2022—2023 学年高三考前模拟考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\left\{x\middle|1<\frac{x}{2}-1<3,x\in\mathbf{N}\right\}$的子集的个数为

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

2. 复数 $z=-3\mathrm{i}(4-\mathrm{i})$在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-5,3)$，若向量 $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 $t=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

4. 大衍数列 0,2,4,8,12,18,…来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理. 数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和. 其通项公式为 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2},n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n^2}{2},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $S_{100}=$

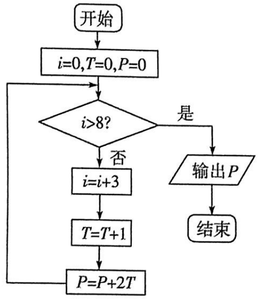
参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A. 169 125　　B. 169 150　　C. 338 300　　D. 338 325

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是 F_1,F_2，P 是双曲线 C 上的一点，且$|PF_1|=5$，$|PF_2|=3$，$\angle F_1PF_2=120°$，则双曲线 C 的离心率是

A. 7　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{4}$

6. 执行如图所示的程序框图，输出的 P 为



A. 6　　B. 10

C. 12　　D. 18

7. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2a_{10}=a_{14}$，则$\frac{S_{32}}{S_{16}}=$

A. 17　　B. 18

C. 5　　D. 6

8. 已知两条不同的直线 l,m，两个不同的平面 α,β，则下列命题正确的是

A. 若 $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m\perp\beta$，则 $l/\!/m$　　B. 若 $\alpha/\!/\beta,l/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则 $l/\!/m$

C. 若 $\alpha/\!/\beta,m\perp\alpha,l\perp\beta$，则 $l/\!/m$　　D. 若 $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m/\!/\beta$，则 $l\perp m$

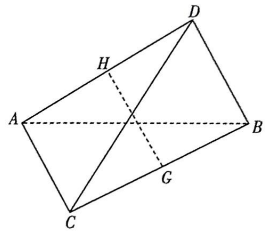
9. 某知识问答竞赛需要三人组队参加，比赛分为初赛、复赛、决赛三个阶段，每个阶段比赛中，如果一支队伍中至少有一人通过，则这支队伍通过此阶段. 已知甲、乙、丙三人组队参加，若甲通过每个阶段比赛的概率均为$\frac{2}{3}$，乙通过每个阶段比赛的概率均为$\frac{3}{5}$，丙通过每个阶段比赛的概率均为$\frac{1}{2}$，且三人每次通过与否互不影响，则这支队伍进入决赛的概率为

A. $\frac{224}{225}$　　B. $\frac{196}{225}$　　C. $\frac{14}{15}$　　D. $\frac{1}{25}$

10. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 M 在 C 上，点 N 在准线 l 上，且 MN 平行于 x 轴，准线 l 与 x 轴的交点为 E，若$|NF|=2|EF|$，则梯形 $EFMN$ 的面积为

A. 12　　B. 6　　C. $12\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

11. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，$\angle ADB=\angle ACB=90°$，$AC=BD=\frac{1}{2}AB$，若球 O 的体积为$\frac{32\pi}{3}$，三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 2，G,H 分别是 BC,AD 的中点，则异面直线 GH 与 AC 所成角的余弦值为



A. $\frac{\sqrt{10}}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

12. 已知垂直于 x 轴的直线 l 与函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x+\ln a}+\ln a+1(a>0)$和 $g(x)=\ln(x-1)$的图象分别交于 P,Q 两点，若 P 点总不在 Q 点的下方，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 从 1～9 这 9 个数中随机选一个数，则该数的倒数大于$\frac{1}{5}$的概率为________.

14. 已知直线 l 与圆 $C:x^2+(y-1)^2=2$ 相切，且切点的横、纵坐标均为整数，则直线 l 的方程为__________.（写出一个满足条件的方程即可）

15. 已知偶函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为__________.

16. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\frac{f(x)}{x}+f'(x)=\frac{1}{x^2}$，$f(1)=0$，则下列说法正确的是__________.（填所有正确说法的序号）

①$f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值，极大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$；②$f(x)$ 有两个零点；

③若 $f(x)<k-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $k>1$；④$f(1)<f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)<f(4)$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

为了有针对性地提高学生对音乐课程的积极性，某校需要了解学生爱好音乐是否与性别有关，随机抽取 100 名该校学生进行问卷调查，得到如下列联表.

	爱好音乐	不爱好音乐	总计
男	16		
女		26	
总计			100

已知从这 100 名学生中任选 1 人，爱好音乐的学生被选中的概率为 $\frac{2}{5}$.

（Ⅰ）完成上面的列联表；

（Ⅱ）根据列联表中的数据，判断能否有 90% 的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18.（12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $c(\cos A+1)=\sqrt{3}a\sin\angle ACB$.

（Ⅰ）求 A；

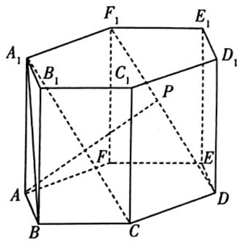
（Ⅱ）设 AB 的中点为 D，若 $CD=a$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 $5+\sqrt{7}$，求 a,b.

19.（12 分）

如图所示，正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1，高为 $\sqrt{3}$，P 为线段 DF_1 上的动点.

（Ⅰ）求证：AP∥平面 A_1BC；

（Ⅱ）设直线 AP 与平面 CDF_1A_1 所成的角为 θ，求 $\sin\theta$ 的取值范围.



20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-kx^2(k\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若方程 $f(x)=kx-kx^2$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，证明：$k(x_1+x_2)>2$.

21.（12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，左、右顶点分别为 A_1,A_2，F_2 是 OA_2（O 为坐标原点）的中点，且 $|F_1F_2||A_2F_2|=2$.

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）不过坐标原点的直线 l 与椭圆 E 相交于 A,B 两点（A,B 异于椭圆 E 的顶点），直线 AA_1，BA_2 与 y 轴的交点分别为 M,N，若 $\overrightarrow{A_2N}-\overrightarrow{A_2O}=3\overrightarrow{A_2O}-3\overrightarrow{A_2M}$，证明：直线 l 过定点，并求该定点的坐标.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）求 C 上的动点到直线 l 距离的取值范围.

23. [选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+a|+3|x-2|(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant10$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)>5$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2022—2023 学年高三考前模拟考试

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的概念.

解析 集合 $A=\left\{x\left|1<\frac{x}{2}-1<3,x\in\mathbf{N}\right.\right\}=\{x|4<x<8,x\in\mathbf{N}\}=\{5,6,7\}$,则集合 A 的子集有 $2^3=8$ 个.

2. 答案 C

命题意图 本题考查复数的几何意义.

解析 因为 $z=-3\mathrm{i}(4-\mathrm{i})=-12\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3-12\mathrm{i}$,可知复数 z 在复平面内对应的点为 $(-3,-12)$,所以 z 在复平面内对应的点位于第三象限.

3. 答案 A

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=t(1,-4)+(-5,3)=(t-5,-4t+3)$,若向量 $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,则 $(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(t-5,-4t+3)\cdot(-5,3)=-5(t-5)+3(-4t+3)=-17t+34=0$,解得 $t=2$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查数列的求和.

解析 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2},n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n^2}{2},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 故 $S_{100}=\frac{1^2-1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2-1}{2}+\frac{4^2}{2}+\frac{5^2-1}{2}+\frac{6^2}{2}+\cdots+\frac{99^2-1}{2}+\frac{100^2}{2}=$

$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+99^2+100^2}{2}-\frac{50}{2}=\frac{100\times101\times201}{6\times2}-25=169\ 150$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$. 由题意,点 P 在双曲线 C 的右支上,$|PF_1|=5$,$|PF_2|=3$,由余弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{5^2+3^2-|F_1F_2|^2}{2\times5\times3}=-\frac{1}{2}$,解得 $|F_1F_2|=7$,即 $2c=7$,$c=\frac{7}{2}$,根据双曲线定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a=2$,解得 $a=1$,故双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{7}{2}$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查程序框图.

