绝密★启用前

试卷类型：B

2022年汕头市普通高考第三次模拟考试试题

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分，考试用时120分钟.

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号等信息填涂在答题卡相应位置上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将试题卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷　选择题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集为 R，$A=\{x|x^2-1>0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，$(C_RA)\cap B=\{x|-1\le x<0\}$，则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. 0

2. 2022 年北京冬季奥运会期间，从 3 名男志愿者和 2 名女志愿者中选 4 名去支援“冰壶”“花样滑冰”“短道速滑”三项比赛志愿者工作，其中冰壶项目需要一男一女两名，花样滑冰和短道速滑各需要一名，男女不限. 则不同的支援方法的种数是

A. 36　　B. 24　　C. 18　　D. 42

3. 在 ΔABC 中，$(\overline{BC}+\overline{BA})\cdot\overline{AC}=|\overline{AC}|^2$，则 ΔABC 的形状一定是

A. 等腰直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 直角三角形

4. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-\frac{1}{4}$，当$n>1$时，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$，则$a_{2022}=$

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. 5　　D. $-\frac{4}{5}$

5. 下列说法错误的是

A. 命题“$\forall x\in R,\cos x\le 1$”的否定是“$\exists x_0\in R,\cos x_0>1$”

B. 在$\triangle ABC$中，$\sin A\ge\sin B$是$A\ge B$的充要条件

C. 若$a,b,c\in R$，则“$ax^2+bx+c\ge 0$”的充要条件是“$a>0$，且$b^2-4ac\le 0$”

D. “若$\sin\alpha\ne\frac{1}{2}$，则$\alpha\ne\frac{\pi}{6}$”是真命题

6. 已知$\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos 2\alpha=$

A. $\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{16}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $\frac{13}{25}$

7. $\left(x^5+\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)^n$的展开式中含有常数项，则$n$的最小值等于

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x-x,x>0\\ f(x+1),x\le 0\end{cases}$，若关于$x$的方程$2f(x)-kx+1=0$有四个不同的实根，则实数$k$的取值范围是

A. $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6}\right]\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{4},-\frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ [illegible]

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知复数z_1对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$，复数z_2对应的向量为$\overrightarrow{OZ_2}$，下列说法中正确的是

A. 若$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$

B. 若$(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2})\perp(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2})$，则$|z_1|=|z_2|$

C. 若z_1与z_2在复平面上对应的点关于实轴对称，则$z_1z_2=|z_1z_2|$

若$|z_1|=|z_2|$，则$z_1^2=z_2^2$

10. 关于曲线C：$(x-m)^2+(y-m)^2=(m-1)^2$，下列说法正确的是

A. 曲线C一定不过点$(0,2)$

B. 若$m>1$，过原点与曲线C相切的直线有两条

C. 若$m=1$，曲线C表示两条直线

D. 若$m=2$，则直线$y=x$被曲线C截得弦长等于$2\sqrt{2}$

11. 已知函数$f(x)=\sin 2x+2\cos 2x$，$g(x)=f(x)+|f(x)|$. 若存在$a\in R$，使得对任意$x\in \mathbf{R}$，$f(x)\geq f(a)$，则

A. $f(x)$在$\left(a,a+\frac{\pi}{2}\right)$单调递增

B. $\forall x_1,x_2\in R$，$|g(x_1)-g(x_2)|\leq\sqrt{5}$

C. $\exists\theta>0$，使得$g(x)$在$(a,a+\theta)$上有且仅有1个零点

D. 若$g(x)$在$\left(a+\theta,a-\frac{\pi}{3}\right)$单调，则$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$

12. 意大利人斐波那契于1202年从兔子繁殖问题中发现了这样的一列数：1,1,2,3,5,8,13,⋯. 即从第三项开始，每一项都是它前两项的和. 后人为了纪念他，就把这列数称为斐波那契数列. 下面关于斐波那契数列$\{a_n\}$说法正确的是

A. $a_{12}=144$

B. a_{2022}是奇数

C. $a_{2022}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}$

D. $a_{2020}+a_{2024}=3a_{2022}$

第II卷　非选择题

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分，其中，16题第一空2分，第二空3分.

