2015年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分．

1. 设 a, b 为不相等的实数，若二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(a)=f(b)$，则 $f(2)$ 的值为____________．

答案：4．

解：由已知条件及二次函数图像的轴对称性，可得 $\dfrac{a+b}{2}=-\dfrac{a}{2}$，即 $2a+b=0$，所以

$$f(2)=4+2a+b=4.$$

2. 若实数 α 满足 $\cos\alpha=\tan\alpha$，则 $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$ 的值为____________．

答案：2．

解：由条件知，$\cos^2\alpha=\sin\alpha$，反复利用此结论，并注意到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，得

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha$$

$$=(1+\sin\alpha)+(1-\cos^2\alpha)=2+\sin\alpha-\cos^2\alpha=2.$$

3. 已知复数数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1=1,\ z_{n+1}=\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}\ (n=1, 2, \cdots)$，其中 i 为虚数单位，$\overline{z_n}$ 表示 z_n 的共轭复数，则 z_{2015} 的值为____________．

答案：$2015+1007\mathrm{i}$．

解：由已知得，对一切正整数 n，有

$$z_{n+2}=\overline{z_{n+1}}+1+(n+1)\mathrm{i}=\overline{\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}}+1+(n+1)\mathrm{i}=z_n+2+\mathrm{i},$$

于是 $z_{2015}=z_1+1007\times(2+\mathrm{i})=2015+1007\mathrm{i}$．

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,\ AD=1$，边 DC 上（包含点 D、C）的动点 P 与 CB 延长线上（包含点 B）的动点 Q 满足 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$，则向量 $\overrightarrow{PA}$ 与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值为____________．

答案：$\dfrac{3}{4}$．

解：不妨设 $A(0,0), B(2,0), D(0,1)$．设 P 的坐标为 $(t,1)$（其中 $0\le t\le 2$），则由 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$ 得 Q 的坐标为 $(2,-t)$，故 $\overrightarrow{PA}=(-t,-1),\ \overrightarrow{PQ}=(2-t,-t-1)$，因此

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(-t)\cdot(2-t)+(-1)\cdot(-t-1)=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

当$t=\frac{1}{2}$时，$\left(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}\right)_{\min}=\frac{3}{4}$.

5. 在正方体中随机取 3 条棱，它们两两异面的概率为__________.

答案： $\frac{2}{55}$.

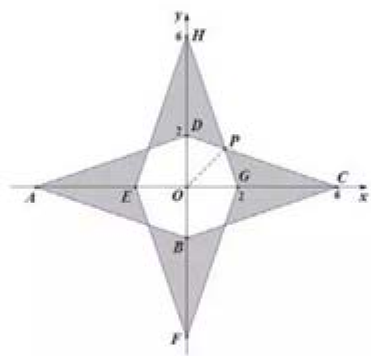
解： 设正方体为$ABCD-EFGH$，它共有 12 条棱，从中任意取出 3 条棱的方法共有$C_{12}^3=220$种.

下面考虑使 3 条棱两两异面的取法数. 由于正方体的棱共确定 3 个互不平行的方向（即AB、AD、AE的方向），具有相同方向的 4 条棱两两共面，因此取出的 3 条棱必属于 3 个不同的方向. 可先取定AB方向的棱，这有 4 种取法. 不妨设取的棱就是AB，则AD方向只能取棱EH或棱FG，共 2 种可能. 当AD方向取棱是EH或FG时，AE方向取棱分别只能是CG或DH.

由上可知，3 条棱两两异面的取法数为$4\times2=8$，故所求概率为$\frac{8}{220}=\frac{2}{55}$.

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\left\{(x,\ y)\middle|\left(|x|+|3y|-6\right)\left(|3x|+|y|-6\right)\le 0\right\}$所对应的平面区域的面积为__________.

答案： 24.



解： 设$K_1=\left\{(x,\ y)\middle||x|+|3y|-6\le 0\right\}$. 先考虑$K_1$在第一象限中的部分，此时有$x+3y\le 6$，故这些点对应于图中的$\Delta OCD$及其内部. 由对称性知，$K_1$对应的区域是图中以原点$O$为中心的菱形$ABCD$及其内部.

同理，设$K_2=\left\{(x,\ y)\middle||3x|+|y|-6\le 0\right\}$，则$K_2$对应的区域是图中以$O$为中心的菱形$EFGH$及其内部.

由点集K的定义知，K所对应的平面区域是被K_1、K_2中恰好一个所覆盖的部分，因此本题所要求的即为图中阴影区域的面积S.

