2024 届高三数学试题参考答案(文科)

1. A 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|1<x<7\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<7\}$.

2. D 【解析】本题考查平面向量的垂直,考查数学运算的核心素养.

由$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$,可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(m+3)^2-5(2m+1)=0$,解得 $m=2$.

3. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查数学运算的核心素养.

设函数 $f(x)=x^5-a(x+1)$,则 $f'(x)=5x^4-a$,所以 $f'(1)=5-a>1$,解得 $a<4$.

4. A 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略),当直线 $z=x-y$ 经过点$(-3,3)$时,z 取得最小值,且最小值为-6.

5. B 【解析】本题考查正切的和差公式与同角的三角函数的关系,考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan\alpha=\tan(\alpha-\beta+\beta)=\dfrac{2+4}{1-2\times4}=-\dfrac{6}{7}$,所以$\dfrac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{7\tan\alpha-1}{7\tan\alpha+1}=\dfrac{-6-1}{-6+1}=\dfrac{7}{5}$.

6. B 【解析】本题考查充分必要条件的判断,考查逻辑推理的核心素养.

设甲、乙、丙的年龄分别为 x,y,z,根据已知条件得 $x>y$. 若丙的年龄大于乙的年龄,则 $z>y$,则 $y+z>2y$,因为 $2x>2y$,所以 $y+z>2x$ 未必成立. 若乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍,则 $y+z>2x>2y$,则 $y+z>2y$,即 $z>y$,所以丙的年龄大于乙的年龄. 故"丙的年龄大于乙的年龄"是"乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍"的必要不充分条件.

7. C 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(x-5)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)$的图象关于点$(-5,0)$对称,要确保 $f(x)$的零点唯一,数形结合可得 $m\leqslant-5$.

8. B 【解析】本题考查指数与对数的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\begin{pmatrix}\lg 2^{\frac14} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8^{\frac23}\\ 2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14\lg 2 & 2\lg 5\\ \lg 5 & \lg 2^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ \frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 2+\lg 5\\ 4\lg 5+4\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}.$$

9. C 【解析】本题考查平面向量的基本定理与数量积,考查直观想象与数学运算的核心素养.

(方法一)由题意可知,$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 相似,所以$\dfrac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC}|}=2$,所以$\overrightarrow{AO}=\dfrac23\overrightarrow{AC}=\dfrac23(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\dfrac23(\dfrac12\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac13\overrightarrow{AB}+\dfrac23\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=(\dfrac13\overrightarrow{AB}+\dfrac23\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac13\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac23|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac23\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac23\times3^2=10$,所以$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

(方法二)$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\dfrac32\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AD}=-|\overrightarrow{AD}|^2+\dfrac32\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=-9+15=6$.

10. C 【解析】本题考查三角函数图象的识别,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

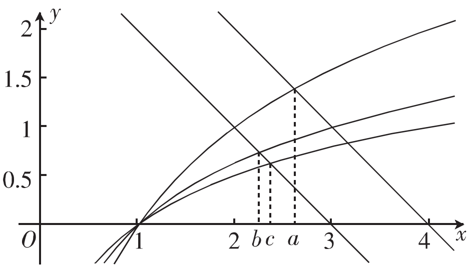
$f(\dfrac{\pi}{2})=-2\sin\varphi$,$g(\dfrac{\pi}{2})=2\sin\varphi=-f(\dfrac{\pi}{2})$,故选 C.

11. D 【解析】本题考查数列的实际应用,考查数学建模的核心素养与应用意识.

设该公司在 2022 年,2023 年,…,2031 年的销售额(单位:万元)分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$. 依题意可得 $a_{n+1}=1.2a_n-2(n=1,2,\cdots,9)$,则 $a_{n+1}-10=1.2(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$,所以数列$\{a_n-10\}$是首项为 90,公比为 1.2 的等比数列,则 $a_n-10=90\times1.2^{n-1}$,即 $a_n=90\times1.2^{n-1}+10$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\dfrac{90\times(1-1.2^{10})}{1-1.2}\approx100+450\times(6.19-1)=2435.5$,故从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为 2435.5 万元.

