西 城 区 高 三 模 拟 测 试

数　　学(理科)

2017.5

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷(选择题　共40分)

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 在复平面内，复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

(A) $1+2i$　　(B) $1-2i$　　(C) $2+i$　　(D) $2-i$

2. 下列函数中，值域为 $[0,1]$ 的是

(A) $y=x^2$　　(B) $y=\sin x$

(C) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(D) $y=\sqrt{1-x^2}$

3. 在极坐标系中，圆 $\rho=\sin\theta$ 的圆心的极坐标是

(A) $(1,\dfrac{\pi}{2})$　　(B) $(1,0)$　　(C) $(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{2})$　　(D) $(\dfrac{1}{2},0)$

4. 在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}3x-2y\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是

(A) 1　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) $\dfrac{5}{2}$

5. 设双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的离心率是 3，则其渐近线的方程为

(A) $x\pm2\sqrt{2}y=0$　　(B) $2\sqrt{2}x\pm y=0$

(C) $x\pm8y=0$　　(D) $8x\pm y=0$

6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面上的两个单位向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}$. 若 $m\in\mathbf{R}$，则 $|\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}|$ 的最小值是

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C) $\frac{4}{5}$　　(D) $\frac{5}{4}$

7. 函数 $f(x)=x|x|$. 若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x-2k)-k<0$，则 k 的取值范围是

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(\frac{1}{2},+\infty)$　　(D) $(\frac{1}{4},+\infty)$

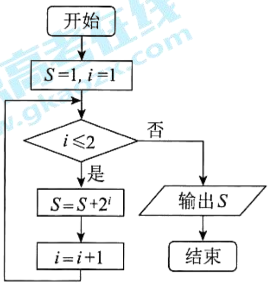
8. 有三支股票 A，B，C，28 位股民的持有情况如下：每位股民至少持有其中一支股票. 在不持有 A 股票的人中，持有 B 股票的人数是持有 C 股票的人数的 2 倍. 在持有 A 股票的人中，只持有 A 股票的人数比除了持有 A 股票外，同时还持有其它股票的人数多 1. 在只持有一支股票的人中，有一半持有 A 股票. 则只持有 B 股票的股民人数是

(A) 7　　(B)6　　(C) 5　　(D) 4

第Ⅱ卷(非选择题　共110分)

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 执行如图所示的程序框图，输出的S值为____.



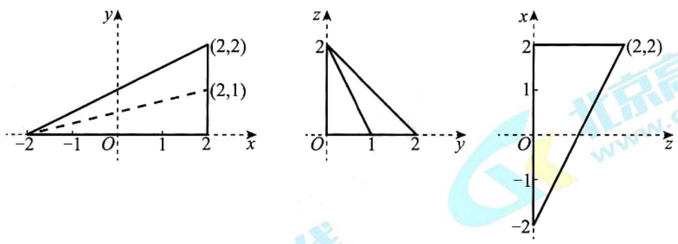
10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且a_1，a_2，a_4成等比数列，则$a_1=$____；数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=$____.

11. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c. 若$A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则$c=$____.

12. 函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0.\end{cases}$ 则$f(\frac{1}{4})=$____；方程$f(-x)=\frac{1}{2}$的解是____.

13. 大厦一层有A，B，C，D四部电梯，3人在一层乘坐电梯上楼，其中2人恰好乘坐同一部电梯，则不同的乘坐方式有____种.(用数字作答)

14. 在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在xOy，yOz，zOx坐标平面上的一组正投影图形如图所示(坐标轴用细虚线表示). 该四面体的体积是____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）设 $\beta\in(0,\pi)$，且 $f(\beta)=2\cos(\beta-\frac{\pi}{4})$，求 β 的值.

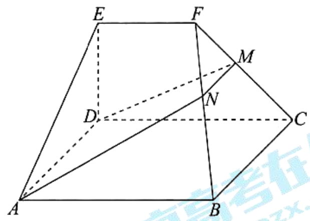
16.（本小题满分 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF//CD$，$AD\perp FC$. 点 M 在棱 FC 上，平面 ADM 与棱 FB 交于点 N.