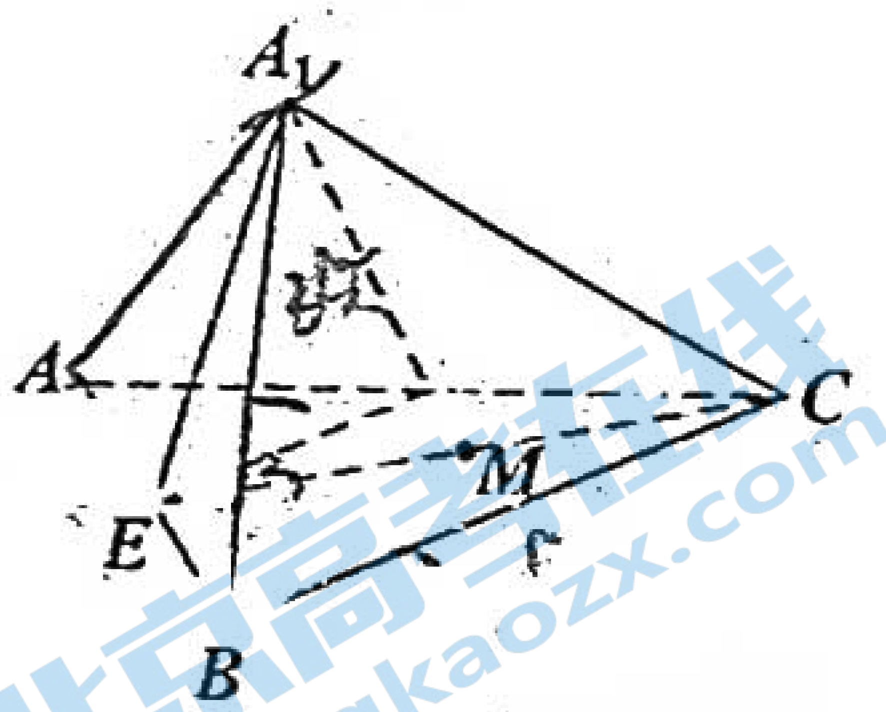
13. 已知函数$f(x)=x^3+\ln x$在点$A(1,f(x))$处的切线为l，若l与函数$g(x)$相切，切点为$B(2,m)$，则$g(2)+g'(2)=$ ____

14. 已知正方形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，若正方形 $ABCD$ 的一条边经过椭圆 E 的焦点 F，则 E 的离心率是________

15. 某省 2021 年开始将全面实施新高考方案. 在 6 门选择性考试科目中，物理、历史这两门科目采用原始分计分；思想政治、地理、化学、生物这 4 门科目采用等级转换赋分，将每科考生的原始分从高到低划分为 A,B,C,D,E 共 5 个等级，各等级人数所占比例分别为15%、35%、35%、13%和2%，并按给定的公式进行转换赋分. 该省组织了一次高一年级统一考试，并对思想政治、地理、化学、生物这 4 门科目的原始分进行了等级转换赋分. 假设该省此次高一学生化学学科原始分 Y 服从正态分布 $N(76.3,64)$. 若 $Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，令 $\eta=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，则 $\eta\sim N(0,1)$. 请解决下列问题：若以此次高一学生化学学科原始分 D 等级的最低分为实施分层教学的划线分，试估计该划线分大约为______分（结果保留 1 位小数）

附：若 $\eta\sim N(0,1)$，$P(\eta\le 2.05)\approx 0.98$.

16. 如图，DE 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形 ABC 的一条中位线，将 ΔADE 沿 DE 翻折至 ΔA_1DE，当三棱锥 $C-A_1BE$ 的体积最大时，四棱锥 A_1-BCDE 外接球 O 的表面积为______；过 EC 的中点 M 作球 O 的截面，则所得截面圆面积的最小值是______.