12. A 【解析】本题考查基本初等函数与比较大小,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

由 $a+\log_2a=4$,$b+\log_3b=c+\log_4c=3$,得 $\log_2a=4-a$,$\log_3b=3-b$,$\log_4c=3-c$,作出函数 $y=\log_2x$,$y=4-x$,$y=3-x$,$y=\log_3x$,$y=\log_4x$ 的大致图象,如图所示,由图可知 $a>c>b$.



13. 若 a,b 都小于 1,则 $a+b\neq2$ 【解析】本题考查命题的逆否命题,考查逻辑推理的核心素养.

原命题的逆否命题要将原命题的条件和结论都否定后再将所得条件与结论对换,“a,b 不都小于 1”的否定为“a,b 都小于 1”.

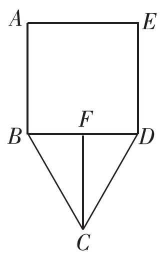
14. $[0,1)$ 【解析】本题考查等差数列,考查逻辑推理的核心素养.

依题意可得 $a_1=a_3-2d=2-2d>0$,且 $d\geqslant0$,所以 $0\leqslant d<1$.

15. $-\dfrac{\pi}{6}$(本题答案不唯一,只要 x 的值满足 $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$即可) 【解析】本题考查三角函数图象的变换与对称性,考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $f(x)=\cos[2(x+\dfrac{\pi}{6})]=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$,令 $2x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

16. $\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 【解析】本题考查导数的实际应用,考查数学建模、直观想象、数学运算的核心素养.



过点 C 作 $CF\perp BD$,垂足为 F. 设 $AB=x(x>0)$,则 $BD=AE=DE=x$,因为 $BC=CD$,所以 $3AB+2BC=12$,则 $BC=6-\dfrac{3}{2}x$. 由 $BC>0$,$BC+CD>BD$,得 $0<x<3$. 在 $\triangle BCF$ 中,$CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{(6-\dfrac{3}{2}x)^2-(\dfrac{1}{2}x)^2}=\sqrt{2x^2-18x+36}$. 记$\triangle BCD$ 的面积为 S,则 $S=\dfrac{1}{2}BD\cdot CF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4-9x^3+18x^2}$. 设函数 $f(x)=x^4-9x^3+18x^2$,则 $f'(x)=4x^3-27x^2+36x=x(4x^2-27x+36)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{27\pm3\sqrt{17}}{8}$. 当 $0<x<\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$时,$f'(x)>0$;当$\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}<x<3$ 时,$f'(x)<$

0. 故当 $x=\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，则 S 取得最大值，此时 $AB=\dfrac{27-3\sqrt{17}}{8}$.

17. 解：(1)依题意可得 $\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \dfrac{11+q}{60}=\dfrac{4}{15},\end{cases}$ …………………… 2 分

解得 $\begin{cases}p=13,\\ q=5.\end{cases}$ …………………… 4 分

(2)将每个数据都减去 28.50 后所得新数据的平均数为 $\frac{1}{60}[0.01\times13+0.02\times6+0\times4+(-0.02)\times11+(-0.01)\times13+0.04\times1+0.03\times7+(-0.03)\times5]=0$，…………… 6 分

所以 $\bar{x}=0+28.50=28.50$，…………………… 7 分

所以 $\bar{x}-s=28.48$，$\bar{x}+s=28.52$，…………………… 9 分

所以这 60 个零件内径尺寸在 $[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$ 内的个数为 $60-1-7-5=47$. …………… 11 分

因为 $\frac{47}{60}<\frac{48}{60}=0.8$，所以这次抽检的零件不合格. …………………… 12 分

18. (1)证明：根据三棱台的几何性质可知，$DE/\!/AB$，…………………… 1 分

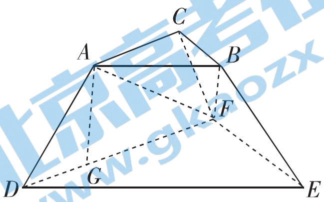
因为 $DE\not\subset$ 平面 ABF，$AB\subset$ 平面 ABF，所以 $DE/\!/$ 平面 ABF. …………………… 3 分

(2)解：根据三棱台的几何性质可知，$DF/\!/AC$. …………………… 4 分

过 A 作 DF 的垂线，垂足为 G.

