人大附中2022届高三10月统一练习

数　学

说明：本试卷21道题，共150分；考试时间120分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上.

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1．已知命题p：$\exists x_0\in(1,3)$，$x_0^2-4x_0<0$，则$\neg p$是（　　）

A．$\forall x\in(1,3)$，$x^2-4x<0$　　B．$\forall x\notin(1,3)$，$x^2-4x<0$

C．$\forall x\in(1,3)$，$x^2-4x\geq 0$　　D．$\forall x\notin(1,3)$，$x^2-4x\geq 0$

2．若$\{x|x^2+px+q=0\}=\{1,3\}$，则pq的值为（　　）

A．-3　　B．3　　C．-12　　D．12

3．函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lg(x+1)}}$的定义域为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$[0,+\infty)$

C．$(-1,+\infty)$　　D．$[-1,+\infty)$

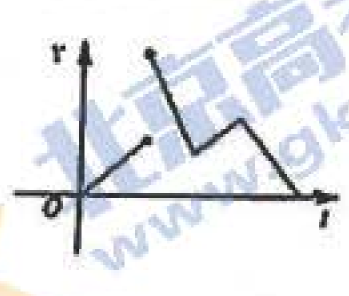
4．已知角α的终边过点$(3,-4)$，则$\sin 2\alpha$的值为（　　）

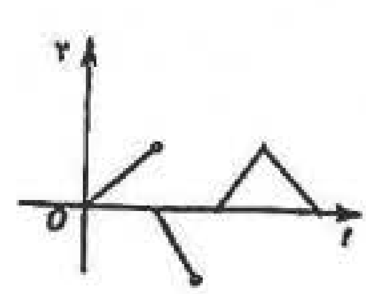
A．$\dfrac{7}{25}$　　B．$\dfrac{24}{25}$　　C．$-\dfrac{7}{25}$　　D．$-\dfrac{24}{25}$

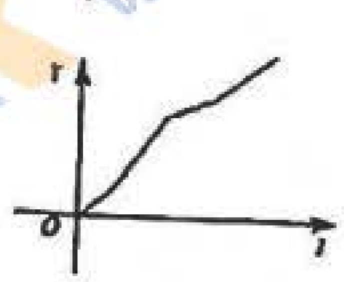
5．函数$f(x)=\dfrac{2^{x+1}}{2^x+1}$的值域为（　　）

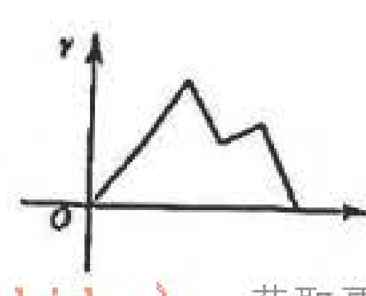
A．$(0,1)$　　B．$(0,1]$　　C．$(0,2)$　　D．$(1,2)$

6．如图，一个正五角星薄片（其对称轴与水面垂直）匀速地升出水面，记t时刻五角星露出水面部分的图形面积为$S(t)(S(0)=0)$，则函数$y=S'(t)$的图像大致为（　　）

A


B.


C.


D.


7. 将函数 $y=\sin(2x-\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到的图象关于原点对称，则 φ 的值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

8. "$y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称" 是 "$y=f(x)$ 是奇函数或偶函数" 的（

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, x\le 2\\ -x+4, x>2\end{cases}$，若实数 a,b,c 满足 $a<b<c$ 且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $2^{a+1}+2^{b+c}$ 的取值范围为（　　）

A. $(4,8)$　　B. $(4,16)$　　C. $(8,32)$　　D. $(16,32)$

10. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为锐角，在 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\delta,\sin\delta\cos\alpha$ 四个值中，大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值记为 m，小于 $\frac{1}{4}$ 的个数的最大值记为 n，则 $m+n$ 等于（　　）

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11. $\log_3 8+\log_3 2-4\log_3 6=$________.

12. 当 $x\in[0,3]$ 时，不等式 $x^2+(a-4)x+4>0$ 恒成立，则 a 的取值范围为________

13. 已知 $A(\cos(\theta+\alpha),\sin(\theta+\alpha))$，$B(\cos(\theta+\beta),\sin(\theta+\beta))$，能说明 "存在 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使得 $OA\perp OB$ 对任意 $\theta\in\mathbf{R}$ 恒成立" 是真命题的一组 α,β 的值为 $\alpha=$________，$\beta=$________.

14. 若函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-ax-2a^2)$ 在区间 $(2,4)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是________.

