江淮十校2023届高三第一次联考

数学试题

2022.9

命审单位：宣城中学　　命审人：沈张军　梅垚　潘华志

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题12小题，每小题5分，共60分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid\ln x<1\}$，$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $\complement_U A=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0\}$

2. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量，且 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

3. 已知 $\dfrac{2z-1}{1+\bar{z}}=\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部是

A. -1　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. i

4. 一家金店使用一架两臂不等长的天平称黄金. 一位顾客到店里购买10克黄金，售货员先将5克的砝码放在天平左盘中，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将5克的砝码放在天平右盘中，取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡，最后将两次称得的黄金交给顾客，则该顾客实际得到的黄金

A. 等于10克　　B. 小于10克　　C. 大于10克　　D. 不能确定

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，满足 $a_1=\dfrac{1}{8}$，$2a_2=S_3-3a_1$，则 T_n 的最小值是

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{32}$　　C. $\dfrac{1}{64}$　　D. $\dfrac{1}{128}$

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则下列判断错误的是

A. $BD_1\perp$ 平面 ACB_1　　B. 平面 A_1C_1D // 平面 ACB_1

C. 直线 BD_1 过 $\triangle A_1C_1D$ 的垂心　　D. 平面 ACB_1 与平面 $ABCD$ 夹角为 $45°$

7. 已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左右焦点，点 P 为椭圆上一点，以 F_2 为圆心的圆与直线 PF_1 恰好相切于点 P，则 $\angle PF_1F_2$ 是

A. $45°$　　B. $30°$　　C. $60°$　　D. $75°$

8. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+3)=-f(x)$，且当 $x\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$ 时，$f(x)=2x-1$，则 $f(-2021)+f(2022)+f(2024)$ 的值是

A. 2　　B. -1　　C. 0　　D. -3

9. 已知在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle A=60^\circ$，把 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起到 $\triangle A'BD$ 位置，若二面角 $A'-BD-C$ 大小为 120°，则四面体 $A'BCD$ 的外接球体积是

A. $\frac{7}{3}\pi$　　B. $\frac{28}{3}\pi$　　C. $\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$　　D. $\frac{7\sqrt{21}}{27}\pi$

10. 下列四个不等式中，成立的个数是

①$\ln 3<\frac{3}{2}\ln 2$；②$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}$；③$4^{\sqrt{3}}<12$；④$e^{0.1}>\sqrt{1.2}$；

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知函数 $f(x)=\cos|x|-2|\sin x|$，以下结论正确的是

A. π 是 $f(x)$ 的一个周期

B. 函数在 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 单调递减

C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{5},1]$

D. 函数 $f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 内有 6 个零点

12. 甲口袋中有 3 个红球，2 个白球和 5 个黑球，乙口袋中有 3 个红球，3 个白球和 4 个黑球，先从甲口袋中随机取出一球放入乙口袋，分别以 A_1，A_2 和 A_3 表示由甲口袋取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙口袋中随机取出一球，以 B 表示由乙口袋取出的球是红球的事件，则下列结论中正确的是

A. $P(B|A_2)=\frac{4}{11}$

B. 事件 A_1 与事件 B 相互独立

C. $P(A_3|B)=\frac{1}{2}$

D. $P(B)=\frac{3}{10}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 在 $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中只有第 5 项二项式系数最大，则常数项为________.

14. 安徽省地形具有平原、台地（岗地）、丘陵、山地等类型，其中丘陵地区占了很大比重，因此山地较多，著名的山也有很多. 某校开设了研学旅行课程，该校有 6 个班级分别选择黄山、九华山、天柱山中的一座山作为研学旅行的地点，每座山至少有一个班级选择，则恰好有 2 个班级选择黄山的方案有________种.

15. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，延长 FB 交准线于点 C，分别过点 A，B 作准线的垂线，垂足分别记为 M，N，若 $|BC|=2|BN|$，则 $\triangle AFM$ 的面积为________.

16. 若不等式 $e^x\geqslant(a+1)x+b$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $(a+1)b$ 的最大值为________.

三、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=3$，$2(a_{n+1}+1)=a_n+a_{n+2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）若 $c_n=2\left(a_n+n-\frac{5}{4}\right)$，证明：$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\cdots+\frac{1}{c_n}<1$.