由于直线CD的方程为$x+3y=6$，直线GH的方程为$3x+y=6$，故它们的交点P的坐标为$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$. 由对称性知，

$$S=8S_{\Delta CPG}=8\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=24.$$

7. 设ω为正实数，若存在$a,\ b(\pi\le a<b\le 2\pi)$，使得$\sin\omega a+\sin\omega b=2$，则$\omega$的取值范围是__________.

答案： $\omega\in\left[\frac{9}{4},\ \frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{13}{4},\ +\infty\right)$.

解： 由$\sin\omega a+\sin\omega b=2$知，$\sin\omega a=\sin\omega b=1$，而$[\omega a,\ \omega b]\subseteq[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$，故题目条件等价于：存在整数$k,\ l(k<l)$，使得

$$\omega\pi \le 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2l\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\omega\pi . \qquad ①$$

当$\omega \ge 4$时，区间$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$的长度不小于4π，故必存在$k,\ l$满足①式.

当$0<\omega<4$时，注意到$[\omega\pi,\ 2\omega\pi] \subseteq (0,\ 8\pi)$，故仅需考虑如下几种情况：

(i) $\omega\pi \le \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时$\omega \le \frac{1}{2}$且$\omega \ge \frac{5}{4}$，无解；

(ii) $\omega\pi \le \frac{5\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时有$\frac{9}{4} \le \omega \le \frac{5}{2}$；

(iii) $\omega\pi \le \frac{9\pi}{2} < \frac{13\pi}{2} \le 2\omega\pi$，此时有$\frac{13}{4} \le \omega \le \frac{9}{2}$，得$\frac{13}{4} \le \omega < 4$.

综合(i)、(ii)、(iii)，并注意到$\omega \ge 4$亦满足条件，可知$\omega \in \left[\frac{9}{4},\ \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4},\ +\infty\right)$.

8. 对四位数$\overline{abcd}$ $(1 \le a \le 9,\ 0 \le b, c, d \le 9)$，若$a>b,\ b<c,\ c>d$，则称$\overline{abcd}$为$P$类数；若$a<b,\ b>c,\ c<d$，则称$\overline{abcd}$为$Q$类数．用$N(P)$与$N(Q)$分别表示$P$类数与$Q$类数的个数，则$N(P)-N(Q)$的值为___________.

答案：285.

解：分别记P类数、Q类数的全体为A、B，再将个位数为零的P类数全体记为A_0，个位数不等于零的P类数全体记为A_1.

对任一四位数$\overline{abcd} \in A_1$，将其对应到四位数$\overline{dcba}$，注意到$a>b,\ b<c,\ c>d \ge 1$，故$\overline{dcba} \in B$．反之，每个$\overline{dcba} \in B$唯一对应于A_1中的元素$\overline{abcd}$．这建立了A_1与B之间的一一对应，因此有

$$N(P)-N(Q) = |A|-|B| = |A_0|+|A_1|-|B| = |A_0| .$$

下面计算$|A_0|$：对任一四位数$\overline{abc0} \in A_0$，b可取$0, 1, \cdots, 9$，对其中每个b，由$b<a\le 9$及$b<c\le 9$知，a和c分别有$9-b$种取法，从而

$$|A_0| = \sum_{b=0}^{9}(9-b)^2 = \sum_{k=1}^{9}k^2 = \frac{9\times 10\times 19}{6} = 285 .$$

因此，$N(P)-N(Q)=285$.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分）若实数$a,\ b,\ c$满足$2^a+4^b=2^c,\ 4^a+2^b=4^c$，求$c$的最小值.

解：将$2^a,\ 2^b,\ 2^c$分别记为$x,\ y,\ z$，则$x,\ y,\ z>0$.

由条件知，$x+y^2=z,\ x^2+y=z^2$，故

$$z^2-y=x^2=(z-y^2)^2=z^2-2y^2z+y^4 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 8分$$

因此，结合平均值不等式可得，

$$z=\frac{y^4+y}{2y^2}=\frac{1}{4}\left(2y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\geq\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{2y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$

……………………12 分

当 $2y^2=\frac{1}{y}$，即 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，z 的最小值为 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$（此时相应的 x 值为 $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$，符合要求）.

