2023北京通州高一（下）期中
数　　学

2023年4月

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．复数 $z=3-2i$ 的虚部为

（A）3　　（B）2　　（C）-2　　（D）$-2i$

2．在复平面内，点 $M(1,2)$ 对应的复数的模等于

（A）5　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）2　　（D）1

3．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是单位向量，则下列四个结论中正确的是

（A）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　（B）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　（C）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$　　（D）$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$

4．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,4)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

（A）$-\frac{3}{5}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）-1　　（D）1

5．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，且 $\boldsymbol{b}=(-3,4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

（A）$(-6,8)$　　（B）$(6,-8)$　　（C）$\left(-\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$　　（D）$\left(\frac{6}{5},-\frac{8}{5}\right)$

6．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，则“$m=3$”是“$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$”的

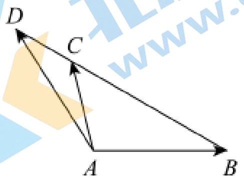
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7. 如图所示，点 C 在线段 BD 上，且 $BC=3CD$，则 $\overrightarrow{AD}=$

（A）$3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$　　（B）$4\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$

（C）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　（D）$\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



8. 抛掷两枚硬币，观察它们落地时朝上的面的情况，该试验的样本空间中样本点的个数为

（A）1　　（B）2　　（C）4　　（D）8

9. 若某群体中的成员用现金支付的概率为0.60，用非现金支付的概率为0.55，则既用现金支付也用非现金支付的概率为

（A）0.10　　（B）0.15　　（C）0.40　　（D）0.45

10. 已知 a，$b\in\{-2,-1,1,2\}$，若向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$，则向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成的角为锐角的概率是

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{3}{8}$　　（C）$\frac{3}{16}$　　（D）$\frac{7}{16}$

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

11. 已知 i 是虚数单位，则 $i^{10}=$____.

12. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，则$\sin C=$___.

13. 某人射击中靶的概率为 0.9，连续射击 3 次，每次射击的结果互不影响，则至少中靶一次的概率是___.

14. 一条河宽为 800m，一艘船从岸边的某处出发向对岸航行．船的速度的大小为 20km/h，水流速度的大小为 12 km/h，则当航程最短时，这艘船行驶完全程所需要的时间为___ min.

15. 在正方形$ABCD$中，$AB=2$，P为BC边的中点，Q为CD边的中点，M为AB边（包括端点）上的动点，则$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}$的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

已知 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，复数$z_1=a+\mathrm{i}$与$z_2=2+b\mathrm{i}$互为共轭复数.

（Ⅰ）求 a，b 的值，并指出复平面内z_2对应的点所在的象限；

（Ⅱ）计算z_1z_2，$z_1^{\ 2}$，$\frac{z_1}{z_2}$；

（Ⅲ）当实数λ取什么值时，复数$z=z_1+\lambda z_2$是下列数？

（1）实数；（2）虚数；（3）纯虚数.

17.（本小题13分）

在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(3,3)$，$B(5,1)$，$P(2,1)$.

（Ⅰ）求$\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|$的值；

（Ⅱ）设点M是坐标平面内一点，且四边形$APBM$是平行四边形，求点M的坐标；

（Ⅲ）若点N是直线OP上的动点，求$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$的最小值.

18.（本小题 15 分）

袋子中有 5 个大小质地完全相同的球，其中红球 3 个，白球 2 个.

（Ⅰ）从中依次有放回地随机摸出2个球，求第一次摸到白球的概率；

（Ⅱ）从中依次无放回地随机摸出2个球，求第二次摸到白球的概率；

（Ⅲ）若同时随机摸出2个球，求至少摸到一个白球的概率.

19.（本小题 13 分）

已知$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，向量$\boldsymbol{m}=\left(a,\sqrt{3}b\right)$与$\boldsymbol{n}=\left(\sin B,-\cos A\right)$垂直.

（Ⅰ）求A的大小；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{7}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积.

