高三一轮中期调研考试

数学参考答案

1.A 【解析】本题考查集合，考查数学运算的核心素养.

因为$M\cup N=\{1,2,3\}$，所以$\complement_U(M\cup N)=\{4,5\}$.

2.D 【解析】本题考查复数，考查数学运算的核心素养.

$$\frac{2+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{2(1+2\mathrm{i})^2}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{-6+8\mathrm{i}}{5}=-\frac{6}{5}+\frac{8}{5}\mathrm{i}$$

3.C 【解析】本题考查平面向量的数量积，考查数学运算的核心素养.

因为$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-2\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{4}{5}$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{5}$.

4.D 【解析】本题考查等比数列，考查数学运算的核心素养.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$(a_1+a_3+a_5)q=a_2+a_4+a_6$，解得$q=2$.

$S_{12}-S_6=a_7+a_8+\cdots+a_{12}=(a_1+a_2+\cdots+a_6)\times2^6=3\times2^6=192$.

5.D 【解析】本题考查椭圆，考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

易知$P\left(c,\frac{b^2}{a}\right),A(-a,0),B(0,b),k_{AB}=\frac{b}{a},k_{OP}=\frac{b^2}{ac}$.

因为$AB\ /\!/\ OP$，所以$k_{AB}=k_{OP}$，则$\frac{b}{a}=\frac{b^2}{ac}$，即$b=c,a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，

所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.B 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\beta$，所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.因为

$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],\beta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right],\frac{\pi}{2}-\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以$\alpha+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\beta=\pi$，则

$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

7.C 【解析】本题考查函数的应用，考查数学建模的核心素养.

$100^{\circ}\mathrm{C}$ 的物块经过 $t\mathrm{min}$ 后的温度 $\theta_1=20+80\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$, $60^{\circ}\mathrm{C}$ 的物块经过 $t\mathrm{min}$ 后的温度 $\theta_2=20+40\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$.要使得这两块物体的温度之差不超过 $10^{\circ}\mathrm{C}$，则 $20+80\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}-\left(20+40\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\right)\leq 10$，解得 $t\geq 8\ln 2=5.52$.

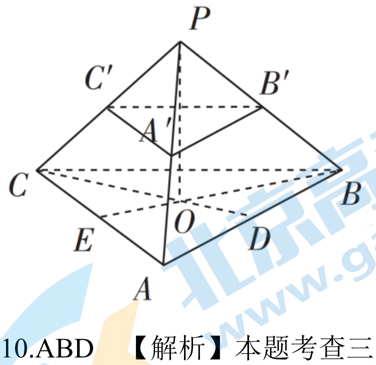
8.A 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用，考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1, f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geq f(1)=0$，所以 $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立.令 $x=\dfrac{9}{8}$，则 $\ln\dfrac{9}{8}>\dfrac{1}{9}$.设函数 $g(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}, g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，则 $g(x)\leq g(\mathrm{e})=0$，所以 $g(3)=\ln 3-\dfrac{3}{\mathrm{e}}<0$，即 $\ln 3<\dfrac{3}{\mathrm{e}}<\dfrac{10}{9}$，所以 $3<\mathrm{e}^{\frac{10}{9}}, \dfrac{1}{9}>\mathrm{e}^{-\frac{20}{9}}$.故 $a>b>c$.

9.ABD 【解析】本题考查棱台，考查直观想象的核心素养.

延长 CC', AA', BB' 交于点 P，设 AB, AC 的中点分别为 D, E，连接 CD，BE 并交于点 O，连接 PO.在 $\triangle PAC$ 中，$C'A' \parallel CA$，所以 $\dfrac{C'A'}{CA}=\dfrac{PC'}{PC}$，可得 $PC'=1, PC=2$.同理可得 $PA=PB=2$，所以三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥.又 $PC^2+PA^2=AC^2$，所以 $PC\perp PA$，即 $CC'\perp AA'$, A 正确.易得 $AB\perp$ 平面 POC，所以 $CC'\perp AB$，B 正确.因为 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle PCO$ 为直线 CC' 与平面 ABC 所成的角.易知 $CD=\sqrt{6}, CO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, PO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \cos\angle PCO=\dfrac{CO}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, C 错误.

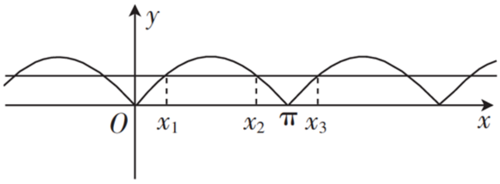
因为 C' 为 PC 的中点，所以三棱台 $ABC-A'B'C'$ 的高为 $\dfrac{1}{2}PO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$D$ 正确.



