

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(理工类)

2018.5

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x > 1\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(1, 2]$ B. $(1, +\infty)$
C. $(1, 2)$ D. $[1, +\infty)$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1, AC = \sqrt{2}, \angle C = \frac{\pi}{6}$, 则 $\angle B =$

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$
C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

3. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 值为

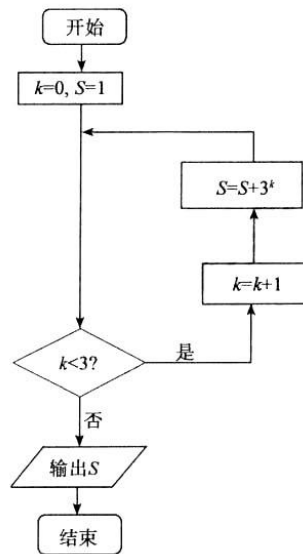
- A. 10 B. 13
C. 40 D. 121

4. 在极坐标系中, 直线 $l: \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 2$ 与圆 $C: \rho = 2 \cos \theta$ 的位置关系为

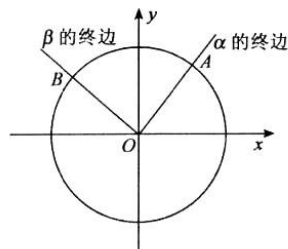
- A. 相交且过圆心
B. 相交但不过圆心
C. 相切
D. 相离

5. 如图, 角 α, β 均以 Ox 为始边, 终边与单位圆 O 分别交于点 A, B , 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$

- A. $\sin(\alpha - \beta)$ B. $\sin(\alpha + \beta)$
C. $\cos(\alpha - \beta)$ D. $\cos(\alpha + \beta)$



(第 3 题图)



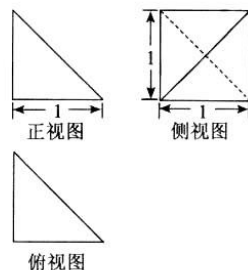
(第 5 题图)

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq a, \\ x^2, & x < a, \end{cases}$ 则“ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增”的
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 某校象棋社团组织中国象棋比赛. 采用单循环赛制, 即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场, 胜者得 2 分, 负者得 0 分, 平局两人各得 1 分. 若冠军获得者得分比其他人多, 且获胜场次比其他人少, 则本次比赛的参赛人数至少为
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
8. 若三个非零且互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 成等差数列且满足 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_3}$, 则称 x_1, x_2, x_3 成一个“ β 等差数列”. 已知集合 $M = \{x \mid |x| \leq 100, x \in \mathbf{Z}\}$, 则由 M 中的三个元素组成的所有数列中, “ β 等差数列”的个数为
- A. 25 B. 50 C. 51 D. 100

第二部分(非选择题 共 110 分)

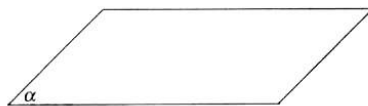
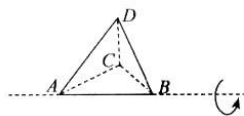
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9. 计算 $\frac{1}{(1+i)^2} =$ _____.
10. 双曲线 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$ 的离心率是 _____; 该双曲线的两条渐近线的夹角是 _____.
11. 若 $(x^3 - \frac{1}{x})^n$ 展开式的二项式系数之和为 8, 则 $n =$ _____; 其展开式中含 $\frac{1}{x^3}$ 项的系数为 _____.(用数字作答)
12. 已知某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的底面和三个侧面中, 直角三角形的个数是 _____.
13. 已知不等式组 $\begin{cases} y \geq 0, \\ |x| + y \leq 2, \\ y + 1 \geq k(x + 1) \end{cases}$ 在平面直角坐标系 xOy 中所表示的平面区域为 D , D 的面积为 S , 则下面结论:
- ①当 $k > 0$ 时, D 为三角形; ②当 $k < 0$ 时, D 为四边形;
③当 $k = \frac{1}{3}$ 时, $S = 4$; ④当 $0 < k \leq \frac{1}{3}$ 时, S 为定值.
- 其中正确的序号是 _____.



