2024北京石景山高三（上）期末

数　　学

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-2,0,2,4\}$， $B=\{x\,|\,x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-2,0,2\}$　　（B）$\{0,2\}$

（C）$\{-2,2\}$　　（D）$\{0,2,4\}$

（2）已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$， z_1,z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，则 $z_1\cdot z_2=$

（A）5　　（B）-5　　（C）$4+2\mathrm{i}$　　（D）$-4+2\mathrm{i}$

（3）$(x^2-\dfrac{2}{x})^4$ 展开式中含 x^5 的项的系数为

（A）4　　（B）-4　　（C）8　　（D）-8

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,m)$， $\boldsymbol{b}=(2,-2)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$

（A）-1　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

（5）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=15$， $S_5=65$，则 $a_1+a_4=$

（A）24　　（B）26　　（C）28　　（D）30

（6）直线 $2x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-4=0$ 有两个不同交点的一个充分不必要条件是

（A）$-5<m<3$　　（B）$0<m<5$

（C）$-9<m<3$　　（D）$-7<m<3$

（7）设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 10)=$

（A）2　　（B）5　　（C）7　　（D）10

（8）在 $\triangle ABC$ 中， $2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则 $\angle A=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

（9）设函数 $f(x)=\ln|x+1|-\ln|x-1|$，则 $f(x)$ 是

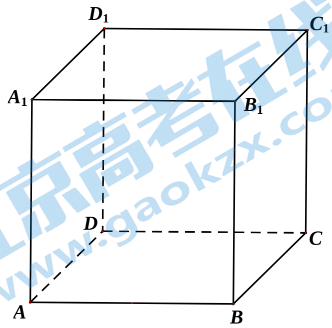
（A）偶函数，且在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增

（B）奇函数，且在区间 $(-1,1)$ 单调递减

（C）偶函数，且在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递增

（D）奇函数，且在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减

（10）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在正方形 ADD_1A_1 内（不含边界），则在正方形 DCC_1D_1 内（不含边界）一定存在一点 Q，使得



（A）$PQ // AC$

（B）平面 PQC_1 // 平面 ABC

（C）$PQ \perp AC$

（D）$AC \perp$ 平面 PQC_1

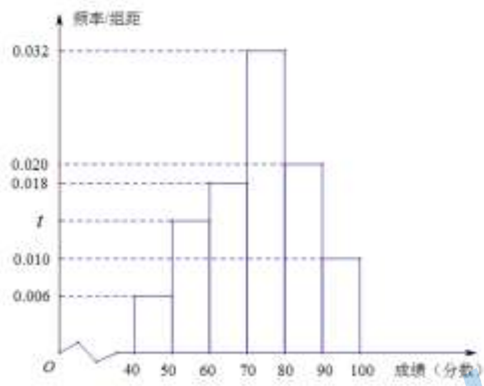
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{4-x}+\lg(x+3)$ 的定义域为__________.

（12）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，则该双曲线的离心率为__________.

（13）某学校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行数学知识测试，记录他们的成绩，测试卷满分 100 分，将数据分成 6 组：[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]，并整理得到如右频率分布直方图，则图中的 t 值为______，若全校学生参加同样的测试，估计全校学生的平均成绩为________（每组成绩用中间值代替）.



（14）已知命题 p：若 $a+b\geqslant 1$，则 $a^3+b^3\geqslant 1$．能说明 p 为假命题的一组 a,b 的值为 $a=$______，$b=$______.

（15）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}=f(a_n)$，给出下列四个结论：

①若 $f(x)=-2x$，则 $\{a_n\}$ 一定是递减数列；

②若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\{a_n\}$ 一定是递增数列；

③若 $f(x)=x^3+1$，$a_1\in(-1,0)$，则对任意 $c>0$，都存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>c$；

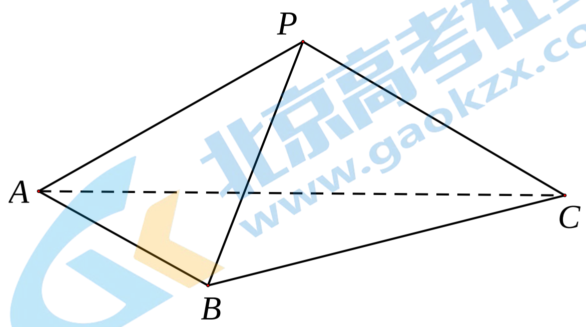
④ 若 $f(x)=kx^2+1\,(k>0)$，$a_1=1$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<2$，则 k 的最大值是 $\dfrac{1}{4}$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$PA=PC=PB=2$，$AB=BC$，$\angle APC=\dfrac{2\pi}{3}$.



