2014年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 若正数 a, b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值为__________.

答案： 108 .

解： 设 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)=k$，则 $a=2^{k-2}, b=3^{k-3}, a+b=6^k$，从而 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-3}}=2^2\times 3^3=108$.

2. 设集合 $\left\{\dfrac{3}{a}+b \,\middle|\, 1\le a\le b\le 2\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m，则 $M-m$ 的值为__________.

答案： $5-2\sqrt{3}$.

解： 由 $1\le a\le b\le 2$ 知，$\dfrac{3}{a}+b\le\dfrac{3}{1}+2=5$，当 $a=1, b=2$ 时，得最大元素 $M=5$. 又 $\dfrac{3}{a}+b\ge\dfrac{3}{a}+a\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3}$，当 $a=b=\sqrt{3}$ 时，得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

因此，$M-m=5-2\sqrt{3}$.

3. 若函数 $f(x)=x^2+a|x-1|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____.

答案： $[-2, 0]$.

解： 在 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=x^2+ax-a$ 单调递增，等价于 $-\dfrac{a}{2}\le 1$，即 $a\ge -2$. 在 $[0, 1]$ 上，$f(x)=x^2-ax+a$ 单调递增，等价于 $\dfrac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$.

因此实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$______.

答案： $\dfrac{2015}{2013}$.

解： 由题设

$$a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}a_{n-2}=\cdots$$
$$=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1).$$

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=2+2\times 3+2^2\times 4+\cdots+2^{n-1}(n+1)\ ,$$

所以

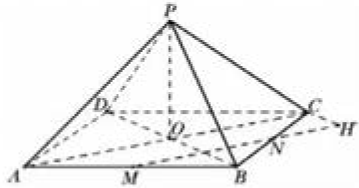
$$2S_n=2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n(n+1),$$

将上面两式相减，得 $S_n = 2^n(n+1)-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2)$

$$= 2^n(n+1)-2^n = 2^n n .$$

故 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}} = \dfrac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013} = \dfrac{2015}{2013}$.

5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面是边长为 1 的正三角形，M, N 分别是边 AB, BC 的中点，则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是__________.



答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解： 设底面对角线 AC, BD 交于点 O，过点 C 作直线 MN 的垂线，交 MN 于点 H .

由于 PO 是底面的垂线，故 $PO\perp CH$，又 $AC\perp CH$，所以 CH 与平面 POC 垂直，故 $CH\perp PC$.

因此 CH 是直线 MN 与 PC 的公垂线段，又 $CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故异面直线 MN 与 PC 之间的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

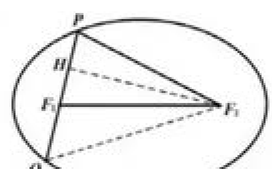
6. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1, F_2，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P, Q . 若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 $3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为__________.

答案： $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

解： 不妨设 $|PF_1|=4, |QF_1|=3$. 记椭圆 Γ 的长轴，短轴的长度分别为 $2a$，$2b$，焦距为 $2c$，则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，且由椭圆的定义知，

$$2a=|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2c+4 .$$

于是 $|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|-|QF_1|=2c+1$.



设 H 为线段 PF_1 的中点，则 $|F_1H|=2, |QH|=5$，且有 $F_2H\perp PF_1$. 由勾股定理知，

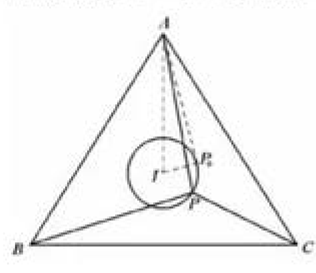
$$|QF_2|^2-|QH|^2=|F_2H|^2=|F_1F_2|^2-|F_1H|^2 ,$$

即 $(2c+1)^2-5^2=(2c)^2-2^2$，解得 $c=5$，进而 $a=7$，$b=2\sqrt{6}$，因此椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I . 若点 P 满足 $PI=1$，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为__________.

答案： $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

解： 由 $PI=1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 K 上.



设$\angle BAP=\alpha$．在圆K上取一点P_0，使得α取到最大值α_0，此时P_0应落在$\angle IAC$内，且是AP_0与圆K的切点．由于$0<\alpha\leq\alpha_0<\frac{\pi}{3}$，故

$$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AB\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\leq\frac{\sin\alpha_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_0\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)},\qquad ①$$

其中，$\theta=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\angle IAP_0$．

由$\angle AP_0I=\frac{\pi}{2}$知，$\sin\theta=\frac{IP_0}{AI}=\frac{1}{2r}=\frac{1}{4}$，于是$\cot\theta=\sqrt{15}$，所以

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{\cot\theta+\sqrt{3}}{\cot\theta-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\qquad ②$$

根据①、②可知，当$P=P_0$时，$\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}$的最大值为$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$．

8. 设A，B，C，D是空间四个不共面的点，以$\frac{1}{2}$的概率在每对点之间连一条边，任意两对点之间是否连边是相互独立的，则A，B可用（一条边或者若干条边组成的）空间折线连接的概率为__________．

答案：$\frac{3}{4}$．

解：每对点之间是否连边有2种可能，共有$2^6=64$种情况．考虑其中A，B可用折线连接的情况数．

(1) 有AB边：共$2^5=32$种情况．

(2) 无AB边，但有CD边：此时A，B可用折线连接当且仅当A与C，D中至少一点相连，且B与C，D中至少一点相连，这样的情况数为$(2^2-1)\times(2^2-1)=9$．

