2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(五)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\frac{2-5i}{i}$,则 z 的虚部为

A. 2　　B. -2　　C. 5　　D. -5

2. 已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$,$B=\{x|x(x-3)<0\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|2<x<3\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$　　C. $\{x|-2<x<3\}$　　D. $\{x|x<2\}$

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x+3$ 的图象在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线方程为

A. $2x+y+11=0$　　B. $2x+y-11=0$　　C. $2x-y+11=0$　　D. $2x-y-11=0$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$,$\boldsymbol{b}=(2,-7)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|=$

A. 29　　B. -29　　C. 24　　D. -24

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=25$,那么 $a_4=$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

6. 甲、乙两班各有 10 名同学参加智力测试,他们的分数用茎叶图表示如下,则下列判断错误的是

甲班		乙班
5 2 2	8	1 2 3 7
8 6 5 4 3	9	2 5 9
4 1	10	1 4 6

A. 甲班的分数在 100 以上的人数比乙班的少　　B. 甲班的极差比乙班的小

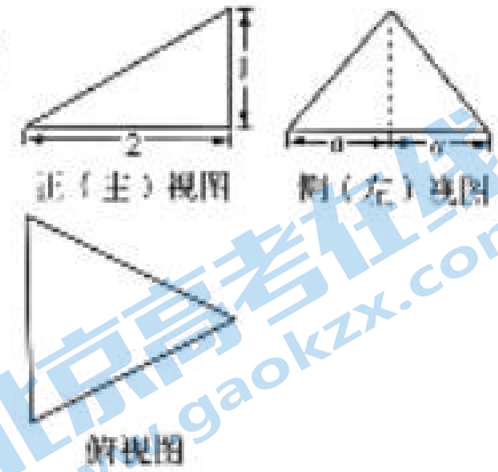
C. 甲班与乙班的中位数相等　　D. 甲班的平均数与乙班的相等

7. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)(\omega>0)$,若 $f(x)\geqslant f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,则 ω 的最小值为