（Ⅰ）求证：$AC\perp PB$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.

（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-2\sin^2\dfrac{\omega}{2}x+1\ \ (\omega>0)$.

（Ⅰ）若 $\omega=2$，求 $f(\dfrac{\pi}{12})$ 的值；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减，再从条件①、条件②、条件③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω 的值.

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(\dfrac{\pi}{12},3)$；

条件②：$x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 时，$f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$；

条件③：$x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

某学校体育课进行投篮练习，投篮地点分为 A 区和 B 区，每一个球可以选择在 A 区投篮也可以选择在 B 区投篮，在 A 区每投进一球得 2 分，没有投进得 0 分；在 B 区每投进一球得 3 分，没有投进得 0 分.学生甲在 A，B 两区的投篮练习情况统计如下表：

甲	A 区	B 区
投篮次数	30	20
得分	40	30

假设用频率估计概率，且学生甲每次投篮相互独立.

（Ⅰ）试分别估计甲在 A 区，B 区投篮命中的概率；

（Ⅱ）若甲在 A 区投 3 个球，在 B 区投 2 个球，求甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率；

（Ⅲ）若甲在 A 区，B 区一共投篮 5 次，投篮得分的期望值不低于 7 分，直接写出甲选择在 A 区投篮的最

多次数.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过坐标原点 O 且不与坐标轴重合的直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 E，直线 QE 与椭圆的另一个交点为 M．求证：$\triangle MPQ$ 为直角三角形.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1-x)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)>-\dfrac{1}{2}x^2-x$；

（Ⅲ）设实数 k 使得 $f(x)>kx^2-x$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立，求 k 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

对于项数为 m 的数列 $\{a_n\}$，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$(k=1,2,\cdots,m)$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数，则称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列.

（Ⅰ）若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的 P 数列是 $3,4,4,5$，写出所有的数列 $\{a_n\}$；

（Ⅱ）证明：若数列 $\{a_n\}$ 中存在 a_i 使得 $a_i>a_1$ $(2\leqslant i\leqslant m)$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 使得 $b_{k+1}>b_k$ 成立；

（Ⅲ）数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的 P 数列，数列 $\{c_n\}$ 是 $\{-a_n\}$ 的 P 数列，定义 $d_n=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(a_n-a_i)\right|$，其中

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$．求证：$\{b_n+c_n\}$ 为单调递增数列的充要条件是 $\{d_n\}$ 为单调递增数列.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）B	（3）D	（4）B	（5）C
（6）A	（7）C	（8）B	（9）D	（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

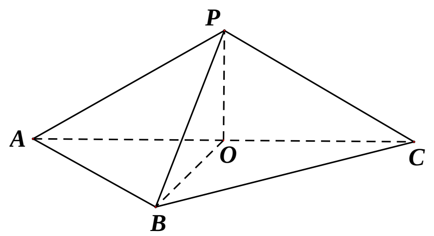
（11）$(-3,4]$　　（12）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　（13）0.014　72.6

（14）$\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{1}{2}$（答案不唯一）　　（15）②③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）(本小题 14 分)

（Ⅰ）证明：取 AC 中点 O，连结 PO,BO



因为 $PA=PC$，所以 $PO\perp AC$；

因为 $AB=BC$，所以 $BO\perp AC$；

因为 $BO\cap PO=O$，所以 $AC\perp$ 平面 PBO；

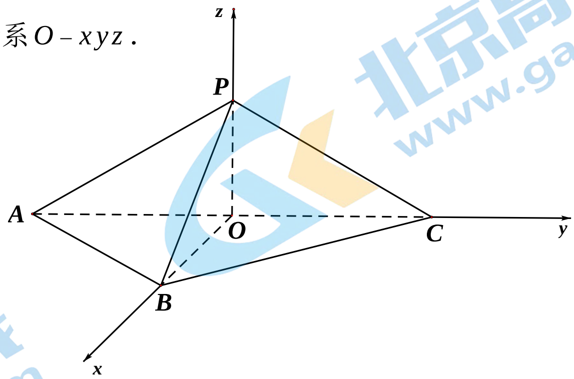
因为 $PB\subset$ 平面 PBO，

所以 $AC\perp PB$.　　　　［ 6 分］

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $PO\perp AC$，$PO\subset$ 平面 PAC，因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $PO\perp$ 平面 ABC，因为 $BO\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp BO$

$PO\perp AC$，$BO\perp AC$，如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由已知 $\angle APC=\dfrac{2\pi}{3}$，易得

$PO=\dfrac{1}{2}PA=1$，$OC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PC=\sqrt{3}$

在 Rt△PBO 中，$OB=\sqrt{PB^2-PO^2}=\sqrt{3}$

所以得 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-1),\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{3},-1)$

设平面 PCB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\sqrt{3}x_0-z_0=0,\\ \sqrt{3}y_0-z_0=0.\end{cases}$$

令 $x_0=1$，则 $y_0=1$，$z_0=\sqrt{3}$. 于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$.