15. 已知数集 $A=[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$，若存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得对任意 $a\in A$ 都有 $\frac{\lambda}{a}\in A$，则称 A 为完美集．给出下列四个结论：

① 存在 $t\in(0,+\infty)$，使得 A 为完美集；

② 存在 $t\in(-\infty,0)$，使得 A 为完美集；

③ 如果 $t\in\mathbf{Z}$，那么 A 一定不为完美集；

④ 使得 A 为完美集的所有 t 的值之和为 -2．

其中，所有正确结论的序号是__________.

注：本题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分．

三、解答题（本大题共6小题，85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．请在答题纸上的相应位置作答．）

16．（本小题13分）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_6=-20$，前10项和$S_{10}=-145$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，求$\{b_n\}$的前8项和．

17．（本小题14分）已知函数$f(x)=2\cos^2(\omega_1 x-\pi)+\cos\left(\omega_2 x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．

（Ⅰ）求$f(0)$；

（Ⅱ）若存在$x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$，使得$f(x)-a\le 0$，求$a$的最小值．

条件①：$\omega_1=1,\omega_2=1$；　　条件②：$\omega_1=1,\omega_2=2$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题14分）在$\triangle ABC$中，$c=2$，$a\cos B\sin C+b\cos A\sin C=\dfrac{1}{2}c$．

（Ⅰ）求C的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求a的值及$\triangle ABC$的面积．

条件①：$b=2\sqrt{3}$；　　条件②：$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　　条件③：$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

19.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x(x^2+3x+a)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，设 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$，是否存在 a，使得直线 AB 与 x 轴的交点在曲线 $y=f(x)$ 上？如果存在，求 a 的值；如果不存在，请说明理由.

20.（本小题 15 分）已知 $a>0$，函数 $f(x)=xe^x-ax$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值点个数；

（Ⅲ）若存在 a，使得 $f(x)\geqslant b-a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，求实数 b 的取值范围.

21.（本小题 15 分）已知集合 $A\subseteq\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}^*$，若条件①、条件②同时成立，则称 A 为 k 阶集.

条件①：存在 i_1，i_2，…，$i_k\in\mathbf{N}^*$，使得 $i_1+i_2+\cdots+i_k\in A$；

条件②：对任意 i_1，i_2，…，$i_k\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2+\cdots+i_k\in A$，均有 $i_1i_2\cdots i_k\in A$.

（Ⅰ）$\{1,3\}$ 是否是 2 阶集，是否是 3 阶集？说明理由；

（Ⅱ）求所有的 2 阶集；

（Ⅲ）是否存在 3 阶集 A，使得 A 为无限集且 $A\neq\mathbf{N}^*$？如果存在，求满足条件的集合 A 的个数；如果不存在，请说明理由.

人大附中 2022 届高三 10 月统一练习

数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C	（2）C	（3）A	（4）D	（5）C
（6）A	（7）B	（8）B	（9）D	（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-4　　　　（12）$(0,+\infty)$

（13）0；$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）　　　　（14）$[-2,1]$

（15）①②

注：（12）（14）若区间端点均正确，仅将是否取端点弄错，得 3 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则

$$\begin{cases}a_2+a_6=2a_1+6d=-20,\\ S_{10}=10a_1+45d=-145.\end{cases}$$ ……………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=-1,\\ d=-3.\end{cases}$ ……………… 4 分

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-3n+2$. ……………… 6 分

（Ⅱ）由题意，$a_n+b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$， ……………… 7 分

$b_n=2^{n-1}+3n-2$. ……………… 8 分

所以$\{b_n\}$的前 8 项和为

$$\left(1+2+2^2+\cdots+2^7\right)+\left(1+4+7+\cdots+22\right)=\frac{1-2^8}{1-2}+\frac{8(1+22)}{2}=255+92=347.$$

………………13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(0)=2\cos^2(-\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+0=2$. ……………… 4 分

（Ⅱ）选择条件①.

$$f(x)=2\cos^2(x-\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2x-\sin x=-2\sin^2x-\sin x+2.$$

$\because x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，令$\sin x=t$，

$\therefore t\in[-\frac{1}{2},1]$，$f(x)=-2t^2-t+2=-2(t+\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8}$. ………………10 分

$\therefore$ 当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{\pi}{2})=-1$.

……………12 分

所以原命题等价于 $-1-a\le 0$，即 $a\ge -1$.

所以 a 的最小值为 -1. ……………14 分

选择条件②.