18.（本题满分 12 分）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，其外接圆的半径为$\sqrt{3}$，且满足$4\sqrt{3}\sin B\cos C=2a-c$.

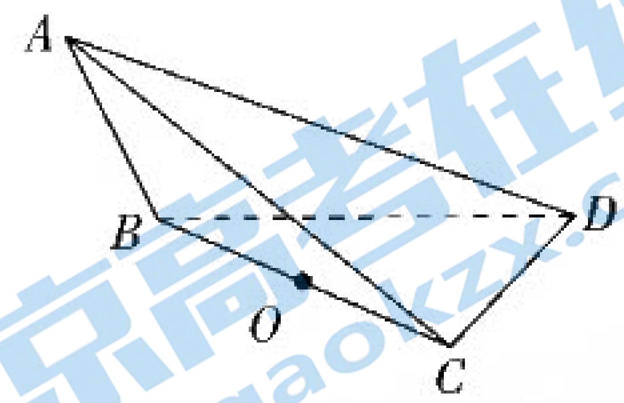
（1）求角B.

（2）若AC边上的中线长为$\frac{5}{2}$，求$\triangle ABC$的面积和周长.

19.（本题满分 12 分）在三棱锥$A-BCD$中，$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，点O为BC的中点，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，$BD\perp CD$且$BD=CD=1$，$AD=\sqrt{3}$.

（1）求证平面$BCD\perp$平面AOD.

（2）E为线段AC上的点，若ED与面BCD所成的角为$\frac{\pi}{6}$，求CE的长度.



20.（本题满分 12 分）华容道是古老的中国民间益智游戏，以其变化多端、百玩不厌的特点与魔方、独立钻石一起被国外智力专家并称为“智力游戏界的三个不可思议”. 据《资治通鉴》注释中说“从此道可至华容也”. 通过移动各个棋子，帮助曹操从初始位置移到棋盘最下方中部，从出口逃走. 不允许跨越棋子，还要设法用最少的步数把曹操移到出口. 2021 年 12 月 23 日，在厦门莲坂外图书城四楼佳希魔方，厦门市新翔小学六年级学生胡宇帆现场挑战“最快时间解 4×4 数字华容道”世界纪录，并以 4.877 秒打破了“最快时间解 4×4 数字华容道”世界纪录，成为了该项目新的世界纪录保持者.

（1）小明一周训练成绩如表所示，现用$y=\hat{b}x+\hat{a}$作为经验回归方程类型，求出该回归方程.

第x（天）	1	2	3	4	5	6	7
用时y（秒）	105	84	49	39	35	23	15

(2)小明和小华比赛破解华容道,首局比赛小明获得胜利的概率是0.6,在后面的比赛中,若小明前一局胜利,则他赢下后一局的概率是0.7,若小明前一局失利,则他赢下后一局比赛的概率为0.5,比赛实行“五局三胜”,求小明最终赢下比赛的概率是多少.

参考公式:对于一组数据(u_1,v_1),(u_2,v_2),…,(u_n,v_n),其回归直线$\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$,$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$

参考数据:$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=140$,$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=994$

21.(本题满分12分)已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$过点$(2,2)$,且离心率为$\sqrt{3}$.

(1)求双曲线C的方程.

(2)设直线l是圆$O:x^2+y^2=4$上的动点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$处的切线,l与双曲线C交于不同的两点A,B,证明:以AB为直径的圆过坐标原点.

22.(本题满分12分)已知函数$f(x)=x-1+\dfrac{ax^2}{e^x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=1$时,求$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

(2)若$g(x)=e^{x-1}f(x-1)+x(1-\ln x)$在$x\in[1,+\infty)$时有两个零点,求实数$a$的取值范围.

江淮十校 2023 届高三第一次联考

数学试题参考答案

一、选择题(本大题 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	D	B	A	C	C	D	A	A	C	B	C	D

1.【答案】D

【解析】由 $\ln x<1$ 得 $0<x<e$，所以 $A=\{x\in \mathbf{N}|\ln x<1\}=\{1,2\}$，因为 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $\complement_U A=\{-2,-1,0\}$.

2.【答案】B

【解析】由 $(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$ 得 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，即 $2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$ 得 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3$，所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$.