解析 第一次循环,$i=0<8$,则 $i=0+3=3$,$T=0+1=1$,$P=0+2\times1=2$;

第二次循环,$i=3<8$,则 $i=3+3=6$,$T=1+1=2$,$P=2+2\times2=6$;

第三次循环,$i=6<8$,则 $i=6+3=9$,$T=2+1=3$,$P=6+2\times3=12$.

此时,$i=9>8$,所以输出的 P 为 12.

7. 答案 A

命题意图　本题考查等比数列的性质.

解析　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q. 由 $2a_{10}=a_{14}$，得 $2a_{10}=a_{10}q^4$，解得 $q^4=2$，所以$\dfrac{S_{32}}{S_{16}}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{32})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^{16})}{1-q}}=1+q^{16}=1+2^4=17$.

8. **答案**　C

命题意图　本题考查空间线面位置关系的判断.

解析　对于 A，若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $l\perp m$，A 错误；

对于 B，若 $\alpha/\!/\beta$，$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 l 与 m 可能平行、异面，也可能相交，B 错误；

对于 C，若 $\alpha/\!/\beta$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\beta$，又 $l\perp\beta$，所以 $l/\!/m$，C 正确；

对于 D，若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m/\!/\beta$，则 l 与 m 可能平行，也可能相交或异面，相交或异面时可能垂直，也可能不垂直，D 错误.

9. **答案**　B

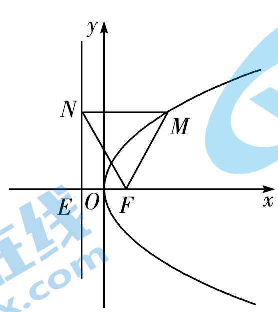
命题意图　本题考查相互独立事件的概率计算.

解析　“至少有一人通过”的对立事件为“三人全部未通过”，则这支队伍通过每个阶段比赛的概率为 $1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{14}{15}$，所以他们连续通过初赛和复赛的概率为$\left(\dfrac{14}{15}\right)^2=\dfrac{196}{225}$.

10. **答案**　D

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　由题可知，$p=2$，抛物线的焦点 F 为$(1,0)$，准线 l 为 $x=-1$，如图所示. 由题知 $MN\perp l$，因为$|NF|=2|EF|=2\times2=4$，所以$\angle EFN=60°$，则$|NE|=\sqrt{3}|EF|=2\sqrt{3}$. 因为 $MN/\!/EF$，所以$\angle MNF=\angle EFN=60°$，由抛物线的定义可知$|MN|=|MF|$，所以$\triangle MNF$ 是正三角形，所以$|MN|=4$，所以 $S_{梯形EFMN}=\dfrac{(4+2)\times2\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

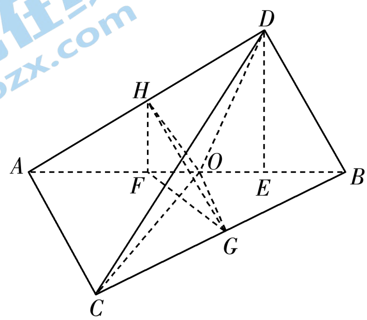


11. **答案**　C

命题意图　本题考查空间几何体的结构特征以及相关计算.

解析　如图，取 AB 的中点 O，连接 OC，OD，因为$\angle ADB=\angle ACB=90°$，所以 O 到 A,B,C,D 的距离相等，故 O 为三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心. 设外接球半径为 R，由球 O 的体积为$\dfrac{32\pi}{3}$，得$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}$，解得 $OD=R=2$，则 $AB=4$，$AC=BD=2$，$AD=BC=2\sqrt{3}$，$\angle DAB=\angle ABC=30°$. 过 D,H 作 DE,HF 分别垂直于 AB 于点 E,F，连接 GF,OG,OH. 因为 $DE=AD\sin30°=\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 设三棱锥 $D-ABC$ 的高为

