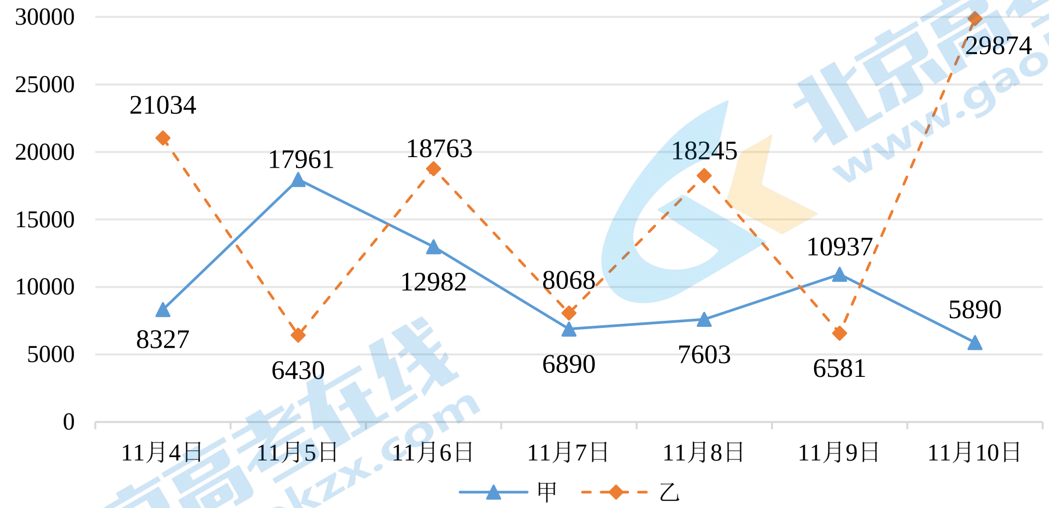


图 1

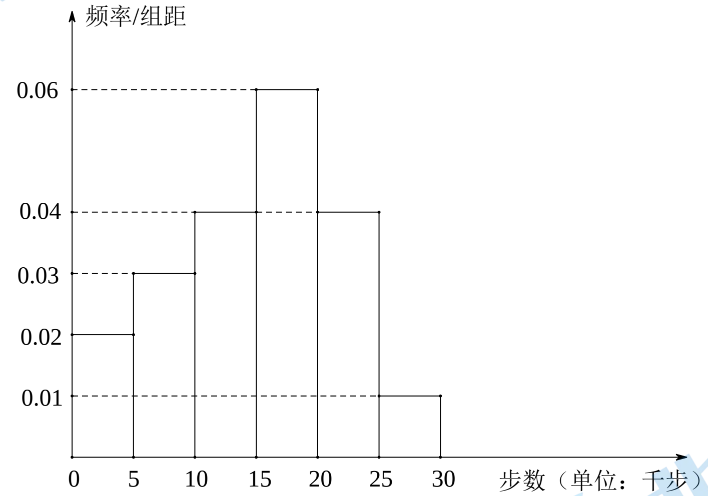


图 2

(Ⅰ) 从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取一天，求这一天甲比乙的步数多的概率；

(Ⅱ) 从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取三天，记乙的步数不少于 20000 的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

(Ⅲ) 根据 11 月 4 日至 11 月 10 日某一天的数据制作的全校 800 名教职员工步数的频率分布直方图如图 2 所示．已知这一天甲与乙的步数在全校 800 名教职员工中从多到少的排名分别为第 501 名和第 221 名，判断这是哪一天的数据．(只需写出结论)

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x-1\,(a\in\mathbf{R})$．

(Ⅰ) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线为 x 轴，求 a 的值；

(Ⅱ) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的极值点个数；

（III）若 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有零点 t，求证：$t<a^2$.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左顶点为 A，上顶点为 B，原点 O 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\triangle AOB$ 的面积为 1.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(-2,1)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 C,D，过点 C 作 x 轴的垂线分别与直线 AD,AB 交于点 M,N．判断点 N 是否为线段 CM 的中点，说明理由.

（21）（本小题 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的无穷递增数列，对于 $k\in\mathbf{N}^*$，定义集合 $B_k=\{i\in\mathbf{N}^*\mid a_i<k\}$，设 b_k 为集合 B_k 中的元素个数，若 $B_k=\varnothing$ 时，规定 $b_k=0$.

（Ⅰ）若 $a_n=2^n$，写出 b_1,b_2,b_3 及 b_{10} 的值；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（III）设集合 $S=\{s\mid s=n+a_n,n\in\mathbf{N}^*\},\ T=\{t\mid t=n+b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$，求证：$S\cup T=\mathbf{N}^*$ 且 $S\cap T=\varnothing$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）B	（3）B	（4）D	（5）D
（6）C	（7）A	（8）B	（9）D	（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）40　　（12）8　n^2+n　　（13）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（14）4　3（答案不唯一）　　（15）① ④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(0)=1+m=0$ 得 $m=-1$.