3.【答案】A

【解析】设 $z=a+bi$，由 $\dfrac{2z-1}{1+\bar{z}}=i$ 得 $2(a+bi)-1=i(1+a-bi)$，即 $2a-1+2bi=b+(a+1)i$，

所以 $2a-1=b$ 且 $2b=a+1$ 得 $a=1,b=1$，所以 $z=1+i$，从而 $\bar{z}=1-i$.

4.【答案】C

【解析】设天平的左右臂长分别为 $m,n(m\neq n)$，第一次加黄金 x 克，第二次加黄金 y 克，

则根据物理知识可得 $5m=xn$，且 $(5+y)m=(x+5)n$，即 $my=5n$，

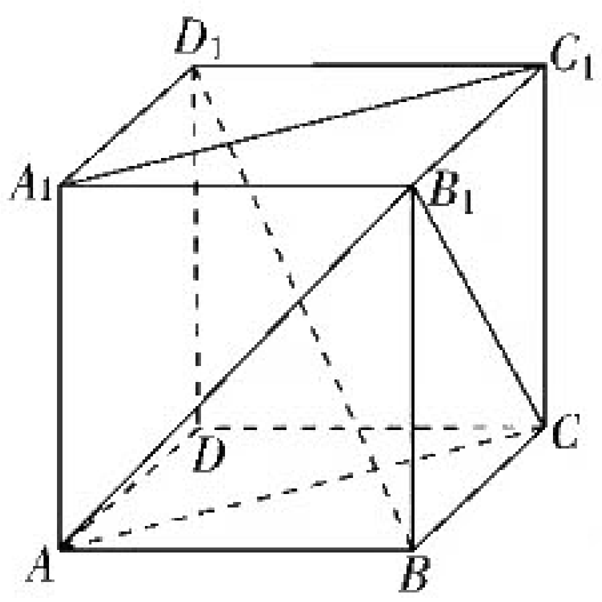
所以 $x+y=\dfrac{5m}{n}+\dfrac{5n}{m}=5\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)\geqslant 5\times 2\sqrt{\dfrac{m}{n}\times\dfrac{n}{m}}=10$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立，

因为 $m\neq n$，所以等号不成立，所以 $x+y>10$ 克.

5.【答案】C

【解析】设公比为 q(显然 $q\neq 1$)，由 $2a_2=S_3-3a_1$ 得 $2a_1q=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}-3a_1$，即 $q^2-q-2=0$，得 $q=2$ 或 -1(舍去)，所以 T_n 最小值为 $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{64}$.

6.【答案】D



【解析】由 $BC_1\perp B_1C$，$D_1C_1\perp B_1C$，得 $B_1C\perp$ 平面 BD_1C_1 得 $B_1C\perp BD_1$，

同理可得 $AC\perp BD_1$，所以 $BD_1\perp$ 平面 ACB_1，故 A 正确；

由 $A_1C_1/\!/AC$，$A_1D/\!/B_1C$ 得平面 $A_1C_1D/\!/$ 平面 ACB_1，故 B 正确；

由三棱锥 $D_1-A_1C_1D$ 为正三棱锥(或由 D_1A_1,D_1D,D_1C_1 两两垂直)得直线 BD_1 过 $\triangle A_1C_1D$ 的垂心，故 C 正确；

连接 BD 交 AC 于 O 点，连接 B_1O，由 $B_1O\perp AC$，$BO\perp AC$，

得 $\angle B_1OB$ 即为所求角，因为 $\tan\angle B_1OB=\dfrac{BB_1}{BO}=\sqrt{2}$，故 D 错误.

7.【答案】A

【解析】设$|PF_2|=t$,由椭圆定义得$PF_1=4-t$,由$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$得$(4-t)^2+t^2=(2\sqrt{2})^2=8$,得$t^2-4t+4=0$,得$t=2$,得$PF_1=PF_2$,所以$\angle PF_1F_2=45°$.

