# 通州区高三年级期中考试

# 数学试卷

2019 年 11 月

| 考生须知 | |
|---|---|
| | 1.本试卷共 4 页，满分 150 分．考试时长 120 分钟． |
| | 2.本试卷分为第一部分和第二部分两部分． |
| | 3.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效． |
| | 4.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回． |

## 第一部分（选择题　共 40 分）

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．设集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\,|\,x^2+x-2<0\}$,则 $M\cap N$=

A．{-2，-1， 0 ，1}　B．{-1，0，1 }　C．{-1，0 }　D．{0，1 }

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_4=8$. 则 $a_n=$ ______.

A．$2^{n-1}$　B．$2^n$　C．$2^{n+1}$　D．$2^{n+2}$

3. 下列函数中为偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

A. $y=\dfrac{1}{x}$　B．$y=\lg|x|$　C．$y=\cos x$　D．$y=2^x$

4．“$\sin 2\alpha>0$”是“$\tan\alpha>0$”的

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

5. 直线 $l$ 经过点 $A(0,b)$，且与直线 $y=x$ 平行，如果直线 $l$ 与曲线 $y=x^2$ 相切，那么 $b$ 等于

A．$-\dfrac{1}{4}$　B. $-\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{4}$　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 在 $\Delta ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$. 若 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$，则 $\Delta ABC$ 的面积等于

A．$\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\dfrac{3}{2}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 1,\\ \log_2 x, & x>1,\end{cases}$ 若方程 $f(x)-k=0$ 有且只有一个根，则实数 $k$ 的取值范围是

A．$(0,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[0,2]$

8. 2014 年 6 月 22 日，卡塔尔首都多哈召开的第 38 届世界遗产大会上宣布:中国大运河项目成功入选世界文化遗产名录，成为中国第 46 个世界遗产项目。随着对大运河的保护与开发，大运河已成为北京城市副中心的一张亮丽的名片，也成为众多旅游者的游览目的的。今有一旅游团乘游船从奥体公园码头出发顺流而下至漕运码头，又立即逆水返回奥体公园码头。已知游船在顺水中的速度为 $v_1$，在逆水中的速度为 $v_2$（$v_1\ne v_2$），则游船此次行程的平均速度 $\bar{v}$ 与 $\dfrac{v_1+v_2}{2}$ 的大小关系是

A．$\bar{v}>\dfrac{v_1+v_2}{2}$　　B．$\bar{v}=\dfrac{v_1+v_2}{2}$　　C. $\bar{v}<\dfrac{v_1+v_2}{2}$　　D．$\bar{v}\ge\dfrac{v_1+v_2}{2}$

## 第二部分（非选择题　共 110 分）

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．**

9. 已知 $a+b\mathrm{i}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$（i 为虚数单位，$a,b\in\mathbf{R}$），则 $a+b=$_____.

10. 已知 $a=\log_2 7$，$b=2^{-3}$，$c=3^{\frac{3}{2}}$，则三个数的大小关系是__________.

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $S_{11}=22$，$a_7=1$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差等于____.

12.定义在 R 上的函数 $f(x)$，给出下列三个论断：
① $f(x)$ 在 R 上单调递增；② $x>1$；③ $f(x)>f(1)$.
以其中的两个论断为条件，余下的一个论断为结论，写出一个正确的命题：________.

13. 若函数 $f(x)=a\cos x+\sin x$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是___.

14. 设 $A$ 是整数集的一个非空子集，对于 $k\in A$，若 $k-1\notin A$，且 $k+1\notin A$，则称 $k$ 是 $A$ 的一个“孤立元”． 集合 $T=\{1,2,3,5\}$ 元素中 T 的 “孤立元”是_____；对给定集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，由 $S$ 中 的 3 个元素构成的所有集合中，含“孤立元”的集合有____个

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$的值；

（Ⅱ）求 $f\left(x\right)$的最小正周期及单调增区间．

16．（本小题 13 分）

在 $\Delta ABC$中，$\angle B=60°$，$\cos C=\frac{1}{7}$，$AC=7$，$D$ 是 $AB$ 边的中点.

（Ⅰ）求 $AB$ 的长；

（Ⅱ）求 $CD$ 的长.

17．（本小题 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 6 项依次成等比数列，设公比为 $q$（$q\neq 1$），数列从第 5 项开始各项依次为等差数列，其中 $a_4=a_7=-4$，数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为$S_n$.