（Ⅰ）求证：$AD//MN$；

（Ⅱ）求证：平面 $ADMN\perp$ 平面 $CDEF$；

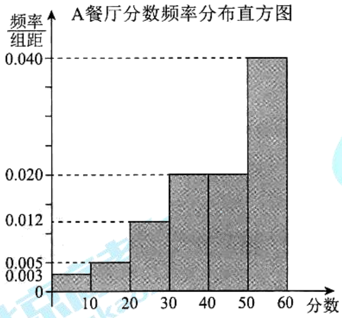
（Ⅲ）若 $CD\perp EA$，$EF=ED$，$CD=2EF$，平面 $ADE\cap$ 平面 $BCF=l$，求二面角 $A-l-B$ 的大小.



17.（本小题满分 13 分）

某大学为调研学生在 A，B 两家餐厅用餐的满意度，从在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取了 100 人，每人分别对这两家餐厅进行评分，满分均为 60 分.

整理评分数据，将分数以 10 为组距分成 6 组：[0，10)，[10，20)，[20，30)，[30，40)，[40，50)，[50，60]，得到 A 餐厅分数的频率分布直方图，和 B 餐厅分数的频数分布表：



B 餐厅分数频数分布表

分数区间	频数
[0，10)	2
[10，20)	3
[20，30)	5
[30，40)	15
[40，50)	40
[50，60]	35

定义学生对餐厅评价的“满意度指数”如下：

分数	[0，30)	[30，50)	[50，60]
满意度指数	0	1	2

（Ⅰ）在抽样的 100 人中，求对 A 餐厅评价“满意度指数”为 0 的人数；

（Ⅱ）从该校在 A，B 两家餐厅都用过餐的学生中随机抽取 1 人进行调查，试估计其对 A 餐厅评价的“满意度指数”比对 B 餐厅评价的“满意度指数”高的概率；

（Ⅲ）如果从 A，B 两家餐厅中选择一家用餐，你会选择哪一家？说明理由.

18.（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C 的顶点是原点，以 x 轴为对称轴，且经过点 $P(1,2)$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）设点 A,B 在抛物线 C 上，直线 PA，PB 分别与 y 轴交于点 M，N，$|PM|=|PN|$. 求直线 AB 的斜率.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot e^{1-x}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f'(x)$ 的零点个数；

（Ⅱ）证明：$a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件.

20.（本小题满分 13 分）

设集合 $A_{2n}=\{1,2,3,\cdots,2n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$. 如果对于 A_{2n} 的每一个含有 m $(m\geqslant 4)$ 个元素的子集 P，P 中必有 4 个元素的和等于 $4n+1$，称正整数 m 为集合 A_{2n} 的一个“相关数”.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，判断 5 和 6 是否为集合 A_6 的“相关数”，说明理由；

（Ⅱ）若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，证明：$m-n-3\geqslant 0$；

（Ⅲ）给定正整数 n. 求集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值.

西城区高三模拟测试

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2017.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A	2. D	3. C	4. B
5. A	6. C	7. D	8. A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 7	10. 2，n^2+n	11. 2
12. -2；$-\sqrt{2}$ 或1	13. 36	14. $\frac{4}{3}$

注：第 10，12 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. [3 分]

所以 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$. [4 分]

（Ⅱ）依题意，得 $\tan(\beta+\frac{\pi}{4})=2\cos(\beta-\frac{\pi}{4})$. [5 分]

所以 $\dfrac{\sin(\beta+\frac{\pi}{4})}{\cos(\beta+\frac{\pi}{4})}=2\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$， [7 分]

整理得 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})\cdot[2\cos(\beta+\frac{\pi}{4})-1]=0$， [8 分]

所以 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})=0$，或 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$. [10 分]

因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$， [11 分]

由 $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})=0$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$； [12 分]

由 $\cos(\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，得 $\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{12}$.

所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$，或 $\beta=\frac{3\pi}{4}$. [13 分]

16.（本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）因为 $ABCD$ 为矩形， 所以 $AD // BC$， [1 分]

所以 $AD //$ 平面 FBC . [3 分]

又因为 平面 $ADMN \cap$ 平面 $FBC = MN$，

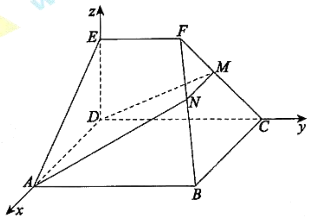
所以 $AD // MN$. [4 分]

（Ⅱ）因为 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD \perp CD$. [5 分]

因为 $AD \perp FC$， [6 分]

所以 $AD \perp$ 平面 $CDEF$. [7 分]

所以 平面 $ADMN \perp$ 平面 $CDEF$. [8 分]



（Ⅲ）因为 $EA \perp CD$，$AD \perp CD$，

所以 $CD \perp$ 平面 ADE，

所以 $CD \perp DE$.