第 16 题图

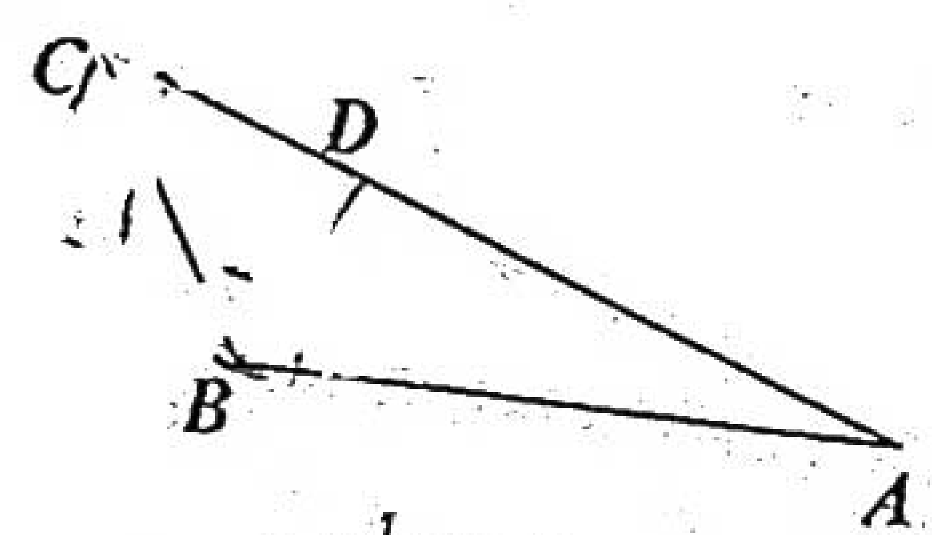
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

已知 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线.

（1）求证：$AD:AB=CD:CB$；

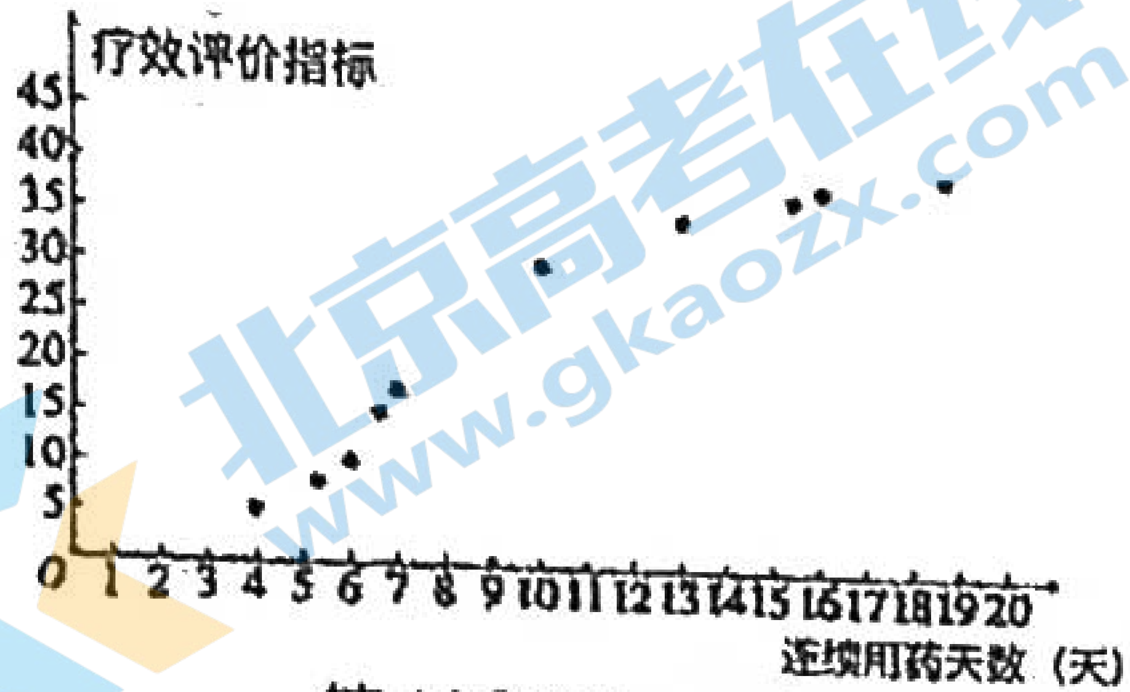
（2）若 $BD=2$ 且 $c=2a=6$，求 ΔABC 的面积.