(Ⅰ)求公比 $q$ 及数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若 $S_n\geq 0$，求项数 $n$ 的取值范围.

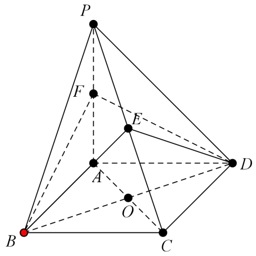
18（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，且$\angle ABC$=60°，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AB$，点 $E$，$F$ 为 $PC$，PA 的中点.

（Ⅰ）求证：平面 $BDE\perp$平面 $ABCD$；

（Ⅱ）二面角 $E—BD—F$ 的大小；

（Ⅲ）设点 $M$ 在 $PB$(端点除外)上,试判断 $CM$ 与平面 $BDF$ 是否平行，并说明理由.




19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=x^3-(b+1)x^2+bx$ .

（Ⅰ）当 $b$=0 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）若已知 $b$>1 且函数 $f(x)$ 与直线 $y=-x$ 相切，求 $b$ 的值；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，函数 $f(x)$ 与直线 $y=-x+m$ 有三个公共点，求 m 的取值范围.(直接写出答案)

20.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x\ (a>0)$ .

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax-f(x)$ 的零点个数；

(Ⅲ) 当 $a=1$ 时，求证不等式 $f(x)\le\frac{x-1}{x}$ 解集为空集.

# 通州区 2019—2020 学年度第一学期高三年级期中考试

## 数学试卷参考答案及评分标准　2019 年 11 月

**一、选择题：（每小题 5 分，共 40 分.）**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | A | B | C | A | D | B | C |

二、**填空题（每道小题 5 分，共 30 分）**

9．$-3$ ；　10．$c>a>b$；11．$-1$；　12．①②推出③；

13．$a\geq\sqrt{3}$；14．5；16　（第一个空 2 分，第二个空 3 分）.

**三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.**

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$ .

（Ⅰ）求 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$的值；

（Ⅱ）求 $f\left(x\right)$的最小正周期及单调增区间.

解：（Ⅰ）因为 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$

所以 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\sin(2\times\dfrac{5\pi}{12})+2\cos^2(\dfrac{5\pi}{12})-1$

$=\sqrt{3}\sin(2\times\dfrac{5\pi}{12})+\cos(2\times\dfrac{5\pi}{12})$

$=\sqrt{3}\sin(\dfrac{5\pi}{6})+\cos(\dfrac{5\pi}{6})$

$=0$　…………………………4 分

（Ⅱ）因为 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$，

所以 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ …………………………7 分

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. …………………………9 分

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$ …………………………12 分

所以 $f\left(x\right)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]\quad(k\in Z)$ …………………………13 分

16.（本小题 13 分）

在 $\Delta ABC$ 中，$\angle B=60°$，$\cos C=\frac{1}{7}$，$AC=7$，$D$ 是 $AB$ 边的中点.

（Ⅰ）求 $AB$ 的长；

（Ⅱ）求 $CD$ 的长.

解：（Ⅰ）因 $\cos C=\frac{1}{7}$ 则 $\sin C=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ …………………………2 分

由正弦定理，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，所以 $AB=\frac{7\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$ …………………………6 分

（Ⅱ）方法一、因 $A=\pi-(B+C)$，则 $\cos A=-\cos(B+C)=-\cos(60°+C)$

$=-\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\frac{11}{14}$， …………………………9 分

因 D 是 AB 中点，则 AD=4，在 $\Delta ADC$ 中，由余弦定理得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A=7^2+4^2-2\times 7\times 4\times\frac{11}{14}=21$ ……………………………12 分

所以 CD=$\sqrt{21}$. …………………………13 分

方法二、可以求出 BC=5，用角 B 求得两根，（3 舍去则三角形为钝角）

用角 C 求得一根.

17.（本小题 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 6 项依次成等比数列，设公比为$q$（$q \neq 1$），数列从第 5 项开始各项依次为等差数列，其中$a_4 = a_7 = -4$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$.