A. $\frac{11}{2}$　　B. $\frac{13}{2}$　　C. $\frac{27}{2}$　　D. $\frac{31}{2}$

8. 某多面体的体积是$\frac{2}{3}$，其三视图如图所示，则侧（左）视图中的

$a=$



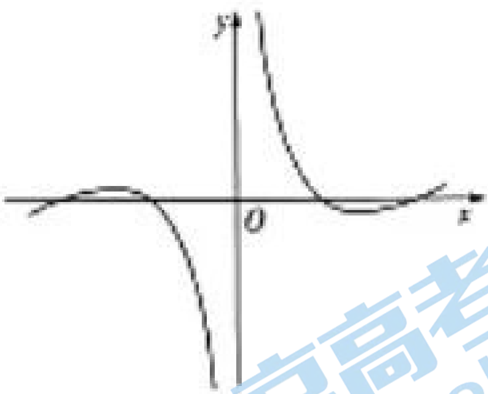
A. $\frac{1}{2}$

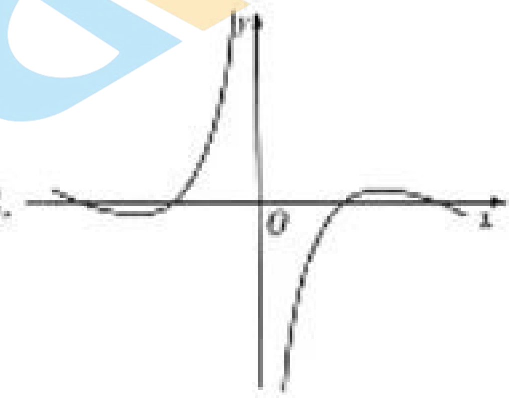
B. $\frac{2}{3}$

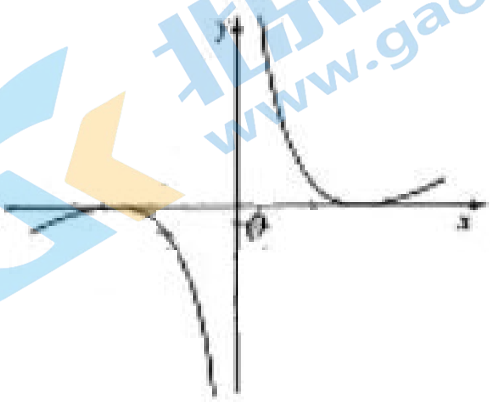
C. $\frac{3}{4}$

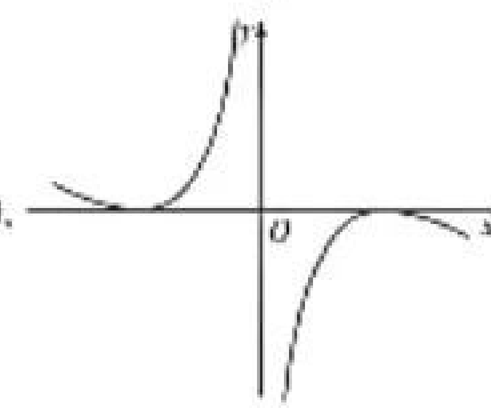
D. 1

9. 函数$f(x)=\frac{2}{x}\cos x+\frac{1}{x}$的图象大致为

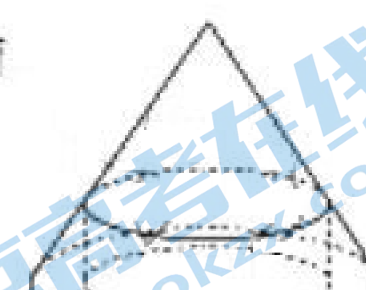
A. 

B. 

C. 

D. 

10. 如图所示，圆锥的底面半径为R，母线长为$\sqrt{10}R$，其内接圆柱的底面积与圆锥的底面积之比为9∶16，则该圆柱的表面积为



A. $2\pi R^2$

B. $\frac{9}{4}\pi R^2$

C. $\frac{8}{3}\pi R^2$

D. $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. 若$a=\sin\frac{1}{10}$，$b=\frac{1}{10}$，$c=-\ln\frac{10}{11}$，则

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

12. 国家体育场“鸟巢”的钢结构鸟瞰图如图1所示，内、外两圈的钢骨架是由两个离心率相同的椭圆组成的对称结构. 某校体育馆的钢结构与“鸟巢”类似，其平面图如图2所示，内、外椭圆的离心率均为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，由外层椭圆长轴的一个端点A和短轴的一个端点B分别向内层椭圆引切线AC、BD，若AC，BD的斜率分别为k_1，k_2，则$k_1^2+k_2^2$的最小值为

图1

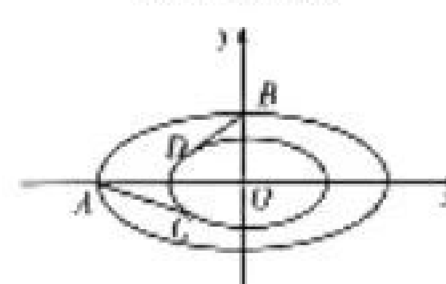


图2

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

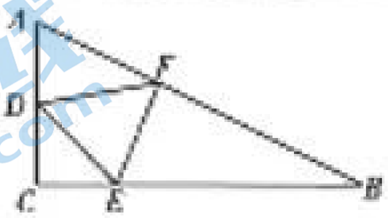
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\log_2(1+x^2)$，则 $f(-\sqrt{3})=$ ________.

14. 六位身高各不相同的同学拍照留念，摄影师要求前后两排各站三人，则最高的与最矮的在同一排的概率是 ________.

15. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点，过 A,B 分别作双曲线的同一条渐近线的垂线，垂足分别为 P,Q. 若 $|PQ|=2b$，则双曲线的离心率为 ________.

16. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=\frac{\pi}{3}$、$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$AC=4$，D、E、F 分别在边 AC,BC,AB 上，且 $\triangle DEF$ 为等边三角形，则 $\triangle DEF$ 面积的最小值是 ________.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17－21 题为必考题，每一个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{9}{13}$，且 $\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{8}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）证明：$\left\{\frac{3}{a_n}-4\right\}$ 是等比数列；

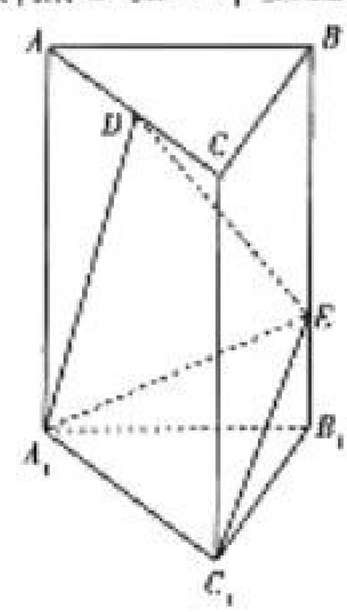
（Ⅱ）求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$BB_1=3\sqrt{6}$，D 是 AC 的中点，点 E 在 BB_1 上且 $BE=\frac{2}{3}BB_1$.