第 17 题图

18. （本小题满分 12 分）

目前，新冠病毒引起的疫情仍在全球肆虐，在党中央的正确领导下，全国人民团结一心，使我国疫情得到了有效的控制. 其中，各大药物企业积极投身到新药的研发中. 汕头某药企为评估一款新药的药效和安全性，组织一批志愿者进行临床用药实验，结果显示临床疗效评价指标 A 的数量 y 与连续用药天数 x 具有相关关系. 刚开始用药时，指标 A 的数量 y 变化明显，随着天数增加，y 的变化趋缓. 根据志愿者的临床试验情况，得到了一组数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,3,4,5,\cdots,10$，x_i 表示连续用药 i 天，y_i 表示相应的临床疗效评价指标 A 的数值.



第 18 题图

该药企为了进一步研究药物的临床效果，建立了 y 关于 x 的两个回归模型：

模型①：由最小二乘公式可求得 y 与 x 的线性回归方程：$\hat{y}=2.50x-2.50$；

模型②：由图中样本点的分布，可以认为样本点集中在曲线：$y=b\ln x+a$ 的附近，令 $t=\ln x$，则有 $\sum_{i=1}^{10}t_i=22.00$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=230$，$\sum_{i=1}^{10}t_iy_i=569.00$，$\sum_{i=1}^{10}t_i^2=50.92$.

（1）根据所给的统计量，求模型②中 y 关于 x 的回归方程；

（2）根据下列表格中的数据，说明哪个模型的预测值精度更高、更可靠.

（3）根据 (2) 中精确度更高的模型，预测用药一个月后，疗效评价指标相对于用药半个月的变化情况（一个月以 30 天计，结果保留两位小数）.

回归模型	模型①	模型②
残差平方和 $\sum_{i=1}^{10}(y_i-\hat{y}_i)^2$	102.28	36.19

附：样本 $(t_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的最小乘估计公式为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$；

相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$.　参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$.

19. (本小题满分 12 分)

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$且满足 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n+2a_{n+1}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，满足$2S_n+1=3b_n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 若在 b_k 与 b_{k+1} 之间依次插入数列$\{a_n\}$中的 k 项构成新数列$\{c_n\}$：$b_1,a_1,b_2,a_2,a_3,b_3,a_4,a_5,a_6,b_4,\cdots\cdots$，求数列$\{c_n\}$中前 50 项的和$T_{50}$.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，上、下顶点分别为$A,B$，四边形 AF_1BF_2 的面积和周长分别为$2\sqrt{3}$ 和 8，椭圆的短轴长大于焦距.