(1)求公比$q$及数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)若$S_n \geq 0$，求项数$n$的取值范围。

解：(1)设等比数列的公比为$q$，则$a_5 = -4 \cdot q, a_6 = -4 \cdot q^2$ ……………………………2 分

∵从第 5 项开始各项依次为等差数列，∴$a_5 + a_7 = 2a_6$……………………………3 分

∵$a_7 = -4$，∴$2q^2 - q - 1 = 0$，解得$q = 1$或$q = -\frac{1}{2}$

∵数列$\{a_n\}$为非常数列，∴$q = -\frac{1}{2}$……………………………4 分

当$n \leqslant 4$时，$a_n = 32 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ……………………………5 分

当$n \geqslant 5$时，∵$a_5 = 2, a_6 = -1$，

∴$a_n = 2 + (n-5) \cdot (-3) = -3n + 17$……………………………6 分

综上所述，$a_n = \begin{cases} 32 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}, n \leq 4 \\ -3n + 17, \quad n \geq 5 \end{cases}$ ………………………7 分

(2)易知数列前 4 项的和为 20，……………………………8 分
从第 5 项开始为等差数列，
当$n \geqslant 5$时，数列为 2，-1，-4，-7，---
可令数列$\{b_m\}$为 2，-1，-4，-7，---

数列$\{b_m\}$的前$m$项和$T_m = -\frac{3}{2}m^2 + \frac{7}{2}m$，……………………………10 分

依题意，$-\frac{3}{2}m^2 + \frac{7}{2}m + 20 \geq 0$，∴$0 < m \leq 5$……………………………12 分

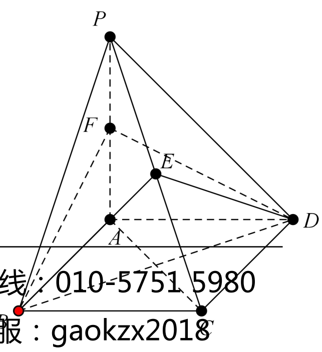
综上所述，$n \leq 9$，$n \in N^*$……………………………13 分

18（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，且∠$ABC$=60°，$PA \perp$平面$ABCD$，$PA = AB$，点$E$，$F$为$PC$，PA 的中点.

（Ⅰ）求证：平面$BDE \perp$平面$ABCD$；

（Ⅱ）二面角$E$—$BD$—$F$的大小；



（III）设点 $M$ 在 $PB$(端点除外)上,判断 $CM$ 与平面 $BDF$ 的位置关系，并说明理由.

（Ⅰ）证明：连接 $AC$ 与 $BD$，设交点为 $O$，连接 $FO$，
由已知 $E$，$O$ 分别为 $PC$，$AC$ 中点，可得 $EO//PA$, …………………………2 分

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$， $EO\subset$ 平面 $BDE$
所以平面 $BDE\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………4 分
（Ⅱ）解：（法一）
以 $O$ 为原点，以 $OB$，$OC$，$OE$ 为 $x, y, z$ 轴建立空间直角坐标系

设 $AB=a$，因为底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$ ， $PA=AB$，则 $AC=a$， $BO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$O(0,0,0)$，$A(0,-\frac{a}{2},0)$，$B(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，$C(0,\frac{a}{2},0)$，$D(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，$E(0,0,\frac{a}{2})$，$F(0,-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$

则 $\overrightarrow{FB}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$， $\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3}a,0,0)$。

设平面 $BFD$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\bullet\overrightarrow{DB}=0\\ \vec{m}\bullet\overrightarrow{FB}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}\sqrt{3}ax=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}ax+\frac{a}{2}y-\frac{a}{2}z=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\vec{m}=(0,1,1)$

又由（Ⅰ）可知 $\overrightarrow{OC}(0,\frac{a}{2},0)$ 为平面 $BDE$ 的法向量，

$$\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{OC}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OC}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以二面角 $E—BD—F$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ …………………………9 分
（方法二）
连接 $EF$，$EO$，$FO$.
由（Ⅰ）可知 $EF\perp$ 平面 $BDE$， $EO\perp BD$，
所以 $FO\perp BD$，
所以 $\angle FOE$ 即为二面角 $E—BD—F$ 的平面角.
在 $\triangle FEO$ 中 $EO=FO$， $EO\perp FO$

所以所以二面角 $E—BD—F$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$

（III）因为点 $M$ 在 $PB$(端点除外)上，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}(0<\lambda<1)$，

则 $P(0,-\frac{a}{2},a)$，$M(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a,\frac{\lambda a}{2}-\frac{a}{2},a-\lambda a)$，$\overline{CM}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a,a-\frac{\lambda a}{2},\lambda a-a)$

$$\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{CM}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\overrightarrow{CM}\right|}=\frac{\frac{\lambda a}{2}}{\left|\vec{m}\right|\left|\overrightarrow{CM}\right|}\neq 0$$

所以 $CM$ 与平面 $BDF$ 不平行.　　　　……………………………14 分

19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=x^3-(b+1)x^2+bx$.