（Ⅰ）求证：$DE\perp$ 平面 A_1C_1E；

（Ⅱ）求二面角 $D-A_1E-A$ 的余弦值.



19.（12 分）

已知甲、乙两所体校都设有三个考试科目：足球、长跑、跳远．若小明报考甲体校，其每个科目通过的概率均为$\frac{2}{3}$，若小明报考乙体校，则其足球、长跑、跳远三个科目通过的概率依次为$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，m，其中$0<m<1$，且每个科目是否通过相互独立．

（Ⅰ）若$m=\frac{3}{4}$，A表示事件"小明报考甲体校时恰好通过2个科目"，B表示事件"小明报考乙体校时至多通过2个科目"，求$P(A)$，$P(B)$；

（Ⅱ）若小明报考甲体校相比报考乙体校，通过的科目数的期望值更大，求m的取值范围．

20.（12 分）

已知动点P到直线$y=-8$的距离比到点$(0,1)$的距离大7．

（Ⅰ）求动点P的轨迹方程；

（Ⅱ）记动点P的轨迹为曲线C，点M在直线$l_1:y=-1$上运动，过点M作曲线C的两条切线，切点分别为A，B，点N是平面内一定点，线段MA，NA，NB，MB的中点依次为E，F，G，H，若当M点运动时，四边形$EFGH$总为矩形，求定点N的坐标．

21.（12 分）

已知函数$f(x)=t\ln(x+1)-\sin x$．

（Ⅰ）若$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，求实数$t$的取值范围；

（Ⅱ）若当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geq 2-2e^x$，求实数t的取值范围．

（二）选考题：共10分．请考生在第22，23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22.［选修4－4：坐标系与参数方程］（10分）

在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t,\\y=3+t\end{cases}$（$t$为参数），在以原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线$C$的极坐标方程为$\rho(\rho-4\sin\theta)=-3$．

（Ⅰ）求l的普通方程和C的直角坐标方程；

（Ⅱ）设l和C交于A，B两点，求$\triangle AOB$的面积．

23.［选修4－5：不等式选讲］（10分）

已知函数$f(x)=2|x+1|+2|x|$．

（Ⅰ）求$f(x)$的最小值；

（Ⅱ）设$f(x)$的最小值为m，且正实数a，b，c满足$a+b+c=m$，求证：$a^3c+b^3a+c^3b\geq 2abc$．

天一大联考

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(五)

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析 $z=\frac{2-5i}{i}=\frac{-i(2-5i)}{1}=-5-2i$,则 z 的虚部为 -2.

2. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 $B=\{x|x(x-3)<0\}=\{x|0<x<3\}$,所以 $A\cup B=\{x|-2<x<3\}$.

3. 答案 C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-4$,则切线的斜率为 $f'(-2)=2$,而 $f(-2)=7$,所以切线方程为 $y-7=2(x+2)$,即 $2x-y+11=0$.

4. 答案 D

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算.

解析 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|=(-4,3)\cdot(2,-7)+5=-24$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 由等差中项的性质得 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5a_4=25$,解得 $a_4=5$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查茎叶图以及统计的有关概念.

解析 甲班的分数在 100 以上的有 2 人,乙班的分数在 100 以上的有 3 人,故 A 正确;甲班的极差为 $104-82=22$,乙班的极差为 $106-81=25$,故 B 正确;甲班的中位数为$\frac{94+95}{2}=94.5$,乙班的中位数为$\frac{92+95}{2}=93.5$,故 C 错误;甲班的平均数为 $80+\frac{1}{10}(2+2+5+13+14+15+16+18+21+24)=93$,乙班的平均数为 $80+\frac{1}{10}(1+2+3+7+12+15+19+21+24+26)=93$,故 D 正确.