(1)求椭圆C的方程；

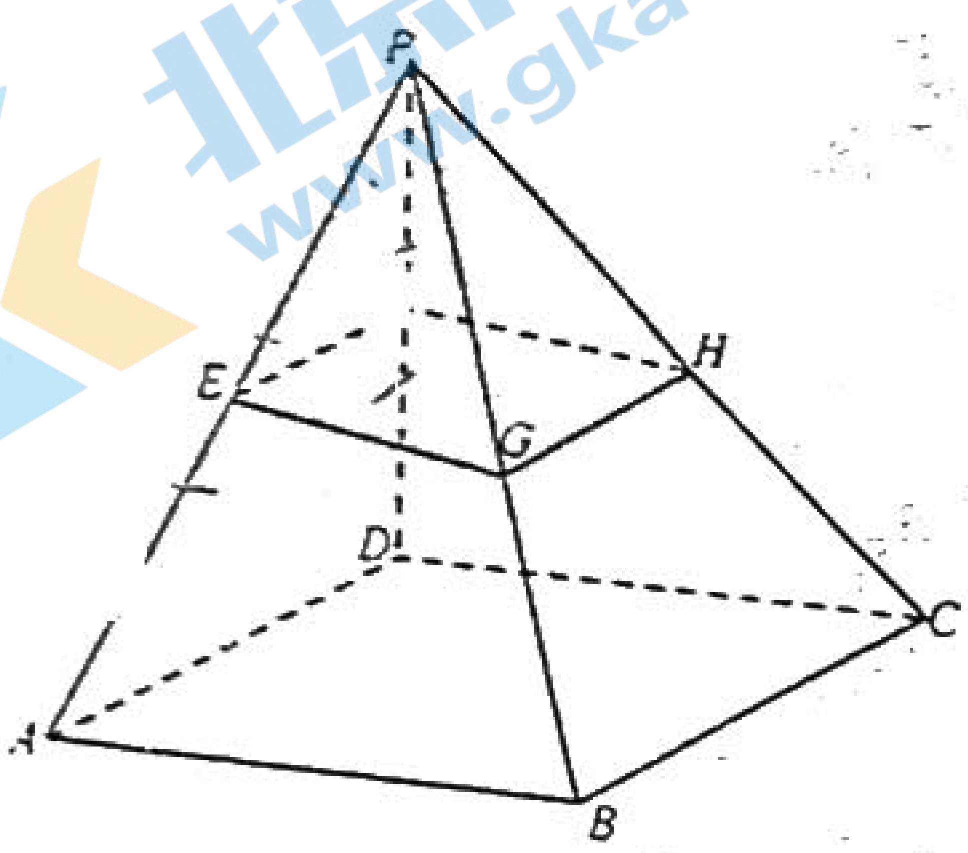
(2)点P为椭圆C上的动点(不是顶点)，点P与点M关于原点对称，过M作直线垂直于x轴，垂足为E. 连接PE并延长交椭圆C于点Q，则直线MP的斜率与直线MQ的斜率的乘积是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$为菱形，$PD=AD=2$，E,F分别是PA，PD的中点，过E,F作平面α交线段PB，PC分别于点G,H，且$\overrightarrow{PG}=t\cdot\overrightarrow{PB}$.

(1) 求证：$GH\,//\,BC$；

(2) 若$PD\perp$平面$ABCD$，且二面角$A-PD-C$为$120°$，二面角$E-FG-P$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，求t的值.



第21题图

22. (本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=x-2\sin x$.

(1) 求$f(x)$在$(0,\pi)$的极值；

(2) 证明：函数$g(x)=\ln x-f(x)$在$(0,\pi)$有且只有两个零点.

2022年汕头市普通高考第三次模拟考试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、单项选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	D	B	C	A	B	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AB	AD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．9　　　　14．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

15．59.9　　　　16．13π，$\dfrac{9\pi}{4}$

填空题评分标准:

16 题:第 1 空正确得 2 分，第 2 空正确得 3 分.

四、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．(本小题满分 10 分)

解：（1）证明：由题意可得 $\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle BDC)=\sin\angle BDC$，…………………（1 分）

因为 BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线，则 $\angle ABD=\angle CBD$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，则 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB}$，…………………………（3 分）

同理可得 $\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}$，…………（4 分）

因此 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD}{CB}$，故 $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{c}{a}$.…………（5 分）

（2）设 $\angle ABD=\angle CBD=\theta$，则 $\angle ABC=2\theta$，…………（6 分）

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，即

$\dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}c\cdot BD\sin\theta+\dfrac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin\theta$，…………（7 分）

因为 $0<2\theta<\pi$，则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$，

即 $\sin 2\theta=\sin\theta$，可得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$…………（8 分）

所以，$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………（9 分）

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$，…………（10 分）

18. (本小题满分 12 分)

解：（1）由题意，知 $\sum\limits_{i=1}^{10}t_i=22.00$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=230$，可得 $\bar{t}=2.20$，$\bar{y}=23$，…………（1 分）

又由 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-10\bar{t}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{\,2}-10\bar{t}^2}=\dfrac{569.00-10\times 2.20\times 23}{50.92-10\times 2.20\times 2.20}=25$，…………（3 分）