由于 $c=\log_2 z$，故 c 的最小值为 $\log_2\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)=\log_2 3-\frac{5}{3}$. ……………………16 分

10.（本题满分 20 分）设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数，使得

$$\left\{a_ia_j \mid 1\leq i<j\leq 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\},$$

求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

解: 由条件可知，$a_ia_j\ (1\leq i<j\leq 4)$ 是 6 个互不相同的数，且其中没有两个为相反数，由此知，a_1,a_2,a_3,a_4 的绝对值互不相等，不妨设 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$，则 $|a_i||a_j|(1\leq i<j\leq 4)$ 中最小的与次小的两个数分别是 $|a_1||a_2|$ 及 $|a_1||a_3|$，最大与次大的两个数分别是 $|a_3||a_4|$ 及 $|a_2||a_4|$，从而必须有

$$\begin{cases} a_1a_2=-\frac{1}{8},\\ a_1a_3=1,\\ a_2a_4=3,\\ a_3a_4=-24,\end{cases}$$

……………………10 分

于是 $a_2=-\frac{1}{8a_1},a_3=\frac{1}{a_1},a_4=\frac{3}{a_2}=-24a_1$.故

$$\{a_2a_3,a_1a_4\}=\left\{-\frac{1}{8a_1^2},-24a_1^2\right\}=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\},$$ …………15 分

结合 $a_1\in\mathbb{Q}$，只可能 $a_1=\pm\frac{1}{4}$.

由此易知 $a_1=\frac{1}{4},a_2=-\frac{1}{2},a_3=4,a_4=-6$ 或者 $a_1=-\frac{1}{4},a_2=\frac{1}{2},a_3=-4,a_4=6$. 经检验知这两组解均满足问题的条件.

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$. ……………………20 分

11.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，F_1、F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点. 设不经过焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于两个不同的点 A、B，焦点 F_2 到直线 l 的距离为 d. 如果直线 AF_1、l、BF_1 的斜率依次成等差数列，求 d 的取值范围.

解：由条件知，点 F_1、F_2 的坐标分别为 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$．

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，点 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则 x_1, x_2 满足方程 $\frac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，即

$$(2k^2+1)x^2+4kmx+(2m^2-2)=0. \quad ①$$

由于点 A、B 不重合，且直线 l 的斜率存在，故 x_1, x_2 是方程①的两个不同实根，因此有①的判别式

$$\Delta=(4km)^2-4\cdot(2k^2+1)\cdot(2m^2-2)=8(2k^2+1-m^2)>0,$$

即

$$2k^2+1>m^2. \quad ②$$

由直线 AF_1、l、BF_1 的斜率 $\frac{y_1}{x_1+1}$、k、$\frac{y_2}{x_2+1}$ 依次成等差数列知，$\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=2k$，又 $y_1=kx_1+m, y_2=kx_2+m$，所以

$$(kx_1+m)(x_2+1)+(kx_2+m)(x_1+1)=2k(x_1+1)(x_2+1).$$

化简并整理得，

$$(m-k)(x_1+x_2+2)=0.$$

假如 $m=k$，则直线 l 的方程为 $y=kx+k$，即 l 经过点 $F_1(-1, 0)$，不符合条件．

因此必有 $x_1+x_2+2=0$，故由方程①及韦达定理知，$\frac{4km}{2k^2+1}=-(x_1+x_2)=2$，即

$$m=k+\frac{1}{2k}. \quad ③$$

由②、③知，$2k^2+1>m^2=\left(k+\frac{1}{2k}\right)^2$，化简得 $k^2>\frac{1}{4k^2}$，这等价于 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$．

反之，当 m, k 满足③及 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，l 必不经过点 F_1（否则将导致 $m=k$，与③矛盾），而此时 m, k 满足②，故 l 与椭圆有两个不同的交点 A、B，同时也保证了 AF_1、BF_1 的斜率存在（否则 x_1, x_2 中的某一个为 -1，结合 $x_1+x_2+2=0$ 知 $x_1=x_2=-1$，与方程①有两个不同的实根矛盾）． ……………………10 分

点 $F_2(1, 0)$ 到直线 $l: y=kx+m$ 的距离为

$$d=\frac{|k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\left|2k+\frac{1}{2k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}\cdot\left(2+\frac{1}{2k^2}\right). \quad \text{…………15 分}$$

注意到 $|k|>\frac{\sqrt{2}}{2}$，令 $t=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$，则 $t\in(1, \sqrt{3})$，上式可改写为

$$d=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{3}{t}\right). \quad ④$$

考虑到函数 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{3}{t}\right)$ 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上单调递减，故由④得，$f(\sqrt{3})<d<f(1)$，即

$$d\in(\sqrt{3}, 2). \quad \text{……………………20 分}$$