(3) 无AB边，也无CD边：此时AC，CB相连有2^2种情况，AD，DB相连也有2^2种情况，但其中AC，CB，AD，DB均相连的情况被重复计了一次，故A，B可用折线连接的情况数为$2^2+2^2-1=7$．

以上三类情况数的总和为$32+9+7=48$，故A，B可用折线连接的概率为$\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$．

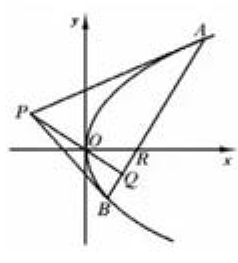
二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分）平面直角坐标系xOy中，P是不在x轴上的一个动点，满足条件：过P可作抛物线$y^2=4x$的两条切线，两切点连线l_P与PO垂直．

设直线l_P与直线PO，x轴的交点分别为Q，R．

(1) 证明R是一个定点；

(2) 求$\frac{|PQ|}{|QR|}$的最小值．



解： (1) 设 P 点的坐标为 $(a, b)(b\neq 0)$，易知 $a\neq 0$．记两切点 A，B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，则 PA，PB 的方程分别为

$$yy_1=2(x+x_1)\text{，} \quad ①$$

$$yy_2=2(x+x_2)\text{，} \quad ②$$

而点 P 的坐标 (a, b) 同时满足①，②，故 A，B 的坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 均满足方程

$$by=2(x+a)\text{．} \quad ③$$

故③就是直线 AB 的方程．

直线 PO 与 AB 的斜率分别为 $\dfrac{b}{a}$ 与 $\dfrac{2}{b}$，由 $PO\perp AB$ 知，$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2}{b}=-1$，故 $a=-2$．

…………………4 分

从而③即为 $y=\dfrac{2}{b}(x-2)$，故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点 $(2, 0)$．　…………………8 分

(2) 因为 $a=-2$，故直线 PO 的斜率 $k_1=-\dfrac{b}{2}$，直线 PR 的斜率 $k_2=-\dfrac{b}{4}$．设 $\angle OPR=\alpha$，则 α 为锐角，且

$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{1}{\tan\alpha}=\left|\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}\right|=\left|\frac{1+\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2}+\frac{b}{4}}\right|=\frac{8+b^2}{2|b|}\geq\frac{2\sqrt{8\cdot b^2}}{2|b|}=2\sqrt{2}\text{．}$$

当 $b=\pm 2\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$．　…………………16 分

10. （本题满分 20 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$．求正整数 m，使得

$$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\frac{1}{100}\text{．}$$

解： 由已知条件可知，对任意正整数 n，$a_{n+1}\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且

$$\tan a_{n+1}=\sec a_n\text{．} \quad ①$$

由于 $\sec a_n>0$，故 $a_{n+1}\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$．由①得，$\tan^2 a_{n+1}=\sec^2 a_n=1+\tan^2 a_n$，故

$$\tan^2 a_n=n-1+\tan^2 a_1=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3}\text{，}$$

即 $\tan a_n=\sqrt{\dfrac{3n-2}{3}}$．　…………………10 分

因此

$$\begin{aligned}\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m&=\frac{\tan a_1}{\sec a_1}\cdot\frac{\tan a_2}{\sec a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\sec a_m}\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}\quad\text{（利用①）}\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}}=\sqrt{\frac{1}{3m+1}}\text{．}\end{aligned}$$

由 $\sqrt{\dfrac{1}{3m+1}}=\dfrac{1}{100}$，得 $m=3333$．　…………………20 分

11.（本题满分 20 分）确定所有的复数 α，使得对任意复数 $z_1, z_2\ (|z_1|, |z_2|<1,\ z_1\neq z_2)$，均有

$$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}.$$

解：记 $f_\alpha(z)=(z+\alpha)^2+\alpha\overline{z}$．则

$$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}-(z_2+\alpha)^2-\alpha\overline{z_2}$$
$$=(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)+\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right). \qquad ①$$

假如存在复数 $z_1, z_2\ (|z_1|, |z_2|<1,\ z_1\neq z_2)$，使得 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$，则由①知，

$$\left|\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\right|=\left|-(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)\right|,$$

利用 $\left|\overline{z_1}-\overline{z_2}\right|=\left|\overline{z_1-z_2}\right|=|z_1-z_2|\neq 0$ 知，$|\alpha|=|z_1+z_2+2\alpha|\geq 2|\alpha|-|z_1|-|z_2|>2|\alpha|-2$，

即 $|\alpha|<2$．　　　　……………………10 分

另一方面，对任意满足 $|\alpha|<2$ 的复数 α，令 $z_1=-\dfrac{\alpha}{2}+\beta\mathrm{i},\ z_2=-\dfrac{\alpha}{2}-\beta\mathrm{i}$，其中 $0<\beta<1-\dfrac{|\alpha|}{2}$，则 $z_1\neq z_2$，而 $\left|-\dfrac{\alpha}{2}\pm\beta\mathrm{i}\right|\leq\left|-\dfrac{\alpha}{2}\right|+|\beta|<1$，故 $|z_1|, |z_2|<1$．此时将

$$z_1+z_2=-\alpha,\quad z_1-z_2=2\beta\mathrm{i},\quad \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{2\beta\mathrm{i}}=-2\beta\mathrm{i}$$

代入①可得，$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=\alpha\cdot 2\beta\mathrm{i}+\alpha\cdot(-2\beta\mathrm{i})=0$，即 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$．

综上所述，符合要求的 α 的值为 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha\in\mathbf{C},\ |\alpha|\geq 2\right\}$．　　　　……………………20 分