（Ⅰ）当 $b$=0 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）若已知 $b$>1 且函数 $f(x)$ 与直线 $y$=−$x$ 相切，求 $b$ 的值；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，函数 $f(x)$ 与直线 $y$=−$x$+$m$ 有三个公共点，求 m 的取值范围.(直接写出答案)

解：（1）当 b=0 时，$f(x)=x^3-x^2$

则 $f'(x)=3x^2-2x$，　　　　……………………………1 分

由 $f'(x)=0$ 得 $x=0,x=\frac{2}{3}$，　　　　……………………………2 分

当 $x<0$ 或 $x>\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$；　　　　……………………………3 分

当 $0<x<\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)<0$，　　　　……………………………4 分

则当 $x=\frac{2}{3}$ 时，f(x)取得极小值 $f(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^3-(\frac{2}{3})^2=-\frac{4}{27}$ ……………………………5 分

（2）因 $f(x)=x^3-bx^2-x^2+bx$，

则 $f'(x)=3x^2-(2b+2)x+b$ ……………………………6 分

设函数 $f(x)$ 与直线 $y$=−$x$ 相切的切点是$(x_0,y_0)$，……………………………7 分

因为 $f'(0)=b>1$，所以 $x_0\neq 0$，

所以有 $\begin{cases}f'(x_0)=3{x_0}^2-(2b+2)x_0+b=-1\\ y_0=-x_0\\ y_0={x_0}^3-(b+1){x_0}^2+bx_0\end{cases}$　　　　……………………………9 分

又$3{x_0}^2-(2b+2)x_0+b=-1$，相减得$2{x_0}^2-(b+1)x_0=0$，

所以$x_0=\frac{b+1}{2}$，所以$-1=(\frac{b+1}{2}-1)\left(\frac{b+1}{2}-b\right)$，解得 b=3。……………………………10 分

（3）$0<m<\frac{32}{27}$.　　　　……………………………13 分

20.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=x-a\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a>0$时求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）求函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax-f(x)$的零点个数；

(III) 当$a=1$时，求证不等式$f(x)\le\frac{x-1}{x}$解集为空集.

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$……………………………1 分

$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$……………………………2 分

令$f'(x)=0$，得$x=a$

当$x>a$时，有$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增.

当$0<x<a$时，有$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,a)$上单调递减.

所以$f(x)$的单调增区间为$(a,+\infty)$，单调减区间为$(0,a)$……………………………4 分

（Ⅱ）求函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax-f(x)$的零点个数.

$g'(x)=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$

令$g'(x)=\frac{(x-a)(x-1)}{x}=0$，解得$x_1=a,x_2=1$

$g(1)=-a-\frac{1}{2}<0$，$g(2a+3)=a+a\ln(2a+3)+\frac{3}{2}>0$……………………………5 分

当$a>1$时，$g(x)$在$(1,a)$上递减，有$g(1)>g(a)$.

所以 $g(a)<0$.

所以 $g(x)$ 有一个零点. ..............................6 分

当 $a=1$ 时， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $g(x)$ 有一个零点. ..............................7 分

当 $0<a<1$ 时， $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上递增，在 $(a,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增.

此时 $g(a)=-\frac{1}{2}a^2-a+a\ln a<0$ ..............................8 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点. ..............................9 分

(III)当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)\le\frac{x-1}{x}$ 解集为空集,等价于 $f(x)>\frac{x-1}{x}$ 在定义域内恒成立.

即 $f(x)-\frac{x-1}{x}>0$ 在定义域内恒成立. ..............................10 分

令 $h(x)=f(x)-\frac{x-1}{x}$，

所以 $h(x)=x+\frac{1}{x}-\ln x-1$..............................11 分

$$h'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x-1}{x^2}$$

令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

列表得

| $x$ | $(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | $(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | — | 0 | + |
| $h(x)$ | 递减 | 最小值 | 递增 |

$h(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\sqrt{5}-1-\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ..............................12 分

因为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}<e$，所以 $\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}<1$.

又 $\sqrt{5}-1>1$，

所以 $h(\frac{\sqrt{5}+1}{2})>0$ ..............................13 分

所以 $h(x)=f(x)-\frac{x-1}{x}>0$ 恒成立.

所以不等式 $f(x)\le\frac{x-1}{x}$ 解集为空集. ..............................14 分