h,则体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times h=2$,解得 $h=\sqrt{3}$,而 $DE=\sqrt{3}$,所以 DE 就是三棱锥 $D-ABC$ 的高. 在 $\triangle BFG$ 中,$BF=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$,$BG=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$,$\angle FBG=30°$,由余弦定理得 $\cos\angle FBG=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2-GF^2}{2\times\frac{5}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $GF=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$HF=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则由勾股定理得 $GH=\sqrt{HF^2+GF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 因为 OG 是 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $OG/\!/AC$ 且 $OG=\frac{1}{2}AC=1$,同理,$OH=1$,所以 $\angle OGH$ 或其补角是异面直线 GH 与 AC 所成的角,在 $\triangle OGH$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle OGH=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-1^2}{2\times 1\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,即为所求.



12. **答案** B

命题意图 本题考查根据不等式恒成立求参数的取值范围.

解析 两个函数的公共定义域为 $(1,+\infty)$. 由题意知,不等式 $f(x)\geqslant g(x)$,即 $e^{x+\ln a}+\ln a+1\geqslant\ln(x-1)$,即 $e^{x+\ln a}+x+\ln a\geqslant x-1+\ln(x-1)=e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立. 构造函数 $h(x)=e^x+x$,其中 $x\in\mathbf{R}$,则 $h'(x)=e^x+1>0$,所以函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数. 由 $e^{x+\ln a}+x+\ln a\geqslant e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$,得 $h(x+\ln a)\geqslant h(\ln(x-1))$,所以 $x+\ln a\geqslant\ln(x-1)$,即 $\ln a\geqslant\ln(x-1)-x$,其中 $x>1$. 令 $t(x)=\ln(x-1)-x$,则 $t'(x)=\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$,$x>1$. 当 $1<x<2$ 时,$t'(x)>0$,函数 $t(x)$ 单调递增,当 $x>2$ 时,$t'(x)<0$,函数 $t(x)$ 单调递减,所以 $\ln a\geqslant t(x)_{\max}=t(2)=-2$,即 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\frac{4}{9}$

命题意图 本题考查古典概型的概率计算.

解析 从 1~9 这 9 个数中随机选一个数共有 9 种等可能的结果,其中倒数大于 $\frac{1}{5}$ 的有 1,2,3,4 等 4 种等可能的结果,所以该数的倒数大于 $\frac{1}{5}$ 的概率为 $\frac{4}{9}$.

14. **答案** $x-y-1=0$ 或 $x+y+1=0$ 或 $x-y+3=0$ 或 $x+y-3=0$(任写一个都对)

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 圆 C 的圆心为点 $(0,1)$,圆 C 经过的整点有 4 个:$(1,0)$,$(-1,0)$,$(1,2)$,$(-1,2)$. 以点 $(1,0)$ 为例,圆

心与切点连线的斜率为 -1，则切线斜率为 1，所以切线方程为 $y=x-1$.

15. **答案** $[-2,1]$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，则 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$，又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $-\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\cos 2x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，所以 $-2\cos 2x\in[-2,1]$，故 $f(x)\in[-2,1]$.

16. **答案** ①③④

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 由已知得 $f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$，即 $[xf(x)]'=\frac{1}{x}$，故 $xf(x)=\ln x+c$（c 为常数）.

又因为 $f(1)=0$，可得 $1\cdot f(1)=\ln 1+c$，解得 $c=0$，故 $xf(x)=\ln x$，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减.

对于①，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 取得极大值，$f(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故①说法正确；

对于②，由 $f(1)=0$，$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}>0$，且 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $x>0$ 且 $x\to0$ 时，$f(x)<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)>0$，根据零点存在定理可知 $f(x)$ 只有一个零点，故②说法不正确；

对于③，要使 $f(x)<k-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}<k$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，只需 $k>\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)_{\max}$，

令 $G(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则 $G'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$G'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}>0$，所以函数 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，当 $x>1$ 时，$G'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}<0$，所以函数 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $G(x)_{\max}=G(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=1$，

所以 $k>\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)_{\max}=1$，故③说法正确；

对于④，$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，由 $1<\frac{\mathrm{e}}{2}<2$ 可得 $f(1)<f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)<f(2)$，又 $f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，$f(2)=f(4)$，

故 $f(1)<f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)<f(4)$，故④说法正确.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查独立性检验的应用.