(第 12 题图)

14. 如图, 已知四面体 $ABCD$ 的棱 $AB \parallel$ 平面 α , 且 $AB = \sqrt{2}$, 其余的棱长均为 1. 四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度, 且始终在水平放置的平面 α 上方. 如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数, 记为 $S(x)$, 则函数 $S(x)$ 的最小值为 _____; $S(x)$ 的最小正周期为 _____.



(第 14 题图)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题满分 13 分)

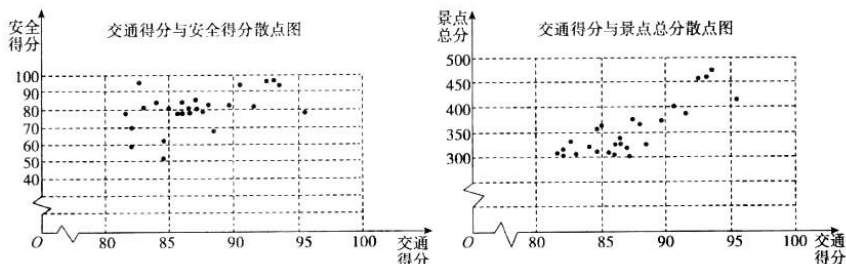
已知函数 $f(x) = 2\sin x(\sin x + \cos x) - a$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $a \in \mathbf{R}$.

(I) 求 a 的值, 并求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 不等式 $f(x) \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

16. (本小题满分 13 分)

某市旅游管理部门为提升该市 26 个旅游景点的服务质量, 对该市 26 个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分. 每项评分最低分 0 分, 最高分 100 分. 每个景点总分为这五项得分之和. 根据考核评分结果, 绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如下:



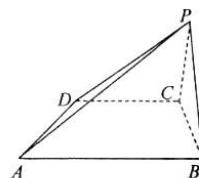
请根据图中所提供的信息, 完成下列问题:

- (I) 若从交通得分排名前 5 名的景点中任取 1 个, 求其安全得分大于 90 分的概率;
- (II) 若从景点总分排名前 6 名的景点中任取 3 个, 记安全得分不大于 90 分的景点个数为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望;
- (III) 记该市 26 个景点的交通平均得分为 \bar{x}_1 , 安全平均得分为 \bar{x}_2 , 写出 \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 的大小关系. (只写出结果)

17. (本小题满分 14 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$. $\triangle PBC$ 是等腰三角形,且 $PB=PC=3$. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC, AD \perp DC, AB=5, AD=4, DC=3$.

- (I) 求证: $AB \parallel$ 平面 PDC ;
- (II) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值;
- (III) 在线段 AP 上是否存在点 H ,使得 $BH \perp$ 平面 ADP ? 请说明理由.



18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = xe^x + ax^2 + 2ax (a \in \mathbf{R})$.

- (I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$, 求 a 的值;
- (II) 当 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

19. (本小题满分 14 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2x$.

- (I) 写出抛物线 C 的准线方程, 并求抛物线 C 的焦点到准线的距离;
- (II) 过点 $(2, 0)$ 且斜率存在的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A, B , 且点 B 关于 x 轴的对称点为 D , 直线 AD 与 x 轴交于点 M .
 - (i) 求点 M 的坐标;
 - (ii) 求 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OAB$ 面积之和的最小值.

20. (本小题满分 13 分)

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在 $a_p = a_q (p, q \in \mathbf{N}^+, p > q)$, 并且只要 $a_p = a_q$, 就有 $a_{p+i} = ta_{q+i} (t$ 为常数, $i=1, 2, 3, \dots)$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 T .