8.【答案】A

【解析】由$f(x+3)=-f(x)$得函数$f(x)$为周期函数,周期为6,所以$f(-2\ 021)=f(-5)=f(1)=1$,$f(2\ 022)=f(0)=0$,$f(2\ 024)=f(2)$,由函数$f(x)$为奇函数,得$f(x+3)=-f(x)=f(-x)$,得函数$f(3)$图象关于$x=\frac{3}{2}$对称,即$f(2)=f(1)=1$,所以$f(-2\ 021)+f(2\ 022)+f(2\ 024)=2f(1)=2$.

9.【答案】C

【解析】设$\triangle A'BD$的外接圆圆心为O_1,$\triangle BCD$的外接圆圆心为O_2,过这两点分别作平面$\triangle A'BD$、平面$\triangle BCD$的垂线,交于点O,则O就是外接球的球心;取BD中点E,连接O_1E,O_2E,OE,OC,因为$O_1E\perp BD$,$O_2E\perp BD$,所以$\angle O_1EO_2=120°$,因为$\triangle A'BD$和$\triangle BCD$是正三角形,所以$O_2E=O_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$,由$\triangle A'BD\cong\triangle BCD$得$\angle OEO_2=60°$,所以$OO_2=1$由$OC^2=OO_2^2+CO_2^2=1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{7}{3}$,即球半径为$\sqrt{\frac{7}{3}}$,所以球体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$.

10.【答案】B

【解析】设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,得$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增,在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减;由$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$得$\ln 3>\frac{3}{2}\ln 2$,故①错误;由$\frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}>\frac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$,得$\ln\pi>\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{e}}}$,故②错误;由$\frac{\ln\sqrt{12}}{\sqrt{12}}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$得$\frac{\ln 12}{\sqrt{12}}>\ln 2$,从而$\ln 12>\sqrt{12}\ln 2$,即$12>2^{\sqrt{12}}=4^{\sqrt{3}}$,故③正确(解法2:因为$2^x<x^2$在$(2,4)$上恒成立得$2^{\sqrt{12}}<(\sqrt{12})^2$);

因为$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$,在$x=0$处取等号,所以$\mathrm{e}^{0.1}>1.1>\sqrt{1.2}$,故④正确.

11.【答案】C

【解析】因为$f\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,所以A错误;当$x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$,$f(x)=\cos x-2\sin x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\right)=\sqrt{5}\cos(x+\varphi)$,其中$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$,不妨令$\varphi$为锐角,所以$\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi\leqslant x+\varphi\leqslant\frac{2\pi}{3}+\varphi$,因为$\frac{2\pi}{3}+\varphi>\pi$,所以B错误;

因为2π是函数$f(x)$的一个周期,可取一个周期$[0,2\pi]$上研究值域,当$x\in[0,\pi]$,

$f(x)=\cos x-2\sin x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\right)=\sqrt{5}\cos(x+\varphi)$,$\varphi\leqslant x+\varphi\leqslant\pi+\varphi$,所以$\sqrt{5}\cos\pi\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{5}\cos\varphi$,即$f(x)\in[-\sqrt{5},1]$;因为$f(x)$关于$x=\pi$对称,所以当$x\in[\pi,2\pi]$时$f(x)\in[-\sqrt{5},1]$,故函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上的值域为$[-\sqrt{5},1]$,故C正确;

因为函数$f(x)$为偶函数,所以在区间$[-2\pi,2\pi]$上零点个数可通过区间$[0,2\pi]$上零点个数,由$y=\sin|x|$,$y=2|\cos x|$在$[0,2\pi]$图象知由2个零点,所以在区间$[-2\pi,2\pi]$上零点个数为4个,所以D错误.

12.【答案】D

【解析】由题意得 $P(B|A_2)=\dfrac{3}{11}$,所以 A 错误;因为 $P(B|A_1)=\dfrac{4}{11}$,$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{11}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{3}{11}+\dfrac{5}{10}\times\dfrac{3}{11}=\dfrac{3}{10}$,所以 $P(B)\neq P(B|A_1)$,故事件事件 A_1 与事件 B 不相互独立,所以 B 错误;

$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{5}{11}$,所以 C 错误;由上述得 D 正确.