解析 （Ⅰ）设这 100 名学生中爱好音乐的学生有 x 人，则 $\frac{x}{100}=\frac{2}{5}$，

解得 $x=40$. ………………………………………………………………（3 分）

列联表完成如下.

	爱好音乐	不爱好音乐	总计
男	16	34	50
女	24	26	50
总计	40	60	100

……………………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $k=\dfrac{100\times(16\times26-24\times34)^2}{60\times40\times50\times50}\approx2.667$，……………………………（9 分）

因为 $2.667<2.706$，故没有 90% 的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关. ………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 （Ⅰ）由条件及正弦定理可得 $\sin\angle ACB(\cos A+1)=\sqrt{3}\sin A\sin\angle ACB$，……………（1 分）

因为 $\angle ACB\in(0,\pi)$，所以 $\sin\angle ACB\neq0$，

所以 $\cos A+1=\sqrt{3}\sin A$，整理得 $\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，……………………………（3 分）

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，解得 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $CD^2=b^2+\dfrac{c^2}{4}-2b\cdot\dfrac{c}{2}\cos A$.

而 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$CD=a$，所以 $a^2=b^2+\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{bc}{2}$. ① ……………………………（6 分）

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc$. ② ……………………………（7 分）

由①②两式相减，得 $3c^2=2bc$，所以 $b=\dfrac{3c}{2}$，……………………………（8 分）

将 $b=\dfrac{3c}{2}$ 代入②，得 $a^2=\left(\dfrac{3c}{2}\right)^2+c^2-\dfrac{3c}{2}\cdot c=\dfrac{7}{4}c^2$，则 $a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}c$. ……………（9 分）

因为 $\triangle ABC$ 的周长为 $5+\sqrt{7}$，

所以 $a+b+c=\dfrac{\sqrt{7}}{2}c+\dfrac{3c}{2}+c=5+\sqrt{7}$，解得 $c=2$，……………………………（11 分）

所以 $a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}c=\sqrt{7}$，$b=\dfrac{3c}{2}=3$. ……………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查线面平行的证明以及空间向量的应用.

解析 （Ⅰ）连接 AD，AF_1. ……………………………………………（1 分）

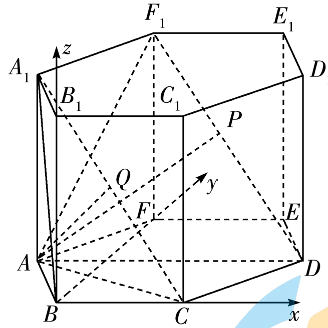
在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，

因为底面为正六边形，所以 $AD\parallel BC$，

因为 $AD\not\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AD\parallel$ 平面 A_1BC. ……………………（2 分）

因为 $CD\parallel A_1F_1$，$CD=A_1F_1$，所以四边形 CDF_1A_1 为平行四边形，

所以 $DF_1\parallel A_1C$，又 $DF_1\not\subset$ 平面 A_1BC，$A_1C\subset$ 平面 A_1BC，所以 $DF_1\parallel$ 平面 A_1BC. ……（3 分）



又 $AD\cap DF_1=D$,所以平面 ADF_1 // 平面 A_1BC, ……………………………………（4 分）

因为 P 为线段 DF_1 上的动点,所以 $AP\subset$ 平面 ADF_1,

所以 AP // 平面 A_1BC. ……………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）取 A_1C 的中点为 Q,连接 AQ,AC.

因为底面边长为 1,所以 $AC=\sqrt{3}$,

因为 $A_1A=\sqrt{3}$,所以 $A_1A=AC$,所以 $AQ\perp A_1C$.