20．（本小题 15 分）

已知在$\triangle ABC$中，$a\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=c$．

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上高线的长．

条件①：$a=2$，$c=2\sqrt{3}$；

条件②：$b=3$，$c=\sqrt{3}$；

条件③：$\cos B=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$b=1$．

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答给分．

21．（本小题 15 分）

若函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$，则称向量 $\boldsymbol{p}=(a,b)$ 为函数 $f(x)$ 的特征向量，函数 $f(x)$ 为向量 $\boldsymbol{p}$ 的特征函数．

（Ⅰ）若函数 $f_1(x)=\sin(\pi-x)+\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)$，求 $f_1(x)$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1$；

（Ⅱ）若向量 $\boldsymbol{p}_2=(\sqrt{3},1)$ 的特征函数为 $f_2(x)$，求当 $f_2(x)=\dfrac{6}{5}$，且 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时 $\sin x$ 的值；

（Ⅲ）已知点 $A(-3,3)$，$B(3,11)$，设向量 $\boldsymbol{p}_3=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的特征函数为 $f_3(x)$，函数 $h(x)=4f_3^{\,2}(x)-2$．在函数 $h(x)$ 的图象上是否存在点Q，使得 $\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{BQ}$？如果存在，求出点$Q$ 的坐标；如果不存在，请说明理由．

参考答案

第一部分

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	D	A	C	A	D	C	B	A

第二部分

二、填空题

11．-1　　12．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　13．0.999　　14．3　　15．$[-1,1]$

三、解答题

16．（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $z_1=a+\mathrm{i}$ 与 $z_2=2+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数，

所以 $a=2$，$b=-1$．　……………………………………………………2 分

所以 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$．

所以复平面内 z_2 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，

所以复平面内 z_2 对应的点在第四象限．……………………………………………3 分

（Ⅱ）$z_1z_2=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=4-\mathrm{i}^2=5$，　…………………5 分

$z_1^{\ 2}=(2+\mathrm{i})^2=4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=3+4\mathrm{i}$，　…………………7 分

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})^2}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{z_1^{\ 2}}{z_1z_2}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$．　…………………9 分

（Ⅲ）$z=(2+\mathrm{i})+\lambda(2-\mathrm{i})=2(1+\lambda)+(1-\lambda)\mathrm{i}$．　……………………………11 分

（1）当 $1-\lambda=0$，即 $\lambda=1$ 时，复数 z 是实数．　…………………………12 分

（2）当 $1-\lambda\neq0$，即 $\lambda\neq1$ 时，复数 z 是虚数．　………………………13 分

（3）当 $1+\lambda=0$，且 $1-\lambda\neq0$，即 $\lambda=-1$ 时，复数 z 是纯虚数．…………14 分

17．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}=(3-5,3-1)=(-2,2)$，　……………………2 分

所以 $\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$．　…………………………3分

（Ⅱ）设点 M 的坐标为 (x_1, y_1)，则

因为四边形 $APBM$ 是平行四边形，

所以 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BM}$，　……………………………………………………5分

所以 $(3-2,3-1)=(x_1-5,y_1-1)$，……………………………………………6分

所以 $x_1=6$，$y_1=3$，

即点 M 的坐标为 $(6,3)$．……………………………………………………7分

（Ⅲ）设点 N 的坐标为 (x_2, y_2)，则

因为点 N 在直线 OP 上，

所以 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OP}$，即 $(x_2, y_2)=(2\lambda, \lambda)$．　………………………9分

所以 $\overrightarrow{NA}=(3-x_2,3-y_2)=(3-2\lambda,3-\lambda)$，

$\overrightarrow{NB}=(5-x_2,1-y_2)=(5-2\lambda,1-\lambda)$．　………………………11分

所以 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(3-2\lambda)(5-2\lambda)+(3-\lambda)(1-\lambda)$

$=5\lambda^2-20\lambda+18=5(\lambda-2)^2-2\geq -2$.

当且仅当 $\lambda=2$ 时，等号成立.

所以，若点 N 是直线 OP 上的动点，则 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$ 的最小值为 -2. ………………13分

18.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）记三个红球编号为 1，2，3，两个白球分别为 4，5，则在有放回情况下，第一次摸球时有 5 种等可能的结果，对应第一次摸球的每个可能结果，第二次摸球时都有 5 种等可能的结果．将两次摸球的结果配对，组成 25 种等可能的结果，如表 1 所示.

表 1

第一次	第二次				
	1	2	3	4	5
1	（1，1）	（1，2）	（1，3）	（1，4）	（1，5）
2	（2，1）	（2，2）	（2，3）	（2，4）	（2，5）
3	（3，1）	（3，2）	（3，3）	（3，4）	（3，5）
4	（4，1）	（4，2）	（4，3）	（4，4）	（4，5）
5	（5，1）	（5，2）	（5，3）	（5，4）	（5，5）

…………………………3 分

第一次摸到白球的可能结果有 10 种，见表中后两行．　……………………4 分

记 A=“第一次摸到白球”，则 $P(A)=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$.　………………………5 分

（Ⅱ）在无放回情况下，第一次摸球时有 5 种等可能的结果，对应第一次摸球的每个可能结果，第二次摸球时都有 4 种等可能的结果．将两次摸球的结果配对，组成 20 种等可能的结果，如表 2 所示.