$f(x)=2\cos^2(x-\pi)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2 x-\sin 2x$

……………8 分

$=\cos 2x-\sin 2x+1=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4})+1$.

$\because x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，$\therefore 2x+\frac{3\pi}{4}\in[\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{4}]$. ……………10 分

所以当 $2x+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{3\pi}{8})=1-\sqrt{2}$.

……………12 分

所以原命题等价于 $1-\sqrt{2}-a\le 0$，即 $a\ge 1-\sqrt{2}$.

所以 a 的最小值为 $1-\sqrt{2}$. ……………14 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $a\cos B\sin C+b\cos A\sin C=\frac{1}{2}c$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}>0$，

所以 $\sin A\cos B\sin C+\sin B\cos A\sin C=\frac{1}{2}\sin C$. ……………2 分

因为 $\triangle ABC$ 中 $C\in(0,\pi)$，$\sin C>0$，$A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{1}{2}$，即 $\sin C=\sin(A+B)=\frac{1}{2}$.

所以 $C=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. ……………7 分

（Ⅱ）选择条件③.

因为 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

又因为 $B\in(0,\pi)$，$A+B+C=\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$. ……………9 分

由正弦定理得，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$. ……………11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\sin(A+C)=\frac{1}{2}ac(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2})=\sqrt{3}+1$. ……………14 分

(19)（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为$f(x)=\frac{1}{3}x(x^2+3x+a)=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}ax$，

所以$f'(x)=x^2+2x+\frac{a}{3}=(x+1)^2+\frac{a}{3}-1$． ……………… 1 分

① 当$a\geq 3$时，

$f'(x)\geq 0$，当且仅当$a=3$，且$x=-1$时，$f'(x)=0$．

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间． ……………… 4 分

② 当$a<3$时，

令$f'(x)=0$，得$x_1=-1-\sqrt{1-\frac{a}{3}}$，$x_2=-1+\sqrt{1-\frac{a}{3}}$．

$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	x_2	$(x_2,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1-\sqrt{1-\frac{a}{3}})$，$(-1+\sqrt{1-\frac{a}{3}},+\infty)$，

单调递减区间为$(-1-\sqrt{1-\frac{a}{3}},-1+\sqrt{1-\frac{a}{3}})$． ……………… 8 分

（Ⅱ）【法一】因为$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，

由（Ⅰ）知$a<3$，且x_1,x_2是方程$f'(x)=0$的两个根． ……………… 9 分

所以$x_1^2=-2x_1-\frac{a}{3}$，$x_2^2=-2x_2-\frac{a}{3}$．

所以$f(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3+x_1^2+\frac{a}{3}x_1=\frac{1}{3}x_1(-2x_1-\frac{a}{3})+x_1^2+\frac{a}{3}x_1$

$=\frac{1}{3}x_1^2+\frac{2}{9}ax_1=\frac{1}{3}\left(-2x_1-\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{9}ax_1=\frac{2}{9}(a-3)x_1-\frac{a}{9}$．

同理$f(x_2)=\frac{2}{9}(a-3)x_2-\frac{a}{9}$．

因此直线l的方程为$y=\frac{2}{9}(a-3)x-\frac{a}{9}$． ………………11 分

注：【法二】也可以利用韦达定理$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=\frac{a}{3}$，

计算直线l的斜率$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{3}(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+(x_1+x_2)+\frac{a}{3}=\frac{2}{9}(a-3)$，

由$f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{3}(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{a}{3}(x_1+x_2)$，

得AB中点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)=\left(-1,\frac{2-a}{3}\right)$，

从而得到直线 l 的方程 $y=\frac{2}{9}(a-3)x-\frac{a}{9}$.

设直线 l 与 x 轴的交点为 $(x_0,0)$，得 $x_0=\frac{a}{2(a-3)}$. ………………12 分

由题设知，点 $(x_0,0)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，故 $f(x_0)=0$，

又因为 $f(x_0)=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2(a-3)}\right)^3+\left(\frac{a}{2(a-3)}\right)^2+\frac{a^2}{6(a-3)}$

$=\frac{a^3}{24(a-3)^3}+\frac{6a^2(a-3)}{24(a-3)^3}+\frac{4a^2(a-3)^2}{24(a-3)^3}=\frac{a^2(4a^2-17a+18)}{24(a-3)^3}=\frac{a^2(a-2)(4a-9)}{24(a-3)^3}$.