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

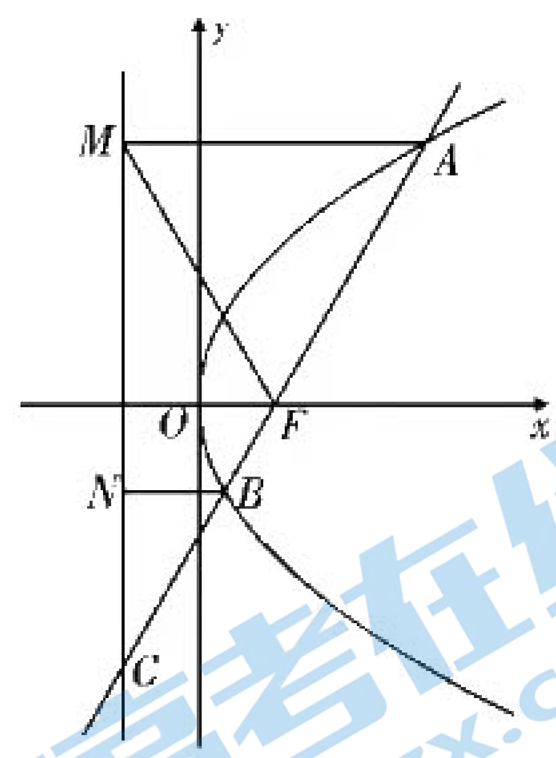
13.【答案】1120

【解析】由 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中只有第 5 项二项式系数最大得 $n=8$,所以展开式通项为 $T_{k+1}=C_8^k(2\sqrt{x})^{8-k}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_8^k(-1)^k2^{8-k}x^{4-k}$,当 $k=4$ 时常数项为 1120.

14.【答案】210

【解析】可分为两种情况:$C_6^2(C_4^2C_2^2+2C_4^3)=210$.

15.【答案】$16\sqrt{3}$



【解析】因为 $|BC|=2|BN|$,所以 $\angle BCN=30°$,所以 $\angle CAM=60°$;

连接 FM,又 $|AM|=|AF|$,所以 $\triangle AFM$ 为等边三角形,

由 $|BC|=2|BF|$,得 $\dfrac{|BN|}{4}=\dfrac{2}{3}$,得 $|BN|=|BF|=\dfrac{8}{3}$,由 $\dfrac{1}{|BF|}+\dfrac{1}{|AF|}=\dfrac{1}{2}$

得 $|AF|=8$,所以 $S_{\triangle AFM}=\dfrac{1}{2}\times 8^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$.

16.【答案】$\dfrac{e}{2}$

【解析】令 $f(x)=e^x-(a+1)x-b$ 得 $f'(x)=e^x-(a+1)$,

①当 $a+1\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾.

②当 $a+1>0$ 时,$f'(x)>0\Rightarrow x>\ln(a+1)$,$f'(x)<0\Rightarrow x<\ln(a+1)$,

得:当 $x=\ln(a+1)$ 时,$h(x)_{\min}=h(a+1)=(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant 0$,

$(a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)\ (a+1>0)$,

令 $F(x)=x^2-x^2\ln x\ (x>0)$,则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$,

$F'(x)>0\Rightarrow 0<x<\sqrt{e}$,$F'(x)<0\Rightarrow x>\sqrt{e}$,当 $x=\sqrt{e}$ 时,$F_{\max}(x)=\dfrac{e}{2}$,

当 $a=\sqrt{e}-1$,$b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ 时,$(a+1)b$ 的最大值为 $\dfrac{e}{2}$.

三、解答题(共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 解:(1)由 $a_2-a_1=2$,$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2$,

故数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 2 为首项,公差为 2 的等差数列, …………………………………………………… 2 分

$\therefore a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+(n-1)\times 2=2n$,

$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2+1$

$=n^2-n+1$,

当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 满足 $a_n=n^2-n+1$,

故对 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=n^2-n+1$. ······························ 5 分

(2)证明:$c_n=2\left(n^2-n+1+n-\dfrac{5}{4}\right)=2\left(n^2-\dfrac{1}{4}\right)=2\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$,

故 $\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{2\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$, ························ 8 分

故 $\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}=1-\dfrac{1}{2n+1}<1$. ·············· 10 分