易得 $CD\perp AC$,$CD\perp A_1A$,$AC\cap A_1A=A$,所以 $CD\perp$ 平面 A_1AC,所以 $CD\perp AQ$,

因为 $A_1C\cap CD=C$,所以 $AQ\perp$ 平面 CDF_1A_1,

即 $\overrightarrow{AQ}$ 为平面 CDF_1A_1 的一个法向量. ……………………………………（7 分）

连接 BF. 以 B 为坐标原点,BC,BF,BB_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间坐标系 $B-xyz$,

则 $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$A_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$,$C(1,0,0)$,$D\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$F_1(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$,

所以 $Q\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{DF_1}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$. ………（9 分）

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DF_1}=\left(-\frac{3\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2},\sqrt{3}\lambda\right)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\left(2-\frac{3\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2},\sqrt{3}\lambda\right)$, ……………………………………（10 分）

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6\lambda^2-6\lambda+4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3\lambda^2-3\lambda+2}}$,

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,所以 $3\lambda^2-3\lambda+2\in\left[\frac{5}{4},2\right]$,所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{15}}{5}\right]$. …………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-2kx=\frac{1-2kx^2}{x}$. ……………………………………………………（1 分）

当 $k\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; …………（2 分）

当 $k>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x>\frac{\sqrt{2k}}{2k}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2k}}{2k},+\infty\right)$ 上单调递减, ……………………………………（3 分）

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{\sqrt{2k}}{2k}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2k}}{2k}\right)$ 上单调递增. ………………………………（4 分）

（Ⅱ）方程 $f(x)=kx-kx^2$ 即 $\ln x-kx^2=kx-kx^2$，得 $\ln x=kx$，

不妨设 $x_1>x_2>0$，则 $\ln x_1-kx_1=0$，$\ln x_2-kx_2=0$，得 $\ln x_1-\ln x_2=k(x_1-x_2)$，

所以 $k=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$. ………………………………（6 分）

所以要证 $k(x_1+x_2)>2$，即证 $k>\frac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

即 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{\frac{2x_1}{x_2}-2}{\frac{x_1}{x_2}+1}$. ………………………………（8 分）

设 $t=\frac{x_1}{x_2}$，因为 $x_1>x_2>0$，所以 $t>1$，

即证 $\ln t>\frac{2t-2}{t+1}(t>1)$. ………………………………（9 分）

设 $h(t)=\ln t-\frac{2t-2}{t+1}$，则当 $t>1$ 时，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………（11 分）

所以 $h(t)>h(1)=0$，即 $\ln t-\frac{2t-2}{t+1}>0$，

即 $\ln t>\frac{2t-2}{t+1}$，即 $k(x_1+x_2)>2$. ………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的标准方程与性质.

解析 （Ⅰ）设椭圆 E 的半焦距为 $c(c>0)$.

因为 F_2 是 OA_2 的中点，所以 $a=2c$， ………………………………（1 分）

因为 $|F_1F_2||A_2F_2|=2$，所以 $2c\cdot(a-c)=2$，得 $2c\cdot(2c-c)=2$，解得 $c=1$， ………………（2 分）

所以 $a=2$，$b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$， ………………………………（3 分）

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………（4 分）

（Ⅱ）由已知得 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则直线 AA_1 的斜率为 $\frac{y_1}{x_1+2}$，直线 AA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，得 M 点坐标为 $\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，

直线 BA_2 的斜率为 $\frac{y_2}{x_2-2}$，直线 BA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，得 N 点坐标为 $\left(0,-\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$. …………（5 分）

因为 $\overrightarrow{A_2N}-\overrightarrow{A_2O}=3\overrightarrow{A_2O}-3\overrightarrow{A_2M}$，所以 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{MO}$.