所以 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x-1$

$$=\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}.$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ……………………………………………7 分

（Ⅱ）由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in \mathbf{Z}$），

得 $k\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{6}$（$k\in \mathbf{Z}$）.

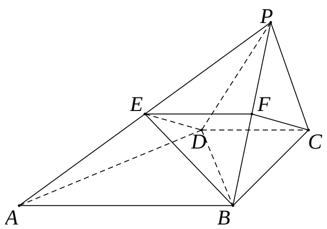
所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}]$（$k\in \mathbf{Z}$）.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上单调递增，且 $0\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}]$，此时 $k=0$，

所以 $t\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，故 t 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 PB 的中点 F，连接 CF,EF.



因为 E 是 PA 的中点，所以 $EF // AB, AB=2EF$.

又因为 $AB // DC, AB=2DC$，

所以 $EF // DC$ 且 $EF = DC$.

所以四边形 $CDEF$ 为平行四边形.

所以 $DE // CF$.

又因为 $DE \not\subset$ 平面 PBC， $CF \subset$ 平面 PBC，

所以 $DE //$ 平面 PBC. ……………………………………………………………………5 分

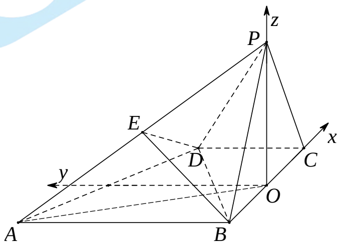
（Ⅱ）取 BC 的中点 O，连接 PO.

因为 $PB = PC$，所以 $PO \perp BC$.

又因为侧面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD$，

且平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.



如图，在平面 $ABCD$ 中，作 $Oy // BA$，

则 $PO \perp BC$，$PO \perp Oy$，$Oy \perp BC$，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

选条件①：连接 AO，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，因为 $AB = 2$， $BO = 1$，所以 $AO = \sqrt{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，因为 $AP = 2\sqrt{2}$， $AO = \sqrt{5}$，所以 $PO = \sqrt{3}$.

所以 $A(-1,2,0), B(-1,0,0), C(1,0,0), D(1,1,0), P(0,0,\sqrt{3}), E(-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{BE} = (\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BD} = (2,1,0)$.

设平面 EDB 的法向量是 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE} = 0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$，则 $y = -2$, $z = \sqrt{3}$.

于是 $\boldsymbol{m} = (1,-2,\sqrt{3})$.

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$ 是平面 BDC 的法向量.

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

由题知，二面角 $E-BD-C$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. …………………14 分

选条件③：连接 AO，因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\angle PAO$ 是直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成角.

所以 $\tan\angle PAO=\dfrac{PO}{AO}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，因为 $AB=2,\ BO=1$，所以 $AO=\sqrt{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，因为 $AO=\sqrt{5},\ \dfrac{PO}{AO}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $PO=\sqrt{3}$.

下同选条件①. ……………………………………………………………………14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设“甲比乙的步数多”为事件 A.

在 11 月 4 日至 11 月 10 日这七天中，11 月 5 日与 11 月 9 日这两天甲比乙步数多，

所以 $P(A)=\dfrac{2}{7}$. ……………………………………………………………3 分

（Ⅱ）由图可知，7 天中乙的步数不少于 20000 步的天数共 2 天.

X 的所有可能取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3C_2^0}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\dfrac{1}{7}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$E(X)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. ……………………………………10 分

（Ⅲ）11 月 6 日. ……………………………………………………………………13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=x-a\ln x-1\,(a\in\mathbf{R})$ 得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}$，

依题意，$f'(1)=1-a=0$，得 $a=1$.

经验证，$f(x)=x-\ln x-1$ 在点 $(1,0)$ 处的切线为 $y=0$，所以 $a=1$. …………4 分

（Ⅱ）由题得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$.

（1）若 $a\leqslant 1$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 无极值点.

（2）若 $a>1$，

当 $x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(1,a)$ 上单调递减，

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(x)$ 无极大值点.

综上，当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的极值点个数为 0；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的极值点个数为 1. ……………………9 分

（III）由（II）知当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(1)=0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内无零点.

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,a)$，单调递增区间为 $(a,+\infty)$.

所以 $f(a)<f(1)=0$.

若 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有零点 t，则 $t\in(a,+\infty)$.

而 $f(a^2)=a^2-2a\ln a-1$，设 $g(x)=x^2-2x\ln x-1\,(x>1)$，

则 $g'(x)=2x-2(1+\ln x)=2(x-1-\ln x)$.

设 $h(x)=2(x-1-\ln x)\,(x>1)$，则 $h'(x)=2(1-\dfrac{1}{x})=\dfrac{2(x-1)}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(a)>g(1)=0$，即 $f(a^2)>0$.

又 $f(t)=0,\ a^2>a$，

所以 $t<a^2$. ……………………………………………………………………………15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由题可知 $A(-a,0),\ B(0,b),\ |AB|=\sqrt{a^2+b^2}$.

因为 $\triangle AOB$ 的面积为 1，所以 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}ab=1$.