7. 答案 B

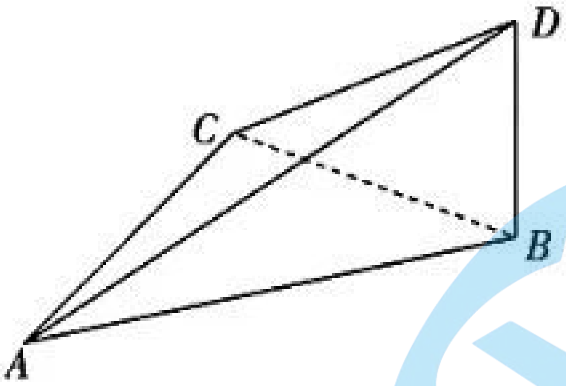
命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意得 $x=-\frac{\pi}{6}$是 $f(x)$ 的最小值点,则 $-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=-\frac{11}{2}-12k,k\in\mathbf{Z}$,又因为 $\omega>0$,故当 $k=-1$ 时,ω 取得最小值$\frac{13}{2}$.

8. 答案 D

命题意图 本题考查三视图.

解析 由三视图还原出原几何体，可知为三棱锥，如图所示，结合三视图得该三棱锥体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2a\times2\times1=\frac{2}{3}$，所以 $a=1$.



9. **答案** A

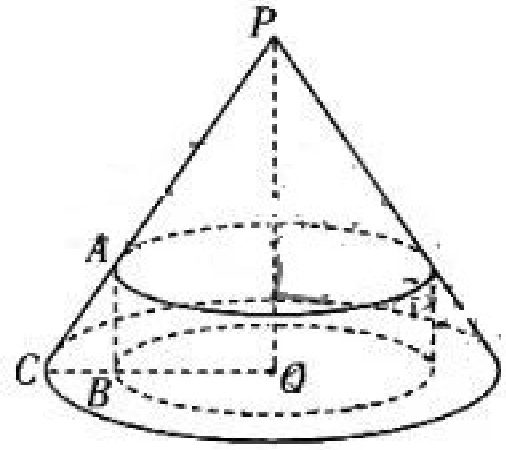
命题意图 本题考查利用函数的性质判断函数图象.

解析 $f(x)=\frac{1}{2}(2\cos x+1)$，令 $2\cos x+1=0$，可得 $f(x)$ 的正零点依次为 $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\cdots$，当 $x\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 时，$\cos x>-\frac{1}{2}$，$f(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，$f(x)<0$，结合选项可知只有 A 项符合.

10. **答案** B

命题意图 本题考查圆锥与圆柱的结构特征.

解析 根据题意，作图如下：



由已知可得 $PO=\sqrt{PC^2-CO^2}=\sqrt{(\sqrt{10}R)^2-R^2}=3R$，圆锥的内接圆柱的底面半径与圆锥的底面半径之比为 3∶4，所以圆锥的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$，即 $OB=\frac{3}{4}R$，$CB=\frac{1}{4}R$，根据三角形相似可得 $AB=\frac{3}{4}R$，故该内接圆柱的表面积为 $2\pi\times\left(\frac{3}{4}R\right)^2+2\pi\times\frac{3}{4}R\times AB=\frac{18}{16}\pi R^2+\frac{18}{16}\pi R^2=\frac{9}{4}\pi R^2$.

11. **答案** A

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 令函数 $f(x)=\sin x-x$，则 $f'(x)=\cos x-1\leqslant0$，即函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f\left(\frac{1}{10}\right)<f(0)=0$，$\sin\frac{1}{10}<\frac{1}{10}$. 令函数 $g(x)=\sin x-\ln(x+1)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，令函数 $h(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，则 $h'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$，因为 $h'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，且 $h'(0)=1>0$，$h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+1\right)^2}<0$，所以 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减. 又因为 $h(0)=0$，$h\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\frac{\pi}{6}+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{6}{\pi+6}>0$，所以 $h(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上恒成立，所以 $g'(x)>0$，即

$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，所以$g(x)>g(0)=0$，即$\sin x>\ln(x+1)$，当$x=\frac{1}{10}$时，$\sin\frac{1}{10}>\ln\left(\frac{1}{10}+1\right)=-\ln\frac{10}{11}$. 所以$c<a<b$.

12. 答案　C

命题意图　本题考查椭圆的性质，椭圆与直线的位置关系.

