2021—2022学年高中毕业班阶段性测试(四)

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid(x-1)(x-5)\leqslant 0\}$，则集合 A 的子集个数为

A. 16　　B. 32　　C. 15　　D. 31

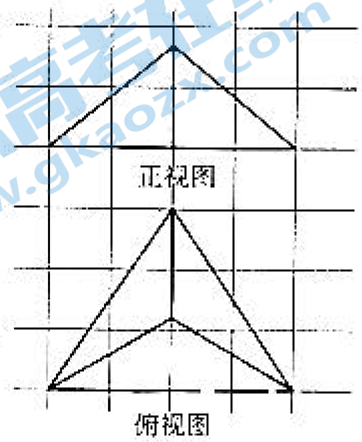
2. $\frac{3-2i}{i}+|2-2\sqrt{3}i|=$

A. $-2+3i$　　B. $-2-3i$　　C. $2-3i$　　D. $2+3i$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1+a_3=20$，$S_2=10$，则其公比 q 为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

4. 如图所示的网格中小正方形的边长均为1，粗线画出的是某三棱锥的正视图和俯视图，若该三棱锥的侧视图面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则该三棱锥的体积为



A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. 4

5. 已知函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，且其图象过点 $(0,1)$，则 φ 的值可能为

A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{4}$，且 $2a_{n+1}a_n+a_n=3a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_4=$

A. $\frac{1}{22}$　　B. $\frac{1}{32}$　　C. $\frac{1}{82}$　　D. $\frac{1}{128}$

7. 区块链作为一种新型的技术，已经被应用于许多领域. 在区块链技术中，某个密码的长度设定为512 B，则密码一共有 2^{512} 种可能，为了破解该密码，最坏的情况需要进行 2^{512} 次运算. 现在有一台计算机，每秒能进行 1.25×10^{13} 次运算，那么在最坏的情况下，这台计算机破译该密码所需时间大约为

(参考数据：$\lg 2\approx0.3$，$\sqrt{10}\approx3.16$)

A. 6.32×10^{141} s　　B. 6.32×10^{140} s　　C. 3.16×10^{141} s　　D. 3.16×10^{140} s

8. 已知动圆 $C:(x-a)^2+(y-3a+2)^2=16(a\in \mathbf{R})$ 截直线 $l:x+by+3=0$ 所得弦长为定值，则 $b=$

A. -3　　B. -2　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=6$，点 M,N 分别为线段 AB,CD 的中点，现将 $\triangle ADM$ 沿 DM 翻转，直到与 $\triangle NDM$ 首次重合，则此过程中，点 A 的运动轨迹长度为

A. $3\sqrt{2}\pi$　　B. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

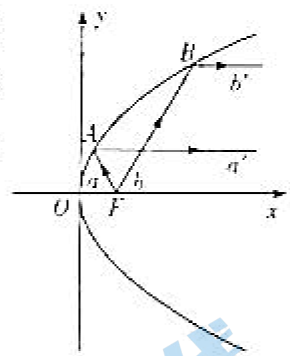
10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 M,N，点 P 为 C 上异于 M,N 的一点，若直线 PM,PN 的斜率之积为 $\frac{1}{3}$，且 C 的焦距为 $4\sqrt{6}$，则双曲线 C 的实轴长为

A. $6\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x<0,\\-x^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(mx^2)+9f(4-3x)\leqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为

A. $[21,+\infty)$　　B. $[13,+\infty)$　　C. $\left[\frac{27}{16},+\infty\right)$　　D. $[15,+\infty)$

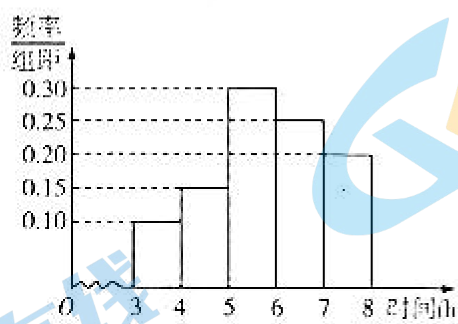
12. 抛物线具有以下光学性质：从焦点发出的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴. 该性质在实际生产中应用非常广泛. 如图所示，从抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 发出的两条光线 a,b 分别经抛物线上的 A,B 两点反射，已知两条入射光线与 x 轴的夹角均为 $60°$，且两条反射光线 a' 和 b' 之间的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则 $p=$



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 为了解某地高三学生假期在家自主学习的时间，研究人员随机抽取了 100 名学生作调查，所得数据统计如图所示，则这组数据的中位数估计为________.



14. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O，若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$，则 $B=$________.

15. 某景区套票原价 300 元/人，如果多名游客组团购买套票，则有如下两种优惠方案供选择：

方案一：若人数不低于 10，则票价打 9 折；若人数不低于 50，则票价打 8 折；若人数不低于 100，则票价打 7 折. 不重复打折.

方案二：按原价计算，总金额每满 5 000 元减 1 000 元.

已知一个旅游团有 47 名游客，若可以两种方案搭配使用，则这个旅游团购票总费用的最小值为________元.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m,x\leqslant 0,\\x+\frac{m}{x+1}-1,x>0\end{cases}$ 有 3 个零点，则实数 m 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. (12 分)

“双减”政策实施后，小学生的周末体育锻炼时间得到增加，为了解低年级（一、二、三年级）和高年级（四、五、六年级）学生的周末体育锻炼时间是否有差异，研究人员随机调查了 100 名小学生，所得数据统计如下表所示. 已知从这 100 人中随机抽取 1 人，抽到周末体育锻炼时间超过 120 min 的学生的概率为$\frac{3}{4}$.

周末体育锻炼时间	超过 120 min	不超过 120 min
低年级	m	20
高年级	45	n

（Ⅰ）求 m,n 的值；

（Ⅱ）是否有 99.9% 的把握认为低年级和高年级学生的周末体育锻炼时间有差异？

附表及公式：

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

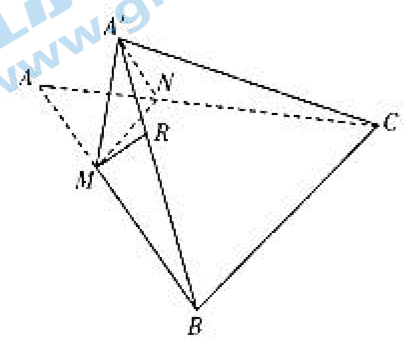
$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18. (12 分)

如图所示，已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 M,N 分别是线段 AB,AC 上靠近 A 的三等分点. 现沿 MN 进行翻折，使得点 A 到达 A' 的位置，点 R 在线段 $A'B$ 上，$BR=2A'R$.

（Ⅰ）求证：$RM\,/\!/$ 平面 $A'CN$；

（Ⅱ）若 $\triangle ABC$ 的边长为 6，$A'B=2\sqrt{6}$，求四棱锥 $A'-BCNM$ 的体积.

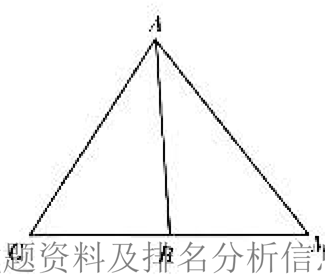


19. (12 分)

如图，已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，$b(1+\cos C)=\sqrt{3}c\sin\angle ABC$.

（Ⅰ）求角 C；

（Ⅱ）若 $a=5,c=7$，延长 CB 至 M，使得 $\cos\angle AMC=\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 BM.



20. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F,点 A,B,P 在椭圆 C 上.

(Ⅰ)若线段 AB 的中点为 $(1,1)$,求直线 AB 的方程;

(Ⅱ)若 F 恰好是 $\triangle ABP$ 的重心,且 $|AF|,|PF|,|BF|$ 依次成等差数列,求点 P 的坐标.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=ax+b\ln x+c$,其中 $a,b,c\neq 0$.

(Ⅰ)若 $a+b=0$,讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 存在极小值 m,分析判断 $m+\frac{a^2+4b^2-4bc}{4b}$ 与 0 的大小关系.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha,\\ y=2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cos^2\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0$,点 A 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$.

(Ⅰ)求 C 的普通方程以及 l 的直角坐标方程;

(Ⅱ)若 l 与 C 交于 M,N 两点,求 $||AM|-|AN||$ 的值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-2|+|x+1|$ 的最小值为 m.