因为点 O 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{a^2+b^2}=1$.

所以 $\begin{cases}ab=2,\\ a^2+b^2=5,\\ a>b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………5 分

（Ⅱ）点 N 为线段 CM 的中点，理由如下：

由题知直线 l 的斜率存在，

设过点 $P(-2,1)$ 的直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$，即 $y=k(x+2)+1$.

由 $\begin{cases} y=k(x+2)+1, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$.

由 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)=-64k>0$，得 $k<0$.

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$.

直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

令 $x=x_1$，得点 M 的纵坐标 $y_M=\frac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}$.

直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x+2)$，

令 $x=x_1$，得点 N 的纵坐标 $y_N=\frac{1}{2}(x_1+2)$.

要证点 N 为线段 CM 的中点，只需证明 $y_N=\frac{1}{2}(y_M+y_1)$，即 $\frac{y_M+y_1}{2y_N}=1$.

因为 $\frac{y_M+y_1}{2y_N}=\frac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2k(x_1+2)(x_2+2)+(x_1+x_2+4)}{(x_1+2)(x_2+2)}\\
&=2k+\frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\\
&=2k+\frac{-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}+4}{\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2})+4}\\
&=2k+\frac{-(16k^2+8k)+4+16k^2}{16k^2+16k-2(16k^2+8k)+4(1+4k^2)}\\
&=2k+\frac{4-8k}{4}\\
&=2k+1-2k\\
&=1,
\end{aligned}
$$

所以点 N 为线段 CM 的中点. ……………………………………………………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$b_1=0$，$b_2=0$，$b_3=1$，$b_{10}=3$； ……………………………………………………3 分

（Ⅱ）由题可知 $a_1\geqslant 1$，所以 $B_1=\varnothing$，所以 $b_1=0$．

若 $a_1=m\geqslant 2$，则 $B_2=\varnothing$，$B_{m+1}=\{1\}$，

所以 $b_2=0$，$b_{m+1}=1$，与 $\{b_n\}$ 是等差数列矛盾．

所以 $a_1=1$．

设 $d_n=a_{n+1}-a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，因为 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列，所以 $d_n\in\mathbf{N}^*$．

假设存在 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得 $d_k\geqslant 2$．

设 $a_k=t$，由 $a_{k+1}-a_k\geqslant 2$ 得 $a_{k+1}\geqslant t+2$．

由 $a_k=t<t+1<t+2\leqslant a_{k+1}$ 得 $b_t<k$，$b_{t+1}=b_{t+2}=k$，与 $\{b_n\}$ 是等差数列矛盾．

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $d_n=1$．

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_n=1+(n-1)=n$． ………………………………………8 分

（Ⅲ）因为对于 $n\in\mathbf{N}^*$，$B_n\subseteq B_{n+1}$，所以 $b_n\leqslant b_{n+1}$．

所以 $n+b_n\leqslant n+b_{n+1}<n+1+b_{n+1}$，即数列 $\{n+b_n\}$ 是递增数列．

先证明 $S\cap T=\varnothing$．

假设 $S\cap T\neq\varnothing$，设正整数 $p\in S\cap T$．

由于 $p\in S$，故存在正整数 $i<p$ 使得 $p=i+a_i$，所以 $a_i=p-i$．

因为 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列，所以 $a_{i+1}\geqslant p-i+1$．

所以 $b_{p-i}=i-1$，$b_{p-i+1}=i$．

所以 $(p-i)+b_{p-i}=p-i+i-1=p-1$，$(p-i+1)+b_{p-i+1}=p-i+1+i=p+1$．

又因为数列 $\{n+b_n\}$ 是递增数列，所以 $p\notin T$，矛盾．

所以 $S\cap T=\varnothing$．

再证明 $S\cup T=\mathbf{N}^*$．

由题可知 $S\cup T\subseteq\mathbf{N}^*$．

设 $q\in\mathbf{N}^*$ 且 $q\notin S$，因为数列 $\{n+a_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列，

所以存在正整数 j，使得 $q<j+a_j$．

令 $j_0=\min\{j\,|\,q<j+a_j\}$．

若 $j_0=1$，则 $q<1+a_1$，即 $a_1>q-1$，所以 $a_1\geqslant q$．

所以 $b_q=0$，所以 $q+b_q=q\in T$.

若 $j_0>1$，则 $j_0-1+a_{j_0-1}<q<j_0+a_{j_0}$，

所以 $a_{j_0-1}<q-j_0+1\leqslant a_{j_0}$.

所以 $b_{q-j_0+1}=j_0-1$，所以 $(q-j_0+1)+b_{q-j_0+1}=q-j_0+1+j_0-1=q$.

因为 $(q-j_0+1)+b_{q-j_0+1}\in T$，所以 $q\in T$.

所以 $\mathbf{N}^*\subseteq S\cup T$.

综上，$S\cup T=\mathbf{N}^*$ 且 $S\cap T=\varnothing$. ……………………………………………………15 分