解析　设外层椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则内层椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$，$AC$的方程为$y=k_1(x+a)$，与$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$联立得$(b^2+a^2k_1^2)x^2+2a^3k_1^2x+a^4k_1^2-\lambda a^2b^2=0$，由$\Delta_1=4a^6k_1^4-4(b^2+a^2k_1^2)(a^4k_1^2-\lambda a^2b^2)=0$，得$k_1^2=\frac{\lambda b^2}{(1-\lambda)a^2}$. BD的方程为$y=k_2x+b$，与$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$联立得$(b^2+a^2k_2^2)x^2+2a^2k_2bx+(1-\lambda)a^2b^2=0$，由$\Delta_2=4a^4k_2^2b^2-4(b^2+a^2k_2^2)(1-\lambda)a^2b^2=0$，得$k_2^2=\frac{(1-\lambda)b^2}{a^2}$. 因为离心率为$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，从而$k_1^2+k_2^2=\frac{\lambda b^2}{(1-\lambda)a^2}+\frac{(1-\lambda)b^2}{a^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{\lambda b^2}{(1-\lambda)a^2}\cdot\frac{(1-\lambda)b^2}{a^2}}=2\sqrt{\frac{b^4}{a^4}}=\frac{4}{3}$，当且仅当$\frac{\lambda b^2}{(1-\lambda)a^2}=\frac{(1-\lambda)b^2}{a^2}$，即$\lambda=\frac{1}{2}$时取等号，故$k_1^2+k_2^2$的最小值为$\frac{4}{3}$.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 答案　-1

命题意图　本题考查函数的奇偶性.

解析　$f(-\sqrt{3})=-f(\sqrt{3})=-\log_4[1+(\sqrt{3})^2]=-1$.

14. 答案　$\frac{2}{5}$

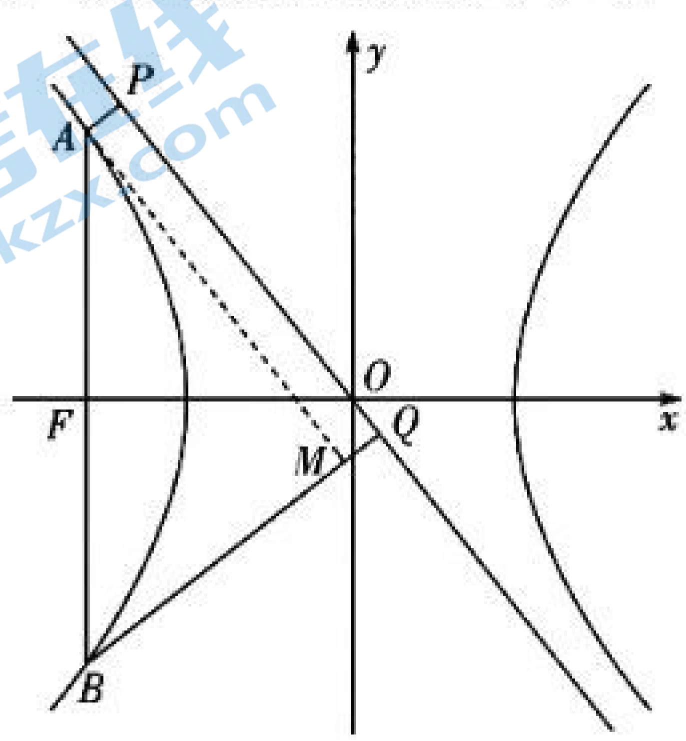
命题意图　本题考查排列组合的应用.

解析　六位身高各不相同的同学前后两排各三人排列的方法数为A_6^6，其中最高的与最矮的在同一排的方法总数为$C_2^2C_2^1A_3^2A_4^4$，则所求概率是$\frac{C_2^2C_2^1A_3^2A_4^4}{A_6^6}=\frac{2}{5}$.

15. 答案　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　如图所示，作$AM\perp BQ$，垂足为M，设双曲线的半焦距为$c(c>0)$，



在$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中，令$x=-c$，得$\frac{(-c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，解得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，则$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，$|PQ|=|AM|=|AB|\cos\angle BAM=|AB|\cos\angle POy=\frac{2b^2}{a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2b^2}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{2b^3}{ac}$，又$|PQ|=2b$，所以$\frac{2b^3}{ac}=2b$，得$b^2=ac$，得$c^2-a^2=ac$，得$c^2-a^2-ac=0$，得$e^2-e-1=0$，解得$e=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，舍去$e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

故双曲线的离心率为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. **答案** $\frac{12\sqrt{3}}{7}$

命题意图 本题考查三角函数的应用.