又因为平面 POC 的法向量为 $\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3},0,0)$，

所以 $|\cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由题知二面角 $A-PC-B$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　　　[14 分]

（17）(本小题 13 分)

解:（Ⅰ）因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-2\sin^2\dfrac{\omega}{2}x+1$，所以

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$$

$$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}).$$

因为 $\omega=2$，所以 $f(\dfrac{\pi}{12})=\sqrt{3}$.　　　[5 分]

（Ⅱ）选②

因为 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减，且当 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 时， $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$，

所以 $f_{\max}(x)=f(\dfrac{\pi}{12})=2$， $f_{\min}(x)=f(\dfrac{\pi}{3})=-2$.

此时，由三角函数的性质可得 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$，故 $T=\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=4$.

（Ⅱ）选③

因为 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减，

所以 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\leqslant\dfrac{T}{2}$，即 $\dfrac{2\pi}{\omega}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，

解得 $0<\omega\leqslant 4$.

因为 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，

所以 $f_{\max}(x)=f(\dfrac{\pi}{12})=2$.

所以 $\sin(\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{6})=1$，

即 $\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$

解得 $\omega=4+24k,k\in\mathbf{Z}$.

由 $0<\omega\leqslant 4$ ，可知 $\omega=4$.　　　　　　　　　　[13 分]

（18）(本小题 13 分)

解:（Ⅰ）甲在 A 区投篮 30 次，投进 20 次，所以估计甲在 A 区投篮进球的概率为 $\frac{2}{3}$，

甲在 B 区投篮 30 次，投进 15 次，所以估计甲在 B 区投篮进球的概率为 $\frac{1}{2}$. [2 分]

（Ⅱ）据题意，甲在 A 区进球的概率估计为 $\frac{2}{3}$，在 B 区投篮进球的概率估计为 $\frac{1}{2}$.

设事件 A 为“甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分”

甲在 A 区投 3 个球，得分可能是 $0,2,4,6$ ，在 B 区投 2 个球，得分可能是 $0,3,6$.

则甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的情况有：

A 区 2 分 B 区 0 分，概率估计为 $C_3^1\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{18}$，

A 区 4 分 B 区 0 分，概率估计为 $C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$，

A 区 4 分 B 区 3 分，概率估计为 $C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，

A 区 6 分 B 区 0 分，概率估计为 $(\frac{2}{3})^3\times(\frac{1}{2})^2=\frac{2}{27}$，

A 区 6 分 B 区 3 分，概率估计为 $(\frac{2}{3})^3\times C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{27}$，

则甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率估计为 $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{4}{27}=\frac{11}{18}$.

[10 分]

（Ⅲ）甲在 A 区投篮一次得分的期望估计是 $2\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，甲在 B 区投篮一次得分的期望估计是 $3\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

设甲在 A 区投篮 x 次，则甲在 B 区投篮 $(5-x)$ 次，

则总的期望值估计为 $\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}(5-x)\geqslant 7$，解得 $x\leqslant 3$，

则甲选择在 A 区投篮的次数最多是 3 次 .　　　　　　　　[13 分]

（19）(本小题 15 分)

解:（Ⅰ）由题意知 $\begin{cases}2b=2\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2}\\ c=\sqrt{2}\end{cases}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　　　　[5 分]

（Ⅱ）解：不妨设直线 l 的方程为 $y=kx\ (k\neq 0)$， l 交椭圆于 $P(x_p,y_p)$， $Q(-x_p,-y_p)$.

由题意知 $E(x_p,0)$，所以 $k_{QE}=\dfrac{-y_p}{-x_p-x_p}=\dfrac{y_p}{2x_p}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_p}{x_p}=\dfrac{1}{2}k$ ；

直线 QE 的方程为 $y=\dfrac{k}{2}(x-x_p)$.

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{k}{2}(x-x_p) \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 消去 y 得 $(2+k^2)x^2-2k^2x_p\cdot x+k^2x_p^2-8=0$

易知 $\Delta=(-2k^2x_p)^2-4(2+k^2)(k^2x_p^2-8)>0$

所以 $x_M+x_Q=\dfrac{2k^2\cdot x_p}{2+k^2}$，设 QM 的中点为 D，

则 $x_D=\dfrac{x_M+x_Q}{2}=\dfrac{k^2\cdot x_p}{2+k^2}$.