因为平面 $ACFD\perp$ 平面 DEF，平面 $ACFD\cap$ 平面 $DEF=DF$，

所以 $AG\perp$ 平面 DEF. …………………… 6 分



因为 $AC=AD=CF=6$，$DF=12$，所以 $DG=\dfrac{DF-AC}{2}=3$，…………………… 7 分

$AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=3\sqrt{3}$，则三棱台 $ABC-DEF$ 的高为 $3\sqrt{3}$. …………………… 8 分

因为 $AC\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times3\times6=9$. …………………… 9 分

又 $\dfrac{DF}{AC}=2$，所以 $\triangle DEF$ 的面积为 $9\times2^2=36$. …………………… 10 分

故三棱台 $ABC-DEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times(9+\sqrt{9\times36}+36)\times3\sqrt{3}=63\sqrt{3}$. …………… 12 分

19. 解：(1)由正弦定理及 $a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$，得 $\sin A\sin(A-B)=(\sin C-\sin B)\sin A$. …………………… 1 分

因为 $\sin A>0$，所以 $\sin(A-B)=\sin C-\sin B$，…………………… 2 分

所以 $\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$，…………………… 3 分

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

即 $2\sin B\cos A=\sin B$，…………………… 4 分

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 5 分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) $S=\frac{1}{2}AD\cdot[CD\sin\angle ADC+BD\sin(\pi-\angle ADC)]=\frac{a}{2}\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$，

因为 $S=3\sqrt{3}$，所以 $a=4$. ………………………………………………………………… 8 分

又 $S=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $bc=12$. ……………………………………………………… 9 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则 $a^2=(b+c)^2-3bc$，……………………………………………………………………… 10 分

所以 $b+c=\sqrt{a^2+3bc}=2\sqrt{13}$. ……………………………………………………… 11 分

所以△ABC 的周长为 $4+2\sqrt{13}$. ………………………………………………………… 12 分

20. (1)解：$f'(x)=(2x-n+2)e^x$， ………………………………………………………… 1 分

当 $x<\frac{n-2}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{n-2}{2}$ 时，$f'(x)>0$. …………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\frac{n-2}{2})$，单调递增区间为 $(\frac{n-2}{2},+\infty)$. …………… 3 分

(2)解：由(1)知 $a_n=\frac{n-2}{2}$， ………………………………………………………………… 4 分

当 n 为偶数时，$S_n=\frac{1}{2}[(-1)\times(-1)+(-1)^2\times 0+(-1)^3\times 1+\cdots+(-1)^n\times(n-2)]$

$=\frac{1}{2}[(1+0)+(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-n+3+n-2)]=\frac{1}{2}\times\frac{n}{2}\times 1=\frac{n}{4}$； …… 5 分

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=\frac{n+1}{4}-\frac{n-1}{2}=\frac{3-n}{4}$.

故 $S_n=\begin{cases}\frac{n}{4}, & n\text{ 为偶数}, \\ \frac{3-n}{4}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ ………………………………………………………… 6 分

(3)证明：要证 $f(x)<xe^{2x}$，只需证 $2x-n<xe^x$，即证 $xe^x-2x+n>0$. ……………… 7 分

设函数 $g(x)=xe^x-2x+n$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-2$，$g'(x)$ 的导函数 $g''(x)=(x+2)e^x$，

则 $g'(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，……………………………… 8 分

所以 $g'(x)_{\min}=g'(-2)=-\frac{1}{e^2}-2<0$，当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$， ………………………… 9 分

所以 $g'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上存在唯一零点 m. 因为 $g'(0)<0$，$g'(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{e}-4}{2}>0$，所以 $m\in(0,\frac{1}{2})$. …………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $g(x)$ 在 $(-2,m)$ 上单调递减，在 $(m,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(m)=me^m-$