解析 不妨设$\triangle DEF$的边长为a，$\angle CDE=\theta$. 在$Rt\triangle CDE$中，$CD=a\cos\theta$. 因为$\angle ADF=\pi-\theta-\frac{\pi}{3}$，所以在$\triangle AFD$中，可得$\angle AFD=\pi-\frac{\pi}{3}-\angle ADF=\theta$. 根据正弦定理可得$\frac{AD}{\sin\theta}=\frac{DF}{\sin A}$，所以$AD=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\theta$，所以$AC=CD+AD=a\left(\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}a\sin(\theta+\varphi)=4$，其中$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当$\sin(\theta+\varphi)=1$时，$a$取得最小值$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$，$\triangle DEF$面积的最小值为$\frac{4\sqrt{21}}{7}\times\frac{4\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查数列的递推关系，以及等比数列的性质与求和.

解析 (Ⅰ)因为$\frac{3}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{8}{3}$，所以$\frac{3}{a_{n+1}}-4=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a_n}-4\right)$. ……………………（2分）

又$\frac{3}{a_1}-4=\frac{1}{3}$，……………………（3分）

所以数列$\left\{\frac{3}{a_n}-4\right\}$是首项为$\frac{1}{3}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列. ……………………（5分）

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$\frac{3}{a_n}-4=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，……………………（7分）

所以$\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}$. ……………………（8分）

所以$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{4n}{3}$

$=\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{4n}{3}$

$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{4n}{3}$. ……………………（12分）

18. **命题意图** 本题考查线面垂直的证明以及利用空间向量计算二面角.

解析 (Ⅰ)如图，连接BD，C_1D.

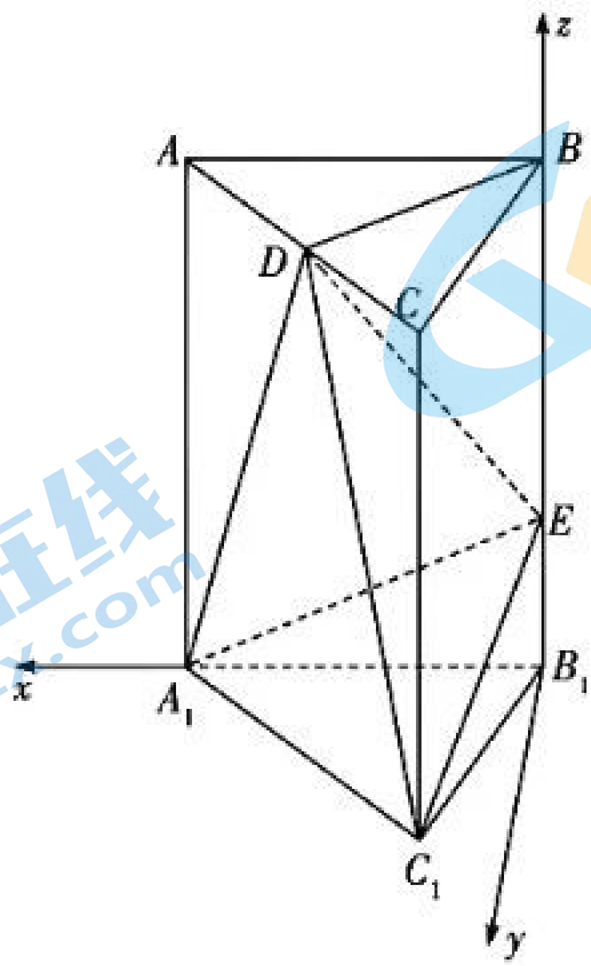
由已知可得$CD=2$，$BE=2\sqrt{6}$，$B_1E=\sqrt{6}$，$BD=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，……………………（1分）

所以 $DE=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6})^2}=6$，$C_1E=\sqrt{4^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{22}$，$C_1D=\sqrt{2^2+(3\sqrt{6})^2}=\sqrt{58}$，……（2 分）

所以 $DE^2+C_1E^2=C_1D^2$，所以 $DE\perp C_1E$，……（3 分）

同理 $DE\perp A_1E$，……（4 分）

又 $A_1E\cap C_1E=E$，所以 $DE\perp$ 平面 A_1C_1E. ……（5 分）



（Ⅱ）分别以 B_1A_1，B_1B 所在的直线为 x，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则点 $A_1(4,0,0)$，$D(3,\sqrt{3},3\sqrt{6})$，$E(0,0,\sqrt{6})$，