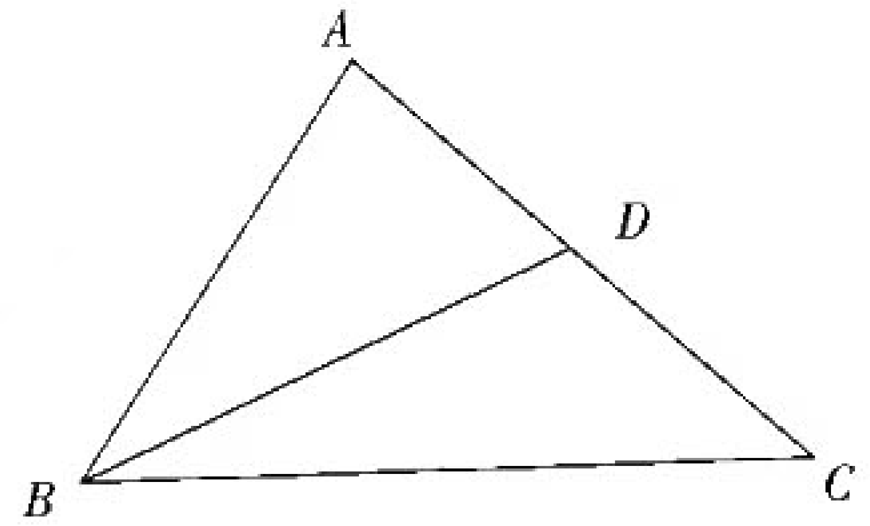
18. 解:(1)由外接圆半径为 $\sqrt{3}$ 得 $b=2\sqrt{3}\sin B$, ······························ 1 分

由 $4\sqrt{3}\sin B\cos C=2a-c$,得 $2b\cos C=2a-c$, ······························ 2 分

利用正弦定理得:$2\sin B\cos C=2\sin A-\sin C$,即 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)-\sin C$, ················ 3 分

化简得 $\sin C=2\sin C\cos B$, ······························ 4 分

由 C 为△ABC 的内角,$\sin C\neq0$,可得 $\cos B=\dfrac{1}{2}$, ················ 5 分



又 B 为△ABC 的内角,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ······························ 6 分

(2)由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}\Rightarrow b=3$, ······························ 7 分

设 D 为 AC 边上的中点,则 $AD=\dfrac{3}{2}$,$BD=\dfrac{5}{2}$,

解法一:在△BCD 中,$\cos\angle BDC=\dfrac{\dfrac{25}{4}+\dfrac{9}{4}-a^2}{2\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2}}$,

在△ABD 中,$\cos\angle ADB=\dfrac{\dfrac{25}{4}+\dfrac{9}{4}-c^2}{2\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2}}$,

因为 $\angle ADB+\angle BDC=\pi$,所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle BDC=0$,可得 $a^2+c^2=17$,

由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$,即 $9=c^2+a^2-ac$,$ac=8$, ······························ 9 分

由三角形面积公式得:$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$, ······························ 10 分

由 $25=c^2+a^2+ac$,得 $(a+c)^2-ac=25$,$a+c=\sqrt{33}$,所以周长为 $3+\sqrt{33}$. ························ 12 分

解法二:利用向量加法法则得:$2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$,

两边平方得:$4\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$,即 $25=c^2+a^2+ac$,

由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$,即 $9=c^2+a^2-ac$,两式相减得 $16=2ac$,即 $ac=8$, ················ 9 分

由三角形面积公式得:$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$, ······························ 10 分

由 $25=c^2+a^2+ac$,得 $(a+c)^2-ac=25$,$a+c=\sqrt{33}$,所以周长为 $3+\sqrt{33}$. ························ 12 分

19. 解：(1) $\because BD\perp CD$ 且 $BD=CD=1$，$\therefore BC=\sqrt{2}$，又 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB$ 可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $AC=\sqrt{2}$，则 $AC=BC$