$y_D=\dfrac{k}{2}(x_D-x_p)=\dfrac{k}{2}(\dfrac{k^2\cdot x_p}{2+k^2}-x_p)=\dfrac{-k\cdot x_p}{2+k^2}$ ；

所以 $k_{OD}=\dfrac{y_D}{x_D}=\dfrac{-k\cdot x_p}{k^2\cdot x_p}=-\dfrac{1}{k}$.

因为在 $\triangle MPQ$ 中， $OD\,//\,PM$ ，所以 $k_{PM}=-\dfrac{1}{k}$.

所以 $k_{PM}\cdot k_{PQ}=-\dfrac{1}{k}\times k=-1$，即 $\angle MPQ=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle MPQ$ 为直角三角形得证.　　　　[15 分]

（20）(本小题 15 分)

解：（Ⅰ） $f'(x)=\dfrac{1}{1-x}\cdot(1-x)'=\dfrac{1}{x-1}$， $k=f'(0)=-1$.

又 $f(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=-x$.　[4 分]

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)+\dfrac{x^2}{2}+x=\ln(1-x)+\dfrac{x^2}{2}+x\ (x<0)$，

$F'(x)=\dfrac{1}{x-1}+x+1=\dfrac{x^2}{x-1}$.

因为 $x<0$，所以 $F'(x)<0$， $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

所以 $F(x)>F(0)=0$.

即当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f(x)>-\dfrac{x^2}{2}-x$.　　　　[8 分]

（III）（1）当 $k \leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$kx^2 - x \leqslant -\frac{x^2}{2} - x$.

由（II）知，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$f(x) > -\frac{x^2}{2} - x$.

所以当 $k \leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$f(x) > kx^2 - x$ 对 $x \in (-\infty, 0)$ 恒成立；

（2）当 $k > -\frac{1}{2}$ 时，令 $h(x) = \ln(1-x) - kx^2 + x$

$$h'(x) = \frac{1}{x-1} - 2kx + 1 = \frac{-2kx^2 + (2k+1)x}{x-1}$$

①当 $k \geqslant 0$ 时，因为 $x \in (-\infty, 0)$，所以 $h'(x) > 0$，$h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

$h(x) < h(0) = 0$，不合题意

②当 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时，$h'(x) = 0$ 得 $x = \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} < 0$

当 $x \in (-\infty, 1 + \frac{1}{2k})$ 时，$h'(x) < 0$，$x \in (1 + \frac{1}{2k}, 0)$ 时，$h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1 + \frac{1}{2k}, 0)$ 上单调递增，则 $x \in (1 + \frac{1}{2k}, 0)$ 时，$h(x) < h(0) = 0$，不合题意.

综上，k 的取值范围是 $k \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$.　　　　　[15 分]

（21）(本小题 15 分)

解：（ I ）$3,4,4,5$，$3,4,3,5$，$3,4,2,5$，$3,4,1,5$　　　[4 分]

（II）假设不存在 $k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ 使得 $b_{k+1} > b_k$ 成立，根据 P 数列定义可知 $b_{k+1} \geqslant b_k$，$b_1 = a_1$，

所以 $b_{k+1} = b_k$，则 $b_{k+1} = b_k = b_{k-1} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1$，

即 $b_{k+1} = b_k = b_{k-1} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = a_1$，

所以 $b_n = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_1$，所以 $a_i \leqslant a_1$，这与已知矛盾，

故若此数列 $\{a_n\}$ 中存在 a_i 使得 $a_i > a_1$ $(2 \leqslant i \leqslant m)$，

则存在 $k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$ 使得 $b_{k+1} > b_k$ 成立.　　[4 分]

（III）必要性：$b_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$c_k = -\min\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$(k = 1, 2, \cdots m)$，

则 $b_k + c_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} - \min\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.

因为 $\{b_n + c_n\}$ 为单调递增数列，所以对所有的 k，$a_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 或 $a_k = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，

否则 $b_k + c_k = b_{k-1} + c_{k-1}$.

因此，所有的 $a_k - a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 同号或为 0，即 $d_n = \left|\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(a_n - a_i)\right| = n - 1$，

所以 $\{d_n\}$ 为单调递增数列.

充分性：因为$\{d_n\}$为单调递增数列，$d_1=0$，$d_n\leqslant n-1$且$d_n\in\mathbf{N}$，

所以只能$d_n=n-1$，所以$a_k-a_i\ (i=1,2,\cdots,k)$同号或为0，所以对所有的$k$，$a_k=\max\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$

或$a_k=\min\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$，

所以$b_k+c_k=\max\{a_1,a_2,\cdots a_k\}-\min\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$.

所以$b_k+c_k>b_{k-1}+c_{k-1}$，即$\{b_n+c_n\}$为单调递增数列．　［15分］

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）