(Ⅰ)求 m 的值;

(Ⅱ)若正数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=\frac{m}{2}$,求 $ab+bc$ 的最大值.

2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(四)

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B	2. C	3. A	4. B	5. D	6. C
7. D	8. D	9. B	10. A	11. C	12. B

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\frac{35}{6}$　　14. $60°$

15. 11 710　　16. $[0,1)$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)依题意,$m+45=100\times\frac{3}{4}=75$,解得 $m=30$, …………(3 分)

故 $n=100-75-20=5$. …………(5 分)

(Ⅱ)依题意,$K^2=\frac{100\times(30\times5-45\times20)^2}{50\times50\times75\times25}=12>10.828$, …………(10 分)

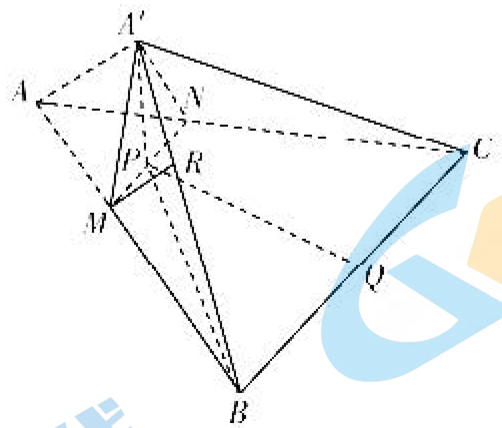
故有 99.9% 的把握认为低年级和高年级学生的周末体育锻炼时间有差异. …………(12 分)

18. 解析　(Ⅰ)如图,连接 AA'. …………(1 分)

由题可知 $BM=2AM$,又因为 $BR=2A'R$,

故 $RM // AA'$, …………(3 分)

又 $RM\not\subset$ 平面 $A'CN$,$AA'\subset$ 平面 $A'CN$,所以 $RM //$ 平面 $A'CN$. …………(5 分)



(Ⅱ)如图,取 MN 的中点 P、BC 的中点 Q,连接 $A'P$,PQ,BP.

由题意可知 $\triangle A'MN$ 是边长为 2 的等边三角形,所以 $A'P\perp MN$,且 $A'P=\sqrt{3}$. …………(7 分)

易知 $BQ=3$,$PQ=2\sqrt{3}$,所以 $BP=\sqrt{BQ^2+PQ^2}=\sqrt{21}$.

因为 $BP^2+A'P^2=A'B^2$,所以 $A'P\perp BP$. …………(9 分)

又因为 $BP\cap MN=P$,所以 $A'P\perp$ 平面 $BCNM$. …………(10 分)

所以四棱锥 $A'-BCNM$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{梯形BCNM}A'P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+6)\times2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=8$. …………(12 分)

19. 解析　(Ⅰ)由条件及正弦定理可得 $\sin\angle ABC(1+\cos C)=\sqrt{3}\sin C\sin\angle ABC$, …………(2 分)

因为 $\sin\angle ABC\neq0$,所以 $1+\cos C=\sqrt{3}\sin C$,即 $2\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=1$, …………(4 分)

因为 $0<C<\pi$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $a=5,c=7,C=\dfrac{\pi}{3}$，故 $\cos C=\dfrac{1}{2}=\dfrac{25+b^2-49}{2\times5\times b}$，得 $b^2-5b-24=0$，

解得 $b=8$（$b=-3$ 舍去）. ……………………………………………………………………………………………（8 分）

由余弦定理可得 $\cos\angle ABC=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}$，所以 $\sin\angle ABC=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ……………………………………（9 分）

由 $\cos\angle AMC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 得 $\sin\angle AMC=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………………………（10 分）

故 $\sin\angle BAM=\sin(\angle ABC-\angle AMC)=\sin\angle ABC\cos\angle AMC-\cos\angle ABC\sin\angle AMC=\dfrac{10\sqrt{7}}{49}$. ……………（11 分）

由正弦定理可得 $\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}=\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}$，则 $BM=\dfrac{7}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}\times\dfrac{10\sqrt{7}}{49}=5$. ……………………………………（12 分）

20. 解析　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

（Ⅰ）易知直线 AB 的斜率存在.