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=23-25\times 2.20=-32$…………（4 分）

所以，模型②中 y 关于 x 的回归方程 $\hat{y}=25\ln x-32$.…………（5 分）

（2）由表格中的数据，可得 $102.28>36.19$，即 $\dfrac{102.28}{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}>\dfrac{36.19}{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}$，…………（7 分）

所以模型①的 R^2 小于模型②，说明回归模型②刻画的拟合效果更好，…………（8 分）

（3）根据模型②，当连续用药 30 天后，$\hat{y}_{30}=25\ln 30-32$，

连续用药 15 天后，$\hat{y}_{15}=25\ln 15-32$，…………（10 分）

$\because\ \hat{y}_{30}-\hat{y}_{15}=25\ln 2=17.3275\approx 17.33$，…………（11 分）

$\therefore$ 用药一个月后，疗效评价指标相对于用药半个月提高 17.33.…………（12 分）

19. (本小题满分 12 分)

解：（1）由 $a_{n+1}^{\ 2}-a_n^{\ 2}=2a_n+2a_{n+1}$

得：$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$ ……………………………………1 分

$\because a_{n+1}+a_n>0\quad a_{n+1}-a_n=2$

$\therefore \{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$，公差为 2 的等差数列

$\therefore a_n=2n-1$ ……………………………………3 分

又当 $n=1$ 时，$2S_1+1=3b_1$ 得 $b_1=1$ ……………………………………4 分

当 $n\ge 2$ 时，由 $2S_n+1=3b_n$ ……①

$2S_{n-1}+1=3b_{n-1}$ ……②

由①-②整理得：$b_n=3b_{n-1}$， ……………………………………5 分

$\because b_1=1\ne 0\quad \therefore b_{n-1}\ne 0\quad \therefore \dfrac{b_n}{b_{n-1}}=3$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，故 $b_n=3^{n-1}$； …………………………6 分

（2）依题意知：新数列 $\{c_n\}$ 中，a_{k+1}（含 a_{k+1}）前面共有：$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ 项……………………………………………………8 分

由 $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\le 50,(k\in N^*)$ 得：$k\le 8$，……………………………………………………9 分

$\therefore$ 新数列 $\{c_n\}$ 中含有数列 $\{b_n\}$ 的前 9 项：$b_1,b_2,\cdots\cdots b_9$，含有数列 $\{a_n\}$ 的前 41 项：$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots a_{41}$ ……………………………………………………………………11 分

$\therefore T_{50}=\dfrac{1(1-3^9)}{1-3}+\dfrac{41(1+81)}{2}=11522$ ………………………………………………12 分

20. (本小题满分 12 分)

解：(1)由题意可知，$\begin{cases}\frac{1}{2}\times 2c\times b\times 2=2\sqrt{3}\\ 4a=8\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，且 b > c,解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$………………………………4 分

(2)设点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$M(-x_1,-y_1)$，$E(-x_1,0)$，

所$k_{PE}=\frac{y_1}{2x_1}$，……………………………………………5 分

所以直线PE的方程为$y=\frac{y_1}{2x_1}(x+x_1)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{y_1}{2x_1}(x+x_1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

所以$(3x_1^2+y_1^2)x^2+2x_1y_1^2x+x_1^2y_1^2-12x_1^2=0$，……… 7 分

所以$x_1+x_2=\frac{-2x_1y_1^2}{3x_1^2+y_1^2}, x_1x_2=\frac{x_1^2(y_1^2-12)}{3x_1^2+y_1^2}$，…………………8 分

所以$x_2=\frac{x_1(y_1^2-12)}{3x_1^2+y_1^2}$，

$y_2=\frac{y_1}{2x_1}(x_2+x_1)=\frac{y_1}{2x_1}\frac{-2x_1y_1^2}{3x_1^2+y_1^2}=\frac{-y_1^3}{3x_1^2+y_1^2}$，…………………9 分

而$k_{MP}\cdot k_{MQ}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$代入$x_2$，$y_2$，