- (I) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 T , 且 $t=3, a_1=4, a_2=5, a_4=1, a_5=5, a_7+a_8+a_9=36$, 求 a_3 ;
- (II) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n + b (b \in \mathbf{R})$, 证明存在无穷多个 b 的不同取值, 使得数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T ;
- (III) 设 $\{b_n\}$ 是一个无穷数列, 数列 $\{a_n\}$ 中存在 $a_p = a_q (p, q \in \mathbf{N}^+, p > q)$, 且 $a_{n+1} = b_n \cos a_n (n \in \mathbf{N}^+)$. 求证: “ $\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 T ”的充分不必要条件.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试答案（理工类）

2018. 5

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	B	C	A	C	B

二、填空题：（本题满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$-\frac{1}{2}i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$	3	-1	3
						③④
						$\frac{\sqrt{2}}{4}$
						π

三、解答题：（本题满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（I）根据题意得 $2\sin\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - a = 1$.

即 $2 \times (1+0) - a = 1$, 解得 $a = 1$.

又 $f(x) = 2\sin x(\sin x + \cos x) - 1$

$$= 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 1$$

$$= \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

得 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, 所以 $-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$. ……7 分

（II）由（I）可知 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$.

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$.

所以 $-1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

当 $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1 .

因为不等式 $f(x) \geq m$ 恒成立等价于 $m \leq f(x)_{\text{最小值}}$,

所以 $m \leq -1$.

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1]$. ……13 分

16. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由图可知, 交通得分前 5 名的景点中安全得分大于 90 分的景点有 3 个.

故从交通得分前 5 名的景点中任取 1 个, 其安全得分大于 90 分的概率为 $\frac{3}{5}$. ……3 分

(II) 由图可知, 景点总分前 6 名的景点中安全得分不大于 90 分的景点有 2 个.

设从景点总分前 6 名的景点中任取 3 个, 安全得分不大于 90 分的个数为 ξ , 则 ξ 的取值为

0, 1, 2.

$$\text{所以 } P(\xi=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5};$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{所以 } E\xi = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1. \quad \text{……10 分}$$

(III) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$. ……13 分

17. (本小题满分 14 分)

证明: (I) 因为 $AB \parallel DC$,

又因为 $AB \subset$ 平面 PDC , $DC \subset$ 平面 PDC ,

所以 $AB \parallel$ 平面 PDC . ……3 分

(II) 取 BC 中点 F , 在 $\triangle PBC$ 中, 因为 $PB = PC$, 所以 $PF \perp BC$.

又易知 $AC = AB = 5$, 所以 $AF \perp BC$.

又因为平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$,

所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $PF \perp AF$.

以 F 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$.

在梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = 4, DC = 3, AB = 5$,

所以 $BC = 2\sqrt{5}$, $AF = 2\sqrt{5}$.

又因为 $PB = 3$, 所以 $PF = 2$. 于是有 $P(0, 0, 2), A(2\sqrt{5}, 0, 0), B(0, \sqrt{5}, 0), C(0, -\sqrt{5}, 0)$.

所以 $\overrightarrow{FA} = (2\sqrt{5}, 0, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{5}, -2)$.

因为 $AF \perp$ 平面 PBC , 所以 $\overrightarrow{FA} = (2\sqrt{5}, 0, 0)$ 是平面 PBC 的一个法向量.

设平面 PBA 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0, \\ \sqrt{5}y - 2z = 0. \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} y = 2x, \\ \sqrt{5}y = 2z. \end{cases}$$

令 $y = 2$, 则 $\mathbf{m} = (1, 2, \sqrt{5})$.

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{FA}, \mathbf{m} \rangle = \frac{(2\sqrt{5}, 0, 0) \cdot (1, 2, \sqrt{5})}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+4+5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

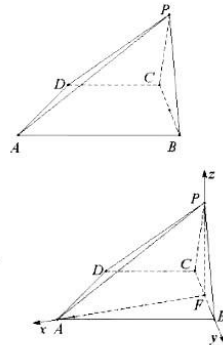
由图可知, 二面角 $A-PB-C$ 为锐角,

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……9 分

(III) 因为 $AB = 5, DC = 3$, 且 $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{5}(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0) + (0, -2\sqrt{5}, 0) = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$



设平面 ADP 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\frac{4\sqrt{5}}{5}x_1 - \frac{8\sqrt{5}}{5}y_1 = 0, \\ -2\sqrt{5}x_1 + 2z_1 = 0. \end{cases} \quad \text{所以} \quad \begin{cases} x_1 = -2y_1, \\ \sqrt{5}x_1 = z_1, \end{cases}$$

令 $x_1 = 2$, 则 $\mathbf{n} = (2, -1, 2\sqrt{5})$.