则 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，$\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$，两式相减得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，……………………………………（2 分）

由已知可得 $x_1+x_2=y_1+y_2=2$，所以 AB 的斜率为 $-\dfrac{3}{4}$，……………………………………………………（4 分）

直线 AB 的方程为 $y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-7=0$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由已知可得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，

因为 F 恰好是 $\triangle ABP$ 的重心，所以 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$，即 $x_1+x_2+x_3=3$. ……………………………………（7 分）

因为 $|AF|$，$|PF|$，$|BF|$ 依次成等差数列，所以 $2|PF|=|AF|+|BF|$.

$|AF|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\dfrac{x_1^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{2}-2\right)^2}=2-\dfrac{x_1}{2}$，

同理 $|BF|=2-\dfrac{x_2}{2}$，$|PF|=2-\dfrac{x_3}{2}$. ………………………………………………………………………（9 分）

所以 $4-x_3=2-\dfrac{x_1}{2}+2-\dfrac{x_2}{2}$，可得 $x_1+x_2=2x_3$，

于是 $x_1+x_2+x_3=3x_3=3$，得 $x_3=1$，…………………………………………………………………………（10 分）

将 $x_3=1$ 代入椭圆方程得 $y_3=\pm\dfrac{3}{2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 或 $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………………………………………（12 分）

21. 解析　（Ⅰ）依题意 $f(x)=a(x-\ln x)+c$，

故 $f'(x)=a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a(x-1)}{x}$，$x>0$. ……………………………………………………………………（1 分）

若 $a>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………（3 分）

若 $a<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ………………（5 分）

（Ⅱ）$f'(x)=a+\frac{b}{x}=\frac{ax+b}{x}$，$x>0$.

因为 $f(x)$ 存在极小值，所以 $a>0$，$b<0$，………………（6 分）

则 $m=f\left(-\frac{b}{a}\right)=-b+b\ln\left(-\frac{b}{a}\right)+c$. ………………（7 分）

所以 $m+\frac{a^2+4b^2-4bc}{4b}=-b+b\ln\left(-\frac{b}{a}\right)+c+\frac{a^2}{4b}+b-c=b\left[\ln\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$. ………………（8 分）

令 $-\frac{b}{a}=t(t>0)$，$g(t)=\ln t+\frac{1}{4t^2}$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^3}=\frac{2t^2-1}{2t^3}$，………………（9 分）

令 $g'(t)=0$，得 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，………………（10 分）

故 $g(t)\geqslant g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\ln 2)>0$，………………（11 分）

又因为 $b<0$，故 $bg\left(-\frac{b}{a}\right)<0$，即 $m+\frac{a^2+4b^2-4bc}{4b}<0$. ………………（12 分）

22. **解析**　（Ⅰ）C：$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\sin 2\alpha,\\ y=2+\sqrt{2}\cos 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），………………（1 分）

故 C 的普通方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$. ………………（2 分）

由 l 的极坐标方程可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta+\sqrt{2}=0$，………………（3 分）

即 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2=0$，故 l 的直角坐标方程为 $x-y+2=0$. ………………（4 分）

（Ⅱ）依题意 $A(0,2)$，l 的参数方程可写为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），………………（5 分）

将 l 的参数方程代入 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ 中，整理得 $t^2-\sqrt{2}t-1=0$. ………………（7 分）

则 $\Delta>0$，设 t_1,t_2 是方程的两个实数根，则 $t_1+t_2=\sqrt{2}$，$t_1t_2=-1$，………………（8 分）

故 $||AM|-|AN||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\sqrt{2}$. ………………（10 分）

23. **解析**　（Ⅰ）依题意 $f(x)=\begin{cases}1-3x,x<-1,\\ 3-x,-1\leqslant x<1,\\ 3x-1,x\geqslant 1,\end{cases}$ ………………（3 分）

则当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $m=2$. ………………（5 分）

（Ⅱ）依题意 $a^2+b^2+c^2=1$，………………（6 分）

因为 $a^2+\frac{b^2}{2}\geqslant\sqrt{2}ab$，$\frac{b^2}{2}+c^2\geqslant\sqrt{2}bc$，………………（7 分）

所以 $ab+bc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b^2}{2}+c^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，………………（9 分）

当且仅当 $a=\frac{b}{\sqrt{2}}=c=\frac{1}{2}$ 时取等号，故 $ab+bc$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承"精益求精、专业严谨"的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。