由（Ⅱ）得 $AD \perp$ 平面 $CDEF$，

所以 $AD \perp DE$.

所以 DA，DC，DE 两两互相垂直. [9 分]

建立空间直角坐标系 $D-xyz$. [10 分]

不妨设 $EF = ED = 1$，则 $CD = 2$，设 $AD = a\ (a > 0)$.

由题意得，$A(a,0,0)$，$B(a,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$E(0,0,1)$，$F(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{CB} = (a,0,0)$，$\overrightarrow{CF} = (0,-1,1)$.

设平面 FBC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} ax = 0, \\ -y + z = 0. \end{cases} \quad 令\ z = 1，则\ y = 1 .$$

所以 $\boldsymbol{n} = (0,1,1)$. [12 分]

又平面 ADE 的法向量为 $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$，所以

$$|\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{DC} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

因为 二面角 $A-l-B$ 的平面角是锐角，

所以 二面角 $A-l-B$ 的大小 45° . [14 分]

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由对 A 餐厅评分的频率分布直方图，得

对 A 餐厅“满意度指数”为0的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times 10=0.2$，［2 分］

所以，对 A 餐厅评价“满意度指数”为0的人数为 $100\times 0.2=20$．［3 分］

（Ⅱ）设“对 A 餐厅评价‘满意度指数’比对 B 餐厅评价‘满意度指数’高”为事件 C．

记“对 A 餐厅评价‘满意度指数’为 1”为事件 A_1；“对 A 餐厅评价‘满意度指数’为2”为事件 A_2；“对 B 餐厅评价‘满意度指数’为0”为事件 B_0；“对 B 餐厅评价‘满意度指数’为1”为事件 B_1．

所以 $P(A_1)=(0.02+0.02)\times 10=0.4$，$P(A_2)=0.4$，［5 分］

由用频率估计概率得：$P(B_0)=\dfrac{2+3+5}{100}=0.1$，$P(B_1)=\dfrac{15+40}{100}=0.55$．［7 分］

因为事件 A_i 与 B_j 相互独立，其中 $i=1,2$，$j=0,1$．

所以 $P(C)=P(A_1B_0+A_2B_0+A_2B_1)$

$=P(A_1)P(B_0)+P(A_2)P(B_0)+P(A_2)P(B_1)$

$=0.4\times 0.1+0.4\times 0.1+0.4\times 0.55=0.3$．［10 分］

所以 该学生对 A 餐厅评价的“满意度指数”比对 B 餐厅评价的“满意度指数”高的概率为0.3．

（Ⅲ）如果从学生对 A，B 两家餐厅评价的“满意度指数”的期望角度看：

A 餐厅“满意度指数”X的分布列为：

X	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

B 餐厅“满意度指数”Y的分布列为：

Y	0	1	2
P	0.1	0.55	0.35

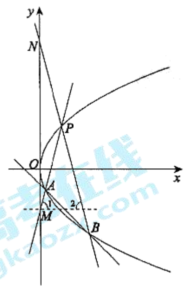
因为 $E(X)=0\times 0.2+1\times 0.4+2\times 0.4=1.2$；

$E(Y)=0\times 0.1+1\times 0.55+2\times 0.35=1.25$，

所以 $E(X)<E(Y)$，会选择 B 餐厅用餐．［13 分］

注：本题答案不唯一．只要考生言之合理即可．

18.（本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）依题意，设抛物线 C 的方程为 $y^2=ax\,(a\neq 0)$．［1 分］

由抛物线 C 且经过点 $P(1,2)$，

得 $a=4$，［3 分］

所以 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$．［4 分］

（Ⅱ）因为 $|PM|=|PN|$，

所以 $\angle PMN=\angle PNM$，

所以 $\angle 1=\angle 2$，

所以 直线 PA 与 PB 的倾斜角互补，

所以 $k_{PA}+k_{PB}=0$．［6 分］

依题意，直线 AP 的斜率存在，设直线 AP 的方程为：$y-2=k(x-1)$ $(k\neq 0)$，

将其代入抛物线 C 的方程，整理得

$k^2x^2-2(k^2-2k+2)x+k^2-4k+4=0$．［8 分］

设 $A(x_1,y_1)$，则 $1\times x_1=\dfrac{k^2-4k+4}{k^2}$，$y_1=k(x_1-1)+2=\dfrac{4}{k}-2$，［10 分］