假设线段 AP 上存在点 H , 使得 $BH \perp$ 平面 ADP , 且设 $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AP} (\lambda \in [0, 1])$.

所以 $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AP} = \lambda(-2\sqrt{5}, 0, 2) = (-2\sqrt{5}\lambda, 0, 2\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = (2\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0) + (-2\sqrt{5}\lambda, 0, 2\lambda) = (2\sqrt{5}(1-\lambda), -\sqrt{5}, 2\lambda)$.

因为 $BH \perp$ 平面 ADP , 所以 $\overrightarrow{BH} \parallel \mathbf{n}$.

所以 $\frac{2\sqrt{5}(1-\lambda)}{2} = \frac{-\sqrt{5}}{-1} = \frac{2\lambda}{2\sqrt{5}}$. 显然 λ 不存在.

所以假设不成立, 故线段 AP 上不存在点 H , 使得 $BH \perp$ 平面 ADP . ……14 分

18. (本小题满分 13 分)

解: 由题意可知 $f'(x) = (x+1)(e^x + 2a)$.

(I) 因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $3x + y = 0$,

所以 $f(0) = 0, f'(0) = -3$. 由 $e^0 + 2a = -3$ 得 $a = -2$. ……4 分

(II) 当 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 时, 令 $f'(x) = (x+1)(e^x + 2a) = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = \ln(-2a)$.

① 当 $\ln(-2a) < -1$, 即 $a \in (-\frac{1}{2e}, 0)$ 时,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, \ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a), -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a), -1)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln(-2a))$ 和 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(\ln(-2a)) = a \ln^2(-2a) < 0, f(0) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

②当 $\ln(-2a) = -1$, 即 $a = -\frac{1}{2e}$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	$f(-1) = -a - \frac{1}{e}$	\nearrow

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(0) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

③当 $-1 < \ln(-2a) < 0$, 即 $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e})$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a), +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, \ln(-2a))$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(-2) = -2e^{-2} + 4a - 4a = -2e^{-2} < 0$, $f(-1) = -a - \frac{1}{e}$,

$f(\ln(-2a)) = a \ln^2(-2a) < 0$, $f(0) = 0$,

所以当 $a \in (-\frac{1}{e}, -\frac{1}{2e})$ 时, 此时 $f(-1) = -a - \frac{1}{e} < 0$, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $a = -\frac{1}{e}$ 时, 此时 $f(-1) = 0$, 函数 $f(x)$ 有两个零点;

当 $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e})$ 时, 此时 $f(-1) = -a - \frac{1}{e} > 0$, 函数 $f(x)$ 有三个零点.

④当 $\ln(-2a) = 0$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 显然函数 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述, (1) 当 $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

(2) 当 $a \in \{-\frac{1}{e}, -\frac{1}{2}\}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点;

(3) 当 $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e})$ 时, 函数 $f(x)$ 有三个零点. ……13 分

另外的解法提示: $f(x) = x(e^x + ax + 2a)$, 易知 $f(0) = 0$. 即可考虑

$g(x) = e^x + ax + 2a$ 的零点.

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意可知, 抛物线的准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$.

抛物线 C 的焦点到准线的距离为 1. ……4 分

(II) 由已知设直线 $l: y = k(x-2)$, 显然 $k \neq 0$; $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$.