所以 $a=0$ 或 2 或 $\frac{9}{4}$. ………………14 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=xe^x-x$，

所以 $f'(x)=(x+1)e^x-1$，$f'(1)=2e-1$. ………………3 分

又 $f(1)=e-1$，

所以所求切线方程为 $y=(2e-1)(x-1)+e-1$；

即 $y=(2e-1)x-e$. ………………5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=xe^x-ax$，

所以 $f'(x)=(x+1)e^x-a$.

令 $g(x)=(x+1)e^x$，则 $g'(x)=(x+2)e^x$. ………………6 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=-2$.

$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小	↗

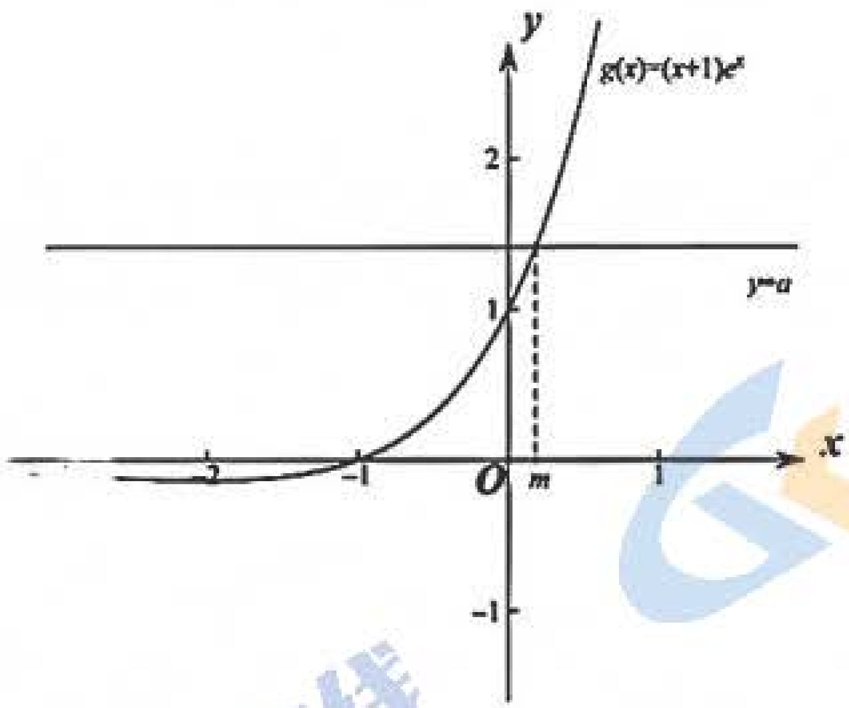
所以当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增. ………………8 分

又当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g(x)<0$，$g(-1)=0$，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，

当 $x\to+\infty$ 时，$x+1\to+\infty$，$e^x\to+\infty$，故 $g(x)\to+\infty$.

所以 $g(x)$ 大致图像如下：



因为$a>0$，所以$y=g(x)$与$y=a$恰有一个交点，记为$(m,\ a)$，

所以$g(m)=a$，$m>-1$，$f'(m)=g(m)-a=0$．

当$x\in(-\infty,m)$时，$a>g(x)$，则$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减．

当$x\in(m,+\infty)$时，$a<g(x)$，则$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增．

所以$f(x)$存在唯一的极小值点m，无极大值点，$f(x)$的极值点个数为1．

……………11分

（III）由（II）知，当且仅当$x=m$时，$f(x)$取得最小值，且$g(m)=a$，$m>-1$．

所以$f(x)$最小值为$f(m)=me^m-am=me^m-mg(m)$；

所以原命题等价于存在a，使得$f(m)\geq b-a$；

等价于存在$m>-1$，使得$f(m)+g(m)\geq b$，

即$me^m-mg(m)+g(m)\geq b$，即$(-m^2+m+1)e^m\geq b$．　　……………13分

令$h(x)=\left(-x^2+x+1\right)e^x(x>-1)$，

则$h'(x)=-\left(x^2+x-2\right)e^x=-(x-1)(x+2)e^x(x>-1)$，

令$h'(x)=0$，得$x=1$．

$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下：

x	$(-1,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	极大	↘

所以当$x\in(-1,1)$时，$h(x)$单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)$单调递减．

所以当且仅当$x=1$时，$h(x)$取得最大值$h(1)=e$．

所以实数b的取值范围$(-\infty,\ e]$．　　……………15分

（21）（共15分）

解：（I）$\{1,3\}$不是2阶集，是3阶集．

因为$1+2=3\in\{1,3\}$，$1\times2=2\notin\{1,3\}$，

所以$\{1,3\}$不是2阶集.