所以 $\triangle ABC$ 为正三角形

所以 $AO\perp BC$；

因为 $BD=CD$，$BO=OC$，所以 $OD\perp BC$，

因为 $AO\cap OD=O$，所以 $BC\perp$ 平面 AOD，

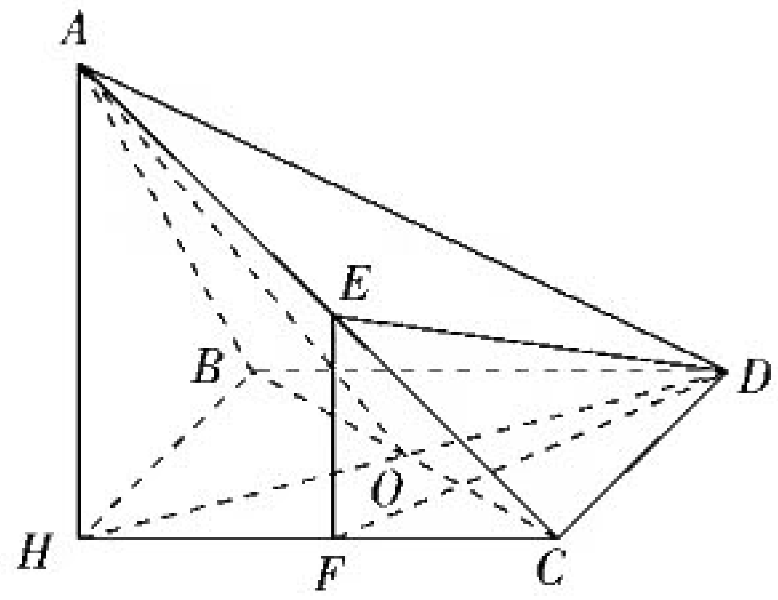
因为 $BC\subset$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 AOD. ………………………………………… 5 分

(2) 作 $AH\perp DO$，交 DO 的延长线于点 H，

因为平面 $BCD\perp$ 平面 AOD，平面 $BCD\cap$ 平面 $AOD=HD$，$AH\subset$ 平面 AOD，

所以 $AH\perp$ 平面 BCD，$BC\subset$ 平面 BCD，

所以 $AH\perp HC$，



在直角三角形 BCD 中，$OD=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

在等边三角形 ABC 中，$AO=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

在 $\triangle AOD$ 中，$\cos\angle ADO=\frac{AD^2+OD^2-AO^2}{2AD\cdot OD}=\frac{3+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\sin\angle ADO=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

在直角三角形 AHD 中，$AH=AD\sin\angle ADO=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$， ………………………………… 8 分

$HD=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，

过点 E 作 $EF\perp CH$，垂足为 F，则 $EF/\!/AH$，所以 $EF\perp$ 平面 BCD，

所以 $\angle EDF$ 就是 ED 与平面 BCD 所成的角， ………………………………………………… 9 分

设 $CE=x(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，由 $\frac{EF}{AH}=\frac{CE}{AC}$，得 $EF=\frac{AH\cdot CE}{AC}=\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

由 $AD^2=AC^2+CD^2$，得 $AC\perp CD$，

在直角三角形 CDE 中，$DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{x^2+1}$，

因为 ED 与平面 BCD 所成角为 $30°$，所以 $\frac{EF}{ED}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}$，即 $x=1$，即 $CE=1$. ……………………… 12 分

即在线段 AC 上是存在一点 E，使 ED 与面 BCD 成 $30°$角，且 $CE=1$.

解法二：建系法

20. 解：(1) 由题意，根据表格中的数据，可得 $\bar{x}=4$, $\bar{y}=50$，…… 2分

可得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{994-1\,400}{28}=-14.5$，…… 4分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=108$，…… 5分

因此 y 关于 x 的回归方程为：$y=-14.5x+108$. …… 6分

(2) 记小明获胜时比赛的局数为 X，则 X 取值为 3、4、5. …… 7分

$P(X=3)=0.6\times0.7\times0.7=0.294$,

$P(X=4)=0.4\times0.5\times0.7\times0.7+0.6\times0.3\times0.5\times0.7+0.6\times0.7\times0.3\times0.5=0.224$

$P(X=5)=0.6\times0.7\times0.3\times0.5\times0.5+0.6\times0.3\times0.5\times0.3\times0.5+0.6\times0.3\times0.5\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.5\times0.7\times0.7+0.4\times0.5\times0.3\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7\times0.3\times0.5=0.1675$. …… 11分

$P_{小明获胜}=0.294+0.224+0.167\,5=0.685\,5$. …… 12分

21. 解：(1) 由题意得：$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\sqrt{3}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{2}$. $b=2$，

则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ …… 4分

(2) 解法1：因为点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以圆在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，