表 2

第一次	第二次				
	1	2	3	4	5
1	×	（1，2）	（1，3）	（1，4）	（1，5）
2	（2，1）	×	（2，3）	（2，4）	（2，5）
3	（3，1）	（3，2）	×	（3，4）	（3，5）
4	（4，1）	（4，2）	（4，3）	×	（4，5）
5	（5，1）	（5，2）	（5，3）	（5，4）	×

…………………………8 分

第二次摸到白球的可能结果有 8 种，见表中后两列．　…………………………9 分

记 B=“第二次摸到白球”，则 $P(B)=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$.　………………………10 分

（III）“同时摸出两个球”，参考“依次无放回地摸出 2 个球”，则由表 2 可知，至少摸到一个白球的可能结果有 14 种，即（1，4），（1，5），（2，4），（2，5），（3，4），（3，5），（4，1），（4，2），（4，3），（4，5），（5，1），（5，2），（5，3），（5，4）.

. ………………………14 分

记 C=“至少摸到一个白球”，则 $P(C)=\dfrac{14}{20}=\dfrac{7}{10}$.　………………………15 分

19.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{n}=0$，　…………………………………………1 分

即 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$.　…………………………3 分

由正弦定理得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$.　……………………………5 分

因为 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$.　……………………………………………7 分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.　　　　　　　　　　…………………………………………8 分

（Ⅱ）由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，　　　　………………………9 分

所以 $7=4+c^2-2c$，

解得 $c=3$，或 $c=-1$（舍）.　　　　　　　…………………………………11 分

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.　　……………13 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，

因为 $a\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=c$，

所以由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\sin C$.　……………………………2 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.　……………………………5 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\cos A\sin B$.　　　　　…………………………………6分

因为 $\sin B\neq0$，

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　　……………………………………………………………… 7 分

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.　　　……………………………………………………………8分

（Ⅱ）**选条件①**：△ABC 不唯一.

选条件②：　……………………………………………………………………………9 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+3-2\times3\times\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=3$，

所以 $a=\sqrt{3}$.　　　……………………………………………………12 分

所以△ABC 为等腰三角形，$C=A=\dfrac{\pi}{6}$.　　　…………………………13 分

设 BC 边上高线的长为 h，则

$h=b\sin C=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.　　　…………………………………………15 分

选条件③：　……………………………………………………………………………9 分

因为在△ABC 中，$\cos B=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.　　　……………………………………10 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$ ……………………………13 分

设 BC 边上高线的长为 h，则

$$h=b\sin C=1\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$ ……………………………………………15 分

21．（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f_1(x)=\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$

$=\sin x-\cos x$， ……………………………………………1 分

所以函数 $f(x)$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-1)$． ……………………………………2 分

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{p}_2=(\sqrt{3},1)$，所以 $f_2(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$． ……………3 分

又 $f_2(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{5}.$$

所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$． ……………………………………………………………4 分

因为 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $x+\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4}{5}$． ……………………………………5 分

所以 $\sin x=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$$ ……………………………6 分

$$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$ ……………………………………7 分

（Ⅲ）不存在．理由如下： ……………………………………………………………8 分

由向量 $\boldsymbol{p}_3=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的特征函数为 $f_3(x)$，得

$$f_3(x)=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $h(x)=4f_3^2(x)-2=2\left[2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$． ………10 分

设函数 $h(x)$ 的图象上任一点 $Q\left(x,2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$，则

$$\overrightarrow{AQ}=\left(x+3,2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\right),$$

$\overrightarrow{BQ}=\left(x-3,2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-11\right)$. ……………………………………………11 分

所以 $\overrightarrow{AQ}\bullet\overrightarrow{BQ}=(x+3)(x-3)+\left[2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\right]\left[2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-11\right]$

$=x^2+4\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{2}\right]^2-25$. ………………………13 分

因为 $-1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$,

所以 $-\frac{9}{2}\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{2}\le-\frac{5}{2}$,

所以 $\frac{25}{4}\le\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{2}\right]^2\le\frac{81}{4}$,

所以 $4\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{2}\right]^2\ge 25$,

当且仅当 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$ 时取等号. ……………………………14 分

所以 $\overrightarrow{AQ}\bullet\overrightarrow{BQ}=x^2+4\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{2}\right]^2-25>0$.

所以函数 $h(x)$ 的图象上任一点 Q，都不能使得 $\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{BQ}$.

即函数 $h(x)$ 的图象上不存在点 Q，使得 $\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{BQ}$. …………………………15 分

注：解答题学生若有其它解法，请酌情给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。