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = k(x-2), \end{cases} \text{ 得 } ky^2 - 2y - 4k = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{2}{k}, y_1 y_2 = -4.$$

(i) 因为点 B, D 关于 x 轴对称, 所以 $D(x_2, -y_2)$.

$$\text{所以直线 } AD \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = \frac{x_1(y_1 + y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{y_1 + y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2}$$

$$= \frac{y_1^2 y_2 + y_2^2 y_1}{2(y_1 + y_2)} = \frac{1}{2} y_1 y_2 = -2.$$

所以 $M(-2, 0)$. ……10 分

(ii) 记 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OAB$ 面积分别为 $S_{\triangle OAM}$, $S_{\triangle OAB}$, 设 $P(2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle OAM} + S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |OM| \times |y_1| + \frac{1}{2} |OP| \times (|y_1| + |y_2|) \\ &= 2|y_1| + |y_2| \geq 2\sqrt{2}|y_1| \times |y_2| = 2\sqrt{2}|y_1 y_2| = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

当且仅当 $|y_2| = 2|y_1|$, 即 $y_1 = \pm\sqrt{2}, y_2 = \mp 2\sqrt{2}$ 时,

$\triangle OAM$ 与 $\triangle OAB$ 面积之和的最小值是 $4\sqrt{2}$. ……14 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 因为 $\{a_n\}$ 具有性质 T , 且 $t = 3$, $a_3 = a_2 = 5$,

所以 $a_6 = 3a_3, a_7 = 3a_4 = 3, a_8 = 3a_5 = 15, a_9 = 3a_6 = 9a_3,$

由 $a_7 + a_8 + a_9 = 36$, 得 $3 + 15 + 9a_3 = 36$, 所以 $a_3 = 2$, 经检验符合题意. ……3 分

(II) 证明: 因为无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n + b$,

所以 $a_1 = 2 + b$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. 若存在 $a_p = a_q (p > q)$, 则 $q = 1$.

取 $b = 2^{p-1} - 2 (p \in \mathbf{N}, \text{且 } p \geq 2, p \text{ 为常数}),$

则 $a_p = 2^{p-1} = a_1$, 对 $t = 2^{p-1}$, 有 $a_{p+i} = 2^{p+i-1} = 2^{p-1} a_{1+i} = t a_{1+i} (i = 1, 2, 3, \dots),$

所以 $\{a_n\}$ 具有性质 T , 且 b 的不同取值有无穷多个. ……8 分

(III) 证明: 当 $\{b_n\}$ 为常数列时, 有 $b_n = m$ (常数), $a_{n+1} = m \cos a_n (n \in \mathbf{N}^*),$

对任意的正整数 a_1 , 因为存在 $a_p = a_q$, 则由 $m \cos a_p = m \cos a_q$, 必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$, 进而

有 $a_{p+i} = a_{q+i} (i = 1, 2, 3, \dots)$, 这时 $t = 1, a_{p+i} = t a_{q+i} (i = 1, 2, 3, \dots),$

所以 $\{a_n\}$ 都具有性质 T .

所以, “ $\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 T ”的充分条件.

取 $b_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n = 2k - 1, \\ 0, n = 2k, \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*),$ 对任意正整数 a_1 , 由 $a_n = b_{n-1} \cos a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$

得, $a_2 = b_1 \cos a_1 = \frac{\pi}{2} \cos a_1$, 因为 a_1 为正整数, 所以 $a_2 \neq 0$, 且 $a_1 \neq a_2$.

$a_3 = b_2 \cos a_2 = 0, a_4 = b_3 \cos a_3 = \frac{\pi}{2}, \dots,$

即, 当 $n \geq 3$ 时, $a_n = \begin{cases} 0, n = 2k + 1, \\ \frac{\pi}{2}, n = 2k + 2, \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*).$

对任意 p, q , 则 p, q 同为奇数或同为偶数.

① 若 p, q 同为偶数, 则 $a_{p+i} = a_{q+i} (i = 1, 2, 3, \dots)$ 成立;

② 若 p, q 同为奇数, 则 $a_{p+i} = a_{q+i} (i = 1, 2, 3, \dots)$ 成立.

所以对于任意 p, q 满足 $a_p = a_q$, 则取 $t = 1, a_{p+i} = 1 \times a_{q+i}$.

故 $\{a_n\}$ 具有性质 T , 但 $\{b_n\}$ 不为常数列.

所以“ $\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 T ”的不必要条件.

证毕

……13 分