可得$k_{MP}\cdot k_{MQ}=\frac{y_1}{x_1}\cdot[(\frac{3x_1^2y_1}{3x_1^2+y_1^2})\times(-\frac{3x_1^2+y_1^2}{2x_1y_1^2})]=-\frac{3}{2}$，

所以直线MP的斜率与直线MQ的斜率之积为定值$-\frac{3}{2}$. …12 分

21. （本小题满分 12 分）

（1）证明：$\because E,F$分别是PA,PD中点，$\therefore EF\parallel AD$，

又$\because AD\parallel BC$，$\therefore EF\parallel BC$，……………………………1 分

又$\because EF\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，

$\therefore EF\parallel$平面PBC，……………………………2 分

又$\because EF\subset$平面α，平面$\alpha\cap$平面$PBC=GH$，

$\therefore EF\parallel GH$，……………………………3 分

$\therefore GH\parallel BC$.……………………………4 分

（2）$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AD,CD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore AD\perp PD, CD\perp PD$，

$\therefore\angle ADC$为二面角$A-PD-C$的平面角，即$\angle ADC=120^\circ$，…………5 分

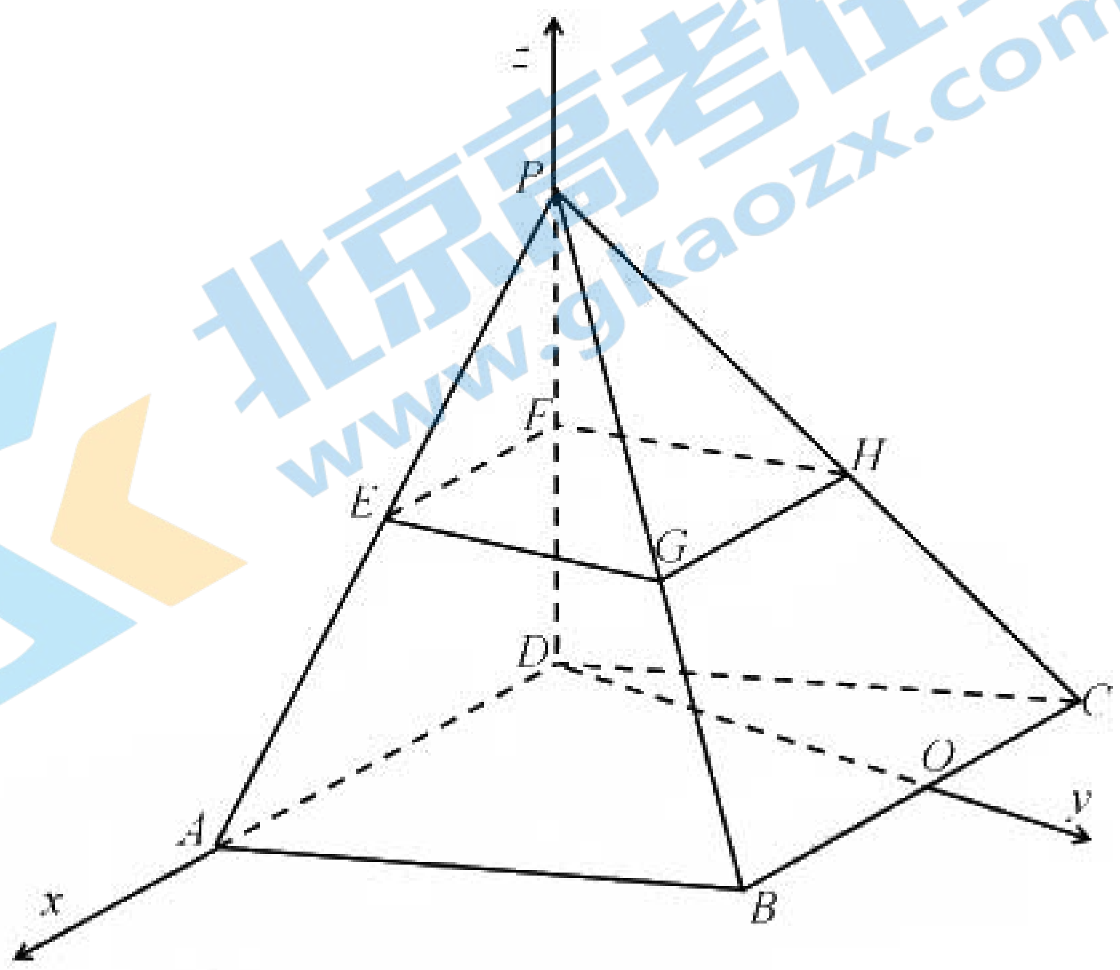
取BC中点O，连接OD，以D为原点，DA所在直线为x轴，DO所在直线为y轴，DP所在直线为