因为$1+1+1=3\in\{1,3\}$；

对任意i_1，i_2，$i_3\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2+i_3\in\{1,3\}$，均有$i_1=i_2=i_3=1$，$i_1i_2i_3=1\in\{1,3\}$.

所以$\{1,3\}$是3阶集. ……………… 5分

（II）设A为2阶集.

[1] 由条件①，存在$n_0\geq2$，$n_0\in A$.

[2] 对任意$n\geq2$，$n\in A$，即$1+(n-1)\in A$，由条件②，必有$n-1\in A$.

[3] 对任意$n\geq5$，$n\in A$，即$2+(n-2)\in A$，由条件②，必有$2(n-2)\in A$，

其中$2(n-2)=n+(n-4)>n$.

（1）当存在$n_0\geq5$，$n_0\in A$时，由[3]，A无上界，由[2]，$A=\mathbf{N}^*$.

（2）当不存在$n_0\geq5$，$n_0\in A$时，由[1][2]，$A=\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$.

检验：

（1）当$A=\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\mathbf{N}^*$时，$1+1=2\in A$，条件①成立.

（2）当$A=\{1,2\}$时，对任意i_1，$i_2\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2\in A$，

均有$i_1=i_2=1$，$i_1i_2=1\in A$；

（3）当$A=\{1,2,3\}$时，考虑加法、乘法的交换律，

对任意i_1，$i_2\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2\in A$，即$1+1$，$1+2\in A$，均有1×1，$1\times2\in A$.

（4）同理，当$A=\{1,2,3,4\}$时，对$1+1$，$1+2$，$1+3$，$2+2\in A$，

均有1×1，1×2，1×3，$2\times2\in A$.

（5）当$A=\mathbf{N}^*$时，对任意i_1，$i_2\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2\in A$，均有$i_1i_2\in A$.

由（2）（3）（4）（5），$A=\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\mathbf{N}^*$时，条件②成立.

综上，$A=\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\mathbf{N}^*$为所有的2阶集. ……………10分

（II）存在3阶集A，使得A为无限集且$A\neq\mathbf{N}^*$.

设$B=\{2k-1|k\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{2k|k\in\mathbf{N}^*\}$.

[1] 由条件①，存在整数$n_0\geq3$，$n_0\in A$.

[2] 对任意$n\geq3$，$n\in A$，即$1+1+(n-2)\in A$，由条件②，必有$n-2\in A$.

[3] 对任意$n\geq6$，$n\in A$，即$2+2+(n-4)\in A$，由条件②，

必有$4(n-4)\in A$，其中$4(n-4)$为偶数，且$4(n-4)=n+(3n-16)>n$.

[4] 对任意奇数$n\geq7$，$n\in A$，即$1+3+(n-4)\in A$，由条件②，

必有$3(n-4)\in A$，其中$3(n-4)$为奇数，且$3(n-4)=n+(2n-12)>n$.

（1）因为A为无限集，所以存在$n_0\geq6$，$n_0\in A$，由[3] [2]，$C\subseteq A$.

（2）又因为$A\neq\mathbf{N}^*$，由[2]，$A\cap B=\varnothing$或$A\cap B$有最大元，设为m_0，

由[4]，$m_0\leq5$.

由[2]，$A=C$，$C\cup\{1\}$，$C\cup\{1,3\}$，$C\cup\{1,3,5\}$.

检验：

（1）对上述集合 A，因为$1+1+2=4\in A$，所以条件①成立.

（2）对任意i_1，i_2，$i_3\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2+i_3\in C$，

必有i_1，i_2，i_3不全为奇数，所以必有$i_1i_2i_3\in C$.

（3）考虑加法、乘法的交换律，对任意i_1，i_2，$i_3\in\mathbf{N}^*$，$i_1+i_2+i_3\in\{1,3,5\}$，

即$1+1+1$，$1+1+3$，$1+2+2\in\{1,3,5\}$，因为

$$1+1+1=3,\ 1\times1\times1=1,$$
$$1+1+3=5,\ 1\times1\times3=3,$$
$$1+2+2=5,\ 1\times2\times2=4,$$

结合（2），对上述集合 A，条件②成立.

综上，当且仅当 3 阶集$A=C$，$C\cup\{1\}$，$C\cup\{1,3\}$，$C\cup\{1,3,5\}$时，

A 为无限集且$A\neq\mathbf{N}^*$，

所以满足条件的集合 A 的个数为 4. ………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。