所以 $A(\dfrac{(k-2)^2}{k^2},\dfrac{4}{k}-2)$．［11 分］

以 $-k$ 替换点 A 坐标中的 k，得 $B(\dfrac{(k+2)^2}{k^2},-\dfrac{4}{k}-2)$．［12 分］

所以 $k_{AB}=\dfrac{\dfrac{4}{k}-(-\dfrac{4}{k})}{\dfrac{(k-2)^2}{k^2}-\dfrac{(k+2)^2}{k^2}}=-1$．

所以 直线 AB 的斜率为 -1．［14 分］

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot e^{1-x}$，

得 $f'(x)=(2x+a)\cdot e^{1-x}-(x^2+ax-a)\cdot e^{1-x}$

$=-[x^2+(a-2)x-2a]\cdot e^{1-x}$

$=-(x+a)(x-2)\cdot e^{1-x}$．［2 分］

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$，或 $x=-a$．

所以 当 $a=-2$ 时，函数 $f'(x)$ 有且只有一个零点：$x=2$；当 $a\neq -2$ 时，函数 $f'(x)$ 有两个相异的零点：$x=2$，$x=-a$．［4 分］

（Ⅱ）① 当 $a=-2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 无极值. [5 分]

② 当 $a>-2$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以，$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(-a)=-a\cdot e^{1+a}\leqslant 0$. [7 分]

又 $x>2$ 时，$x^2+ax-a>2^2+2a-a=a+4>0$，

所以，当 $x>2$ 时，$f(x)=(x^2+ax-a)\cdot e^{1-x}>0$ 恒成立. [8 分]

所以，$f(-a)=-a\cdot e^{1+a}$ 为 $f(x)$ 的最小值. [9 分]

故 $a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分条件. [10 分]

③ 当 $a=-5$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

因为 当 $x>5$ 时，$f(x)=(x^2-5x+5)\cdot e^{1-x}>0$，

又 $f(2)=-e^{-1}<0$，

所以，当 $a=-5$ 时，函数 $f(x)$ 也存在最小值. [12 分]

所以，$a\geqslant 0$ 不是函数 $f(x)$ 存在最小值的必要条件.

综上，$a\geqslant 0$ 是函数 $f(x)$ 存在最小值的充分而不必要条件. [13 分]

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=3$ 时，$A_6=\{1,2,3,4,5,6\}$，$4n+1=13$. [1 分]

① 对于 A_6 的含有 5 个元素的子集 $\{2,3,4,5,6\}$，

因为 $2+3+4+5>13$，

所以 5 不是集合 A_6 的“相关数”. [2 分]

② A_6 的含有 6 个元素的子集只有 $\{1,2,3,4,5,6\}$，

因为 $1+3+4+5=13$，

所以 6 是集合 A_6 的“相关数”. [3 分]

（Ⅱ）考察集合 A_{2n} 的含有 $n+2$ 个元素的子集 $B=\{n-1,n,n+1,\cdots,2n\}$. [4 分]

B 中任意 4 个元素之和一定不小于 $(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=4n+2$.

所以 $n+2$ 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”. [6 分]

所以 当 $m\leqslant n+2$ 时，m 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”. [7 分]

因此 若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m\geqslant n+3$.

即 若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m-n-3\geqslant 0$. [8 分]

（Ⅲ）由（Ⅱ）得 $m\geqslant n+3$.

先将集合 A_{2n} 的元素分成如下 n 组：

$C_i=(i,2n+1-i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

对 A_{2n} 的任意一个含有 $n+3$ 个元素的子集 P，必有三组 C_{i_1},C_{i_2},C_{i_3} 同属于集合 P.

[10 分]

再将集合 A_{2n} 的元素剔除 n 和 $2n$ 后，分成如下 $n-1$ 组：

$D_j=(j,2n-j)$ $(1\leqslant j\leqslant n-1)$.

对于 A_{2n} 的任意一个含有 $n+3$ 个元素的子集 P，必有一组 D_{j_4} 属于集合 P. [11 分]

这一组 D_{j_4} 与上述三组 C_{i_1},C_{i_2},C_{i_3} 中至少一组无相同元素，

不妨设 D_{j_4} 与 C_{i_1} 无相同元素.

此时 这 4 个元素之和为 $[i_1+(2n+1-i_1)]+[j_4+(2n-j_4)]=4n+1$. [12 分]

所以 集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值为 $n+3$. [13 分]