z轴 建立空间直角坐标系，则 $E(1,0,1)$, $F(0,0,1)$, $P(0,0,2)$, $B(1,\sqrt{3},0)$，

设点 G 坐标为 (x,y,z)，$\because \overrightarrow{PG}=t\cdot\overrightarrow{PB}$，$t\in[0,1]$

$\therefore (x,y,z-2)=t\cdot(1,\sqrt{3},-2)$，

$\therefore \begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{3}t \\ z=2-2t \end{cases}$，



$\therefore G(t,\sqrt{3}t,2-2t)$， ……………………………6 分

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases} \overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 2z_1=0 \\ x_1+\sqrt{3}y_1=0 \end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{3}$，则$y_1=-1$，$z_1=0$，

$\therefore \vec{n}=(\sqrt{3},-1,0)$ ……………………………………………………7 分

（另：可证 $AC\perp$ 面PBD，$\overrightarrow{AC}$ 为平面 PBD 的法向量）

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{FG}=(t,\sqrt{3}t,1-2t)$，

$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{EF}\cdot\vec{m}=0 \\ \overrightarrow{FG}\cdot\vec{m}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} -x_2=0 \\ tx_2+\sqrt{3}ty_2+(1-2t)z_2=0 \end{cases}$，令 $y_2=2t-1$，则$z_2=\sqrt{3}t$，$x_2=0$，

$\therefore \vec{m}=(0,2t-1,\sqrt{3}t)$ ……………………………………………………9 分

设二面角 $E-FG-P$ 的平面角为 θ，

$\because$ 二面角 $E-FG-P$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$, $|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………10 分

$\therefore |\cos\theta|=|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{|2t-1|}{2\cdot\sqrt{3t^2+(2t-1)^2}}=\dfrac{|2t-1|}{2\cdot\sqrt{7t^2-4t+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore 5t^2+4t-1=0$，解得 $t=\dfrac{1}{5}$或$t=-1$（舍去） ……………………………12 分

22. **（本小题满分 12 分）**

解：（1）由 $f(x)=x-2\sin x$ 得 $f'(x)=1-2\cos x$，$x\in(0,\pi)$，……………………1 分

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{\pi}{3}$

当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，……………………………3 分

所以，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，无极大值. ……………………………4 分

（2）证明：$g(x)=\ln x-f(x)=\ln x-x+2\sin x, x\in(0,\pi)$.

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1+2\cos x$，……………………………………………………5 分

令 $\varphi(x)=\frac{1}{x}+2\cos x-1$，则 $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}-2\sin x$.

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}-2\sin x<0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减…………6 分

$\because \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\pi}>0$，$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}-1<0$，

所以，存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\varphi(x_0)=g'(x_0)=0$. ……………………………7 分

当 x 变化时，$g(x),g'(x)$ 变化如下表：

x	$(0,x_0)$	x_0	(x_0,π)
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	单调递增	极大值 $g(x_0)$	单调递减

而 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}>0$，$g(\pi)=\ln\pi-\pi<\ln e^2-\pi=2-\pi<0$，则 $g(x_0)>g\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$，又

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+1$，……………………………………………………………………9 分

令 $h(x)=\ln x-x+1$，其中 $0<x<1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$，………………10 分

所以，函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $h(x)<h(1)=0$，所以，$h\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+1<0$.

由零点存在定理可知，函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个零点.………………………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。