

## 高二数学答案及评分参考

2023.7

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. D                      2. B                      3. C                      4. B                      5. A  
6. B                      7. D                      8. A                      9. D                      10. C

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

11.  $(0,1) \cup (1,+\infty)$                       12. -96                      13. 0  
14.  $\frac{2}{3}$     15. ③ ④

注：第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16. (本小题 13 分)

解：(I) 由  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ，得  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ . ..... 2 分

则  $f(1) = -2$ ， $f'(1) = -3$ ， ..... 4 分

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $3x + y - 1 = 0$ . ..... 6 分

(II)  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ ， $x \in [0, 4]$ ，

由  $f'(x) = 0$ ，得  $x = 0$  或  $x = 2$ . ..... 7 分

随着  $x$  的变化， $f(x)$ ， $f'(x)$  的变化情况如下：

$x$	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

..... 9 分

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(2, 4)$ ，单调递减区间为  $(0, 2)$ .

从而  $f(x)$  的最小值  $f(x)_{\min} = f(2) = -4 + a = 0$ ，解得  $a = 4$ . ..... 11 分

又因为  $f(0) = a = 4$ ， $f(4) = 16 + a = 20$ ，

所以  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值  $f(x)_{\max} = 20$ . ..... 13 分

17. (本小题 13 分)

解: (I) 由  $a_1, a_3$  的等差中项等于  $\frac{5}{4}a_2$ , 得  $2 \times \frac{5}{4}a_2 = a_1 + a_3$ , ..... 2 分

所以  $\frac{5}{2}a_1q = a_1 + a_1q^2$ , 即  $2q^2 - 5q + 2 = 0 (a_1 \neq 0)$ . ..... 4 分

解得  $q = \frac{1}{2}$  或  $q = 2$  (舍). ..... 6 分

由  $a_4 = a_1q^3$ , 得  $a_1 = 8$ . ..... 7 分

所以  $a_n = a_1q^{n-1} = 2^{4-n} (n \in \mathbb{N}^*)$ . ..... 9 分

(II) 因为  $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{4-n} = 4-n$ , ..... 11 分

所以  $b_1 = 3, b_{n+1} - b_n = -1 (n \in \mathbb{N}^*)$ .

所以数列  $\{b_n\}$  是首项为 3, 公差为 -1 的等差数列. .... 13 分

18. (本小题 14 分)

解: (I) 共选出了 17 名学生, 其中有 5 人的阅读量超过 10 本, ..... 1 分

所以此次活动中学生阅读量超过 10 本的概率为  $\frac{5}{17}$ . ..... 3 分

(II) 由题意, 从男生中随机选出 1 人其阅读量超过 10 本的概率为  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ; ..... 4 分

从女生中随机选出 1 人, 其阅读量超过 10 本的概率为  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ . ..... 5 分

由题设,  $X$  的可能取值为 0, 1, 2. .... 6 分

且  $P(X=0) = (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ;

$P(X=1) = \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) + (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ ;

$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ . ..... 9 分

所以  $X$  的分布列为:

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

..... 10 分

$X$  的数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ . ..... 11 分

(III)  $s_0^2 > s_1^2$ . ..... 14 分

19. (本小题 15 分)

解: (I) 设该轮船航行速度为  $x$  km/h 时, 其每小时的可变成本为  $P$  (单位:元),

则  $P = kx^3$ , 其中  $k \neq 0$ .

由题意, 得  $8 = k \times 10^3$ , 解得  $k = \frac{1}{125}$ , 故  $P = \frac{1}{125}x^3$ . ..... 2分

所以每小时的运输成本  $Q = \frac{1}{125}x^3 + 128$ , 其中  $x > 0$ . ..... 4分

(II) 该轮船每千米的运输成本  $y = f(x) = \left(\frac{1}{125}x^3 + 128\right) \frac{1}{x} = \frac{1}{125}x^2 + \frac{128}{x}$ , ..... 6分

求导, 得  $f'(x) = \frac{2}{125}x - \frac{128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8000)}{125x^2}$ , 其中  $x > 0$ . ..... 8分

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 20$ . ..... 10分

由  $f'(x) > 0$ , 解得  $x > 20$ ; 故  $f(x)$  在区间  $(20, +\infty)$  上单调递增;

由  $f'(x) < 0$ , 解得  $x < 20$ ; 故  $f(x)$  在区间  $(0, 20)$  上单调递减. ..... 11分

所以当  $x = 20$  时,  $f(x)$  取得最小值  $f(20) = 9.6$ . ..... 13分

故当该轮船的航行速度为 20 km/h 时, 其每千米的运输成本  $y$  最低, 且为 9.6 元. ..... 15分

20. (本小题 15 分)

解: (I) 函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , ..... 1分

且  $f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x}$ . ..... 3分

由  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 2$ . ..... 4分

随着  $x$  的变化,  $f(x)$ ,  $f'(x)$  的变化情况如下:

$x$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(2, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(0, 2)$ . ..... 7分

(II) 由题意, 得  $f'(x) = \frac{x^2 - x - a}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

由  $f(x)$  存在两个不同的极值点, 得  $f'(x) = \frac{x^2 - x - a}{x} = 0$  存在两个不同的正实数根,

即方程  $x^2 - x - a = 0$  存在两个不同的正实数根  $x_1, x_2$ , ..... 9 分

所以  $\begin{cases} \Delta = 1 + 4a > 0, \\ x_1 x_2 = -a > 0, \end{cases}$  即  $-\frac{1}{4} < a < 0$ . ..... 10 分

又因为  $x_1^2 - x_1 - a = 0$ ,  $x_2^2 - x_2 - a = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 x_2 = -a$ ,

所以  $f(x_1) + f(x_2) = (\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 - a \ln x_1) + (\frac{1}{2}x_2^2 - x_2 - a \ln x_2)$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + a - a \ln(x_1 x_2)$$

$$= -a \ln(-a) + a - \frac{1}{2}. \quad \text{..... 12 分}$$

令  $g(x) = -x \ln(-x) + x - \frac{1}{2}$ , 其中  $x \in (-\frac{1}{4}, 0)$ , ..... 13 分

由  $g'(x) = -\ln(-x) > 0$ , 得  $g(x)$  在  $(-\frac{1}{4}, 0)$  上单调递增,

所以  $g(x) > g(-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln 4 > -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln e^2 = -\frac{5}{4}$ , 即  $f(x_1) + f(x_2) > -\frac{5}{4}$ .

..... 15 分

21. (本小题 13 分)

解: (I) 数列  $A$  具有性质  $P(2)$ , 数列  $B$  不具有性质  $P(2)$ . ..... 3 分

(II) 由数列  $\{a_n\}$  具有性质  $P(2)$ , 得  $a_{n+4} + a_n = 2a_{n+2}$ ,

所以  $a_{n+4} - a_{n+2} = a_{n+2} - a_n$ , 即  $a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = a_7 - a_5 = \dots$ ,

所以数列  $A_1: a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k-1}, \dots$  是等差数列. .... 4 分

又因为  $a_1 = 1$ ,  $a_n \in \mathbf{Z}$ ,

所以数列  $A_1$  的公差  $d_1 \in \mathbf{Z}$ ,

同理, 得数列  $A_2: a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}, \dots$  是等差数列, 公差  $d_2 \in \mathbf{Z}$ . ..... 5 分

## 北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二**>**期末试题**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