则 $\overrightarrow{A_1E}=(-4,0,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{DE}=(-3,-\sqrt{3},-2\sqrt{6})$. ……（6 分）

设平面 A_1DE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=(x,y,z)\cdot(-4,0,\sqrt{6})=-4x+\sqrt{6}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=(x,y,z)\cdot(-3,-\sqrt{3},-2\sqrt{6})=-3x-\sqrt{3}y-2\sqrt{6}z=0,\end{cases}$

令 $z=4$，得平面 A_1DE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{6},-11\sqrt{2},4)$. ……（8 分）

又易知平面 A_1EA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-11\sqrt{2}}{\sqrt{6+242+16}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{6}$，……（11 分）

由图可知二面角 $D-A_1E-A$ 的平面角为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{33}}{6}$. ……（12 分）

19. 命题意图　本题考查相互独立事件的概率计算以及随机变量的分布列与期望.

解析　（Ⅰ）$P(A)=C_3^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$；……（2 分）

$P(B)=1-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$. ……（4 分）

（Ⅱ）设小明报考甲体校通过的科目数为 X，报考乙体校通过的科目数为 Y，

根据题意可知随机变量 $X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，所以 $E(X)=3\times\dfrac{2}{3}=2$. ……（6 分）

随机变量 Y 的所有可能取值为 0，1，2，3，……（7 分）

$P(Y=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times(1-m)=\dfrac{1}{12}(1-m)$，

$P(Y=1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times(1-m)+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times m=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}m$,

$P(Y=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times m+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times m=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}m$,

$P(Y=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times m=\frac{1}{2}m$. ……………………………………………………………（9 分）

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{12}(1-m)+1\times\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{3}m\right)+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}m\right)+3\times\left(\frac{1}{2}m\right)=\frac{17}{12}+m$. ……………（10 分）

由题意知 $E(X)>E(Y)$，即 $2>\frac{17}{12}+m$，……………………………………………………………（11 分）

又因为 $0<m<1$，所以 $0<m<\frac{7}{12}$.

所以，m 的取值范围是 $\left(0,\frac{7}{12}\right)$. ……………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查抛物线的方程，抛物线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）因为动点 P 到直线 $y=-8$ 的距离比到点 $(0,1)$ 的距离大 7，

所以动点 P 到直线 $y=-1$ 的距离等于到点 $(0,1)$ 的距离，……………………………………（1 分）

所以动点 P 的轨迹是以点 $(0,1)$ 为焦点，$y=-1$ 为准线的抛物线，…………………………（3 分）

所以动点 P 的轨迹方程是 $x^2=4y$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）若四边形 $EFGH$ 为矩形，则 $MN\perp AB$. ……………………………………………………（5 分）

当点 M 在 $(0,-1)$ 处时，两个切点 A，B 关于 y 轴对称，故要使得 $MN\perp AB$，则点 N 必须在 y 轴上. ……（6 分）

故设 $M(m,-1)$，$N(0,n)$，$A\left(x_1,\frac{1}{4}x_1^2\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{4}x_2^2\right)$，

C 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$，求导得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以切线 MA 的斜率 $k_1=\frac{1}{2}x_1$，

直线 MA 的方程为 $y-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，……………………………………………（7 分）

又点 M 在直线 MA 上，所以 $-1-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1(m-x_1)$，整理得 $x_1^2-2mx_1-4=0$，……………（8 分）

同理可得 $x_2^2-2mx_2-4=0$，

故 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $x^2-2mx-4=0$ 的根，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\x_1x_2=-4,\end{cases}$ ……………………（9 分）

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(x_2-x_1,\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)\cdot(-m,n+1)=-m(x_2-x_1)+\left(\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)(n+1)$

$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)[-4m+2m(n+1)]=\frac{1}{2}m(x_2-x_1)(n-1)$，……………………………………（10 分）

可见当 $n=1$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ 恒成立，……………………………………………（11 分）

即点 N 的坐标为 $(0,1)$. …………………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）$f(x)=t\ln(x+1)-\sin x$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{t}{x+1}-\cos x=\frac{t-(x+1)\cos x}{x+1}$. ……………………………………………………（1 分）

令 $g(x)=t-(x+1)\cos x$，则 $g'(x)=-[\cos x-(x+1)\sin x]=(x+1)\sin x-\cos x$，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\sin x>\cos x$，$x+1>1$，则 $(x+1)\sin x>\cos x$，…………………………………… (2 分)

即 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=t-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cos\frac{\pi}{2}=t$，…………………………………… (3 分)

要使 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，需满足 $g(x)_{\max}=t\leqslant 0$，…………………………………… (4 分)

故实数 t 的取值范围是 $(-\infty,0]$. …………………………………… (5 分)

(Ⅱ) $f(x)\geqslant 2-2e^x$ 即为 $t\ln(x+1)-\sin x\geqslant 2-2e^x$，得 $2e^x-\sin x+t\ln(x+1)-2\geqslant 0$.