所以 $|ON|^2=9|OM|^2$，所以 $\frac{4y_2^2}{(x_2-2)^2}=\frac{36y_1^2}{(x_1+2)^2}$， ………………………………（6 分）

又因为 $y_1^2=3-\frac{3x_1^2}{4}=\frac{12-3x_1^2}{4}$，$y_2^2=3-\frac{3x_2^2}{4}=\frac{12-3x_2^2}{4}$，

所以 $\frac{4-x_2^2}{(x_2-2)^2}=9\times\frac{4-x_1^2}{(x_1+2)^2}$，即 $\frac{2+x_2}{2-x_2}=\frac{9(2-x_1)}{2+x_1}$，

整理得 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=0$. (*) ………………………………（7 分）

①若直线 AB 的斜率不存在，则 $x_1=x_2$，

由 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=0$ 得 $x_2^2-5x_2+4=0$，解得 $x_2=1$ 或 $x_2=4$，

此时直线 AB 的方程为 $x=1$ 或 $x=4$，又直线 $x=4$ 与椭圆不相交，故舍去，$x=1$ 满足条件. …………（8 分）

②若直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+t$，

将直线 AB 的方程与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=kx+t, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

其中 $\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)=16(12k^2-3t^2+9)>0$，

且 $x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-12}{3+4k^2}$. ……………………（9 分）

代入（$*$），得 $-5\times\dfrac{8kt}{3+4k^2}-2\times\dfrac{4t^2-12}{3+4k^2}-8=0$，得 $4k^2+5kt+t^2=0$，得 $(4k+t)(k+t)=0$，

所以 $t=-4k$ 或 $t=-k$，

当 $t=-4k$ 时，直线 AB 的方程为 $y=kx-4k=k(x-4)$，恒过点 $(4,0)$，作图可知，此时点 M 与 N 在 x 轴的同一侧，不满足 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{MO}$，故舍去；

当 $t=-k$ 时，直线 AB 的方程为 $y=kx-k=k(x-1)$，恒过点 $(1,0)$，符合题意. …………（11 分）

综上所述，直线 AB 恒过点 $(1,0)$. ……………………（12 分）

22. **命题意图**　本题考查方程的互化、参数方程的应用.

解析　（Ⅰ）由 $\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha, \end{cases}$ 得 $x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，即 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$，

所以曲线 C 的普通方程是 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………（2 分）

由 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，得 $\rho\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=2\sqrt{2}$，……………………（3 分）

得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=2\sqrt{2}$，得 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=4$，……………………（4 分）

代入公式 $\begin{cases} \rho\cos\theta=x, \\ \rho\sin\theta=y, \end{cases}$ 得 $y-x=4$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+4=0$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

设 C 上的动点为 $M(\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，……………………（6 分）

则 C 上的动点 M 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha+4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)+4\right|}{\sqrt{2}}$. …………（8 分）

因为 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\in[-2,2]$，所以 $d\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$.

即 C 上的动点到直线 l 的距离的取值范围为 $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$. ……………………（10 分）

23. **命题意图**　本题考查绝对值不等式的性质.

解析　（Ⅰ）若 $a=0$，$f(x)\geqslant10$ 即为 $|3x|+3|x-2|\geqslant10$. ……………………（1 分）

当 $x\geqslant 2$ 时,不等式 $f(x)\geqslant 10$ 转化为 $3x+3(x-2)\geqslant 10$,解得 $x\geqslant \frac{8}{3}$; ········ (2 分)

当 $0<x<2$ 时,不等式 $f(x)\geqslant 10$ 转化为 $3x-3(x-2)=6\geqslant 10$,无解; ········ (3 分)

当 $x\leqslant 0$ 时,不等式 $f(x)\geqslant 10$ 转化为 $-3x-3(x-2)\geqslant 10$,解得 $x\leqslant -\frac{2}{3}$. ········ (4 分)

综上所述,不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$. ········ (5 分)

(Ⅱ)因为 $f(x)>5$ 恒成立,所以 $f(x)_{\min}>5$. ········ (6 分)

又 $|3x+a|+3|x-2|=|3x+a|+|3x-6|\geqslant|3x+a-(3x-6)|=|a+6|$, ········ (8 分)

所以 $|a+6|>5$,则 $a+6>5$ 或 $a+6<-5$, ········ (9 分)

解得 $a>-1$ 或 $a<-11$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-11)\cup(-1,+\infty)$. ········ (10 分)