$2m+n$. 又 $g'(m)=(m+1)e^m-2=0$，所以 $me^m=2-e^m$，

所以 $g(x)_{\min}=2-e^m-2m+n$. …………………………………………………………… 11 分

设函数 $h(m)=2-e^m-2m+n$，则 $h(m)$在$(0,\frac{1}{2})$上单调递减，所以 $h(m)>h(\frac{1}{2})=n+1-\sqrt{e}$，

因为 n 为正整数，所以 $n+1-\sqrt{e}\geqslant 2-\sqrt{e}>0$，所以 $g(x)_{\min}>0$，所以 $f(x)<xe^{2x}$. … 12 分

21.(1)解：设椭圆方程为 $px^2+qy^2=1$， ………………………………………………………… 1 分

则$\begin{cases}q=1,\\ \frac{64}{25}p+\frac{9}{25}q=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}p=\frac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$ ………………………………………………………… 3 分

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

注：若直接设$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得到$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，扣 1 分.

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，$A(m,0)$，$B(n,0)$，

直线 PD：$y+\frac{3}{5}=\frac{y_0+\frac{3}{5}}{x_0+\frac{8}{5}}(x+\frac{8}{5})$，令 $y=0$，得 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$. ……………………… 5 分

直线 PC：$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$. 令 $y=0$，得 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$. ………………………………………… 6 分

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=(n-\frac{x_0}{y_0+1})(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}})=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$. ……

………………………………………………………………………………………………… 8 分

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$，

令 $5m+8=-3n$，$3m=-3n$，得 $n=4$，$m=-4$， …………………………………………… 10 分

则$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=$

-12.

故存在 $A(-4,0)$和 $B(4,0)$，使得$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$是定值，且定值为$-12$. …………………… 12 分

22.解：(1)设点 C 的直角坐标为(x,y)，则 $x=4\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}=-4$，$y=4\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-4$，

所以点 C 的直角坐标为$(-4,-4)$. …………………………………………………………… 2 分

由 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=11$，得 $x^2+y^2-2x-4y=11$， …………………………………… 4 分

所以圆 M 的直角坐标方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=16$. …………………………………… 5 分

(2)设点 P 的坐标为$(1+4\cos\alpha,2+4\sin\alpha)$. ……………………………………………… 7 分

矩形 $PACB$ 的周长为 $2(1+4\cos\alpha+4+2+4\sin\alpha+4)=22+8\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$， ……… 9 分

当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$ 时，矩形 $PACB$ 的周长取得最大值，且最大值为 $22+8\sqrt{2}$. ……… 10 分

23.(1)证明：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})(a+2b+3c)$， ………… 1 分

因为 a,b,c 均为正数，所以由柯西不等式可得$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant\frac{1}{4}\times(1+2+3)^2=9$，…… 3 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$时，等号成立，………… 4 分

故$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 9$. ………… 5 分

(2)解：因为 $a+2b+3c=4$，所以$\frac{1}{2}a+b=\frac{4-3c}{2}$，………… 6 分

所以$|\frac{1}{2}a+b|+|c|=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$. 设函数 $f(c)=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$，

则 $f(c)=|\frac{3}{2}c-2|+|c|=\begin{cases}2-\frac{5}{2}c, c\leqslant 0,\\ 2-\frac{1}{2}c, 0<c<\frac{4}{3},\\ \frac{5}{2}c-2, c\geqslant\frac{4}{3}.\end{cases}$ ………… 8 分

当 $c\leqslant 0$ 时，$f(c)\geqslant 2$；当 $0<c<\frac{4}{3}$时，$\frac{4}{3}<f(c)<2$；当 $c\geqslant\frac{4}{3}$时，$f(c)\geqslant\frac{4}{3}$. ………… 9 分

所以 $f(c)_{\min}=\frac{4}{3}$，故$|\frac{1}{2}a+b|+|c|$的最小值为$\frac{4}{3}$. ………… 10 分