令 $h(x)=2e^x-\sin x+t\ln(x+1)-2$，则 $h'(x)=2e^x-\cos x+\frac{t}{x+1}$.

(ⅰ)当 $t\geqslant 0$ 时，对任意的 $x\in[0,\pi]$，$\cos x\in[-1,1]$，$2e^x\geqslant 2$，则 $h'(x)>0$，

此时 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，符合题意. …………………………………… (8 分)

(ⅱ)当 $t<0$ 时，令 $p(x)=h'(x)$，则 $p'(x)=2e^x+\sin x-\frac{t}{(x+1)^2}$，

易知 $p'(x)>0$ 对任意的 $x\in[0,\pi]$ 恒成立，所以 $p(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

因为 $p(0)=t+1$，$p(\pi)=2e^{\pi}+1+\frac{t}{\pi+1}$.

①当 $t+1\geqslant 0$，即当 $-1\leqslant t<0$ 时，对任意的 $x\in[0,\pi]$，$h'(x)\geqslant 0$，

此时，$h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，则 $h(x)\geqslant h(0)=0$，符合题意；…………………………………… (9 分)

②当 $\begin{cases}p(0)<0,\\ p(\pi)>0\end{cases}$ 即当 $-(\pi+1)(2e^{\pi}+1)<t<-1$ 时，

由零点存在定理可知，存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $h'(x_0)=0$，

且当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，

所以 $h(x_0)<h(0)=0$，不符合题意；…………………………………… (10 分)

(ⅲ)当 $p(\pi)\leqslant 0$，即当 $t\leqslant -(\pi+1)(2e^{\pi}+1)$ 时，对任意的 $x\in[0,\pi]$，$h'(x)\leqslant 0$，

此时，函数 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则 $h(\pi)<h(0)=0$，不符合题意. …………………………………… (11 分)

综上所述，t 的取值范围是 $[-1,+\infty)$. …………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查方程的互化、直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由 $\begin{cases}x=t,\\ y=3+t\end{cases}$ 消去参数 t，得 $x-y+3=0$，

所以 l 的普通方程为 $x-y+3=0$. …………………………………… (2 分)

由 $\rho(\rho-4\sin\theta)=-3$，得 $\rho^2-4\rho\sin\theta=-3$，

将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入，得 $x^2+y^2-4y=-3$，

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$. …………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=1$，

曲线 C 是以 $(0,2)$ 为圆心，半径为 1 的圆，…………………………………… (5 分)

圆心 $C(0,2)$ 到 l 的距离为 $\frac{|0-2+3|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，…………………………………… (6 分)

所以 $|AB|=2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}$. ………………………………（7分）

原点 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|0-0+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ………………………………（8分）

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$. ………………………………（10分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质，基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）$f(x)=2|x+1|+2|x|=|2x+2|+|2x|\geqslant|2x+2-2x|=2$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 2. ………………………………（4分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a+b+c=2$, ………………………………（5分）

由基本不等式可得 $b+\frac{a^2}{b}\geqslant2\sqrt{b\times\frac{a^2}{b}}=2a$，$c+\frac{b^2}{c}\geqslant2\sqrt{c\times\frac{b^2}{c}}=2b$，$a+\frac{c^2}{a}\geqslant2\sqrt{a\times\frac{c^2}{a}}=2c$. ………（7分）

上述三个不等式相加可得 $\left(b+\frac{a^2}{b}\right)+\left(c+\frac{b^2}{c}\right)+\left(a+\frac{c^2}{a}\right)\geqslant2a+2b+2c$, ………………………………（8分）

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c=2$. ………………………………（9分）

所以 $\frac{a^3c+b^3a+c^3b}{abc}\geqslant2$，则 $a^3c+b^3a+c^3b\geqslant2abc$. ………………………………（10分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。