化简得 $x_0x+y_0y=4$. …… 6分

则直线 l 的方程为 $xx_0+yy_0=4$，代入双曲线 C 的方程 $2x^2-y^2=4$，

变形为 $4(2x^2-y^2)=(xx_0+yy_0)^2$，

整理得 $(y_0^2+4)y^2+2x_0y_0xy+(x_0^2-8)x^2=0$ 等号两边同除以 $x^2(x^2\neq0)$，

得到 $(y_0^2+4)\left(\frac{y}{x}\right)^2+2x_0y_0\cdot\frac{y}{x}+(x_0^2-8)=0$. …… 9分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $k_{OA}k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{x_0^2-8}{y_0^2+4}=\frac{(4-y_0^2)-8}{y_0^2+4}=-1$，…… 11分

故 $OA\perp OB$，即以 AB 为直径的圆过坐标原点. …… 12分

解法二. 因为点 $P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以圆在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，化简得 $x_0x+x_0y=4$. …… 6分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1\\ x_0x+y_0y=4\end{cases}$ 及 $x_0^2+y_0^2=4$ 得 $(3x_0^2-8)x^2-8x_0x+32-4x_0^2=0$，

∵ 切线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A、B，且 $0<x_0^2<4$，

∴ $3x_0^2-8\neq0$，且 $\Delta=64x_0^2-4(3x_0^2-8)(32-4x_0^2)>0$，

设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8x_0}{3x_0^2-8}$，$x_1x_2=\dfrac{32-4x_0^2}{3x_0^2-8}$，…………………………………………………… 8 分

∵ $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}$，

且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{1}{y_0^2}(4-x_0x_1)(4-x_0x_2)$，

$=x_1x_2+\dfrac{1}{4-x_0^2}[16-4x_0(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2]$

$=\dfrac{32-4x_0^2}{3x_0^2-8}+\dfrac{1}{4-x_0^2}\left[16-\dfrac{32x_0^2}{3x_0^2-8}+\dfrac{x_0^2(32-4x_0^2)}{3x_0^2-8}\right]$

$=\dfrac{32-4x_0^2}{3x_0^2-8}-\dfrac{32-4x_0^2}{3x_0^2-8}=0$，即以 AB 为直径的圆过坐标原点. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)+\dfrac{x^2}{e^x}$，

所以 $f'(x)=1+\dfrac{2x-x^2}{e^x}$，

所以 $f'(1)=1+\dfrac{1}{e}$. 又 $f(1)=\dfrac{1}{e}$，…………………………………………………………………… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\left(1+\dfrac{1}{e}\right)x-1$. ………………………………… 5 分

(2) $g(x)=(x-2)e^{x-1}+a(x-1)^2-x\ln x+x$，若 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个零点，

令 $h(x)=(x-1)e^x-(x+1)\ln(x+1)+ax^2+x+1$，$x\in[0,+\infty)$，则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个零点，

$h'(x)=xe^x-\ln(x+1)+2ax$，

令 $\varphi(x)=h'(x)=xe^x-\ln(x+1)+2ax$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x+1}+2a$，

令 $m(x)=\varphi'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x+1}+2a$，$x\in[0,+\infty)$，则 $m'(x)=(x+2)e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $\varphi'(x)\geq\varphi'(0)=2a$.

当 $a\geq0$ 时，$\varphi'(x)\geq0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$，即 $h'(x)\geq0$，

则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geq h(0)=0$，所以 $h(x)$ 有且仅有 1 个零点，不符合条件. …… 7 分

当 $a<0$ 时，$\varphi'(0)=2a<0$，$\varphi'(-2a)=(-2a+1)e^{-2a}-\frac{1}{-2a+1}+2a>-2a+1-1+2a=0$，

所以 $\exists x_0\in(0,-2a)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$.

当 $x\in[0,x_0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，则 $\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

因为当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，所以存在 x'，使得 $\varphi(x')=0$.

即当 $x\in[0,x')$ 时，$h'(x)\leqslant0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x')$ 上单调递减，

当 $x\in(x',+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 在 $(x',+\infty)$ 上单调递增，…………………………………… 10 分

又 $h(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上有两个零点. 即 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个零点.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$. ………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。