10.ABD 【解析】本题考查三角函数及等差数列，考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

因为函数 $y=|\sin x|-t$ 有零点，所以 $t\in[0,1]$.

画出函数 $y=|\sin x|$ 与 $y=t$ 的图象，如图所示.



当 $t=0$ 或 1 时，经验证，符合题意.

当 $t\in(0,1)$ 时，由题意可得 $x_2-x_1=x_3-x_2$.因为 $x_2+x_1=\pi,x_2+x_3=2\pi$，所以

$x_1=\dfrac{\pi}{4},x_2=\dfrac{3\pi}{4},x_3=\dfrac{5\pi}{4},t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11.ACD　【解析】本题考查抽象函数，考查逻辑推理的核心素养.

令 $x=y=0$，则 $f(0)=0$，A 正确.当 $x\neq0$ 且 $y\neq-1$ 时，由 $(y+1)f(x)=xf(y+1)$，得

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(y+1)}{y+1}$.令函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $g(y+1)=\dfrac{f(y+1)}{y+1}$，所以 $g(x)=g(y+1)$，所以 $g(x)$ 为常函数.令 $g(x)=k$，则 $f(x)=kx$，所以 $f(x)$ 是奇函数，C 正确. $f(x)$ 没有极值，D 正确.当 $k\neq0$ 时，

$f(1)=k\neq0$，B 错误.

12.ABD　【解析】本题考查直线和圆的方程，考查直观想象、逻辑推理及数学运算的核心素养.

圆 C_k 的圆心都在直线 $x+y+2=0$ 上，A 正确.由题意可得 C_k 的方程为

$\left(x+\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{(k+1)^2}{2}$，故圆 C_{99} 的方程为 $(x+52)^2+(y-50)^2=5000$，B 正确.

若圆 C_k 与 y 轴有交点，则 $\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}(k+1)}{2}$，解得 $k\geqslant4\sqrt{2}+3\approx8.6$.因为 $k\in\mathbf{N}_+$，所以 $k\geqslant9$，C 错误.

由 $\left(x+\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{k}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{(k+1)^2}{2}$，令 $x=-2$，可得 y 的较大根为 $k+1$，故 $|B_kB_{k+1}|=1$，D 正确.

13. $\dfrac{11\pi}{6}$　【解析】本题考查三角函数，考查数学运算的核心素养.

因为 $y=\sin x+1=\sin\left[\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\right]+1,k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $y=\sin x+1$ 的图象可由函数

$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象至少向右平移 $\dfrac{11\pi}{6}$ 个单位长度得到.

14.$(0,+\infty)$　【解析】本题考查分段函数，考查逻辑推理的核心素养.

画出 $f(x)$ 的图象（图略），数形结合可得 $\begin{cases}2x>0,\\2x>x-1,\end{cases}$ 解得 $x>0$.

15.1　【解析】本题考查抛物线，考查数学运算的核心素养.

设 $A(-\sqrt{a},a),B(\sqrt{a},a),D(m,m^2)$，则 $\overrightarrow{AD}=(m+\sqrt{a},m^2-a),\overrightarrow{BD}=(m-\sqrt{a},m^2-a)$.因为 $\triangle ABD$ 为直角三角形，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=(m+\sqrt{a})(m-\sqrt{a})+(m^2-a)^2=0$，即 $m^2-a+(m^2-a)^2=0$.因为 $m^2-a\neq 0$，所以 $m^2=a-1\ldots 0,a\ldots 1$.$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot(a-m^2)=\sqrt{a}\ldots 1$.

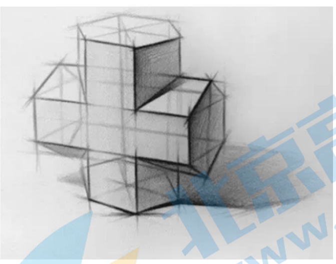
16.$\frac{232\sqrt{3}}{3}$　【解析】本题考查几何体的体积，考查直观想象及数学运算的核心素养.

过直线 AD 和直线 PQ 分别作平面 α，平面 β（图略），平面 α 和平面 β 都平行于竖直的正六棱柱的底面，则该竖直的正六棱柱夹在平面 α 和平面 β 之间的部分的体积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 2^2\times 4=24\sqrt{3}$.如图将多面体 $ABCDNM$ 分成三部分，$V_{A-BFM}=V_{D-CEN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$，三棱柱 $BFM-CEN$ 的体积为 $\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 2=\sqrt{3}$，所以多面体 $ABCDNM$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

两个正六棱柱重合部分的体积为 $24\sqrt{3}-4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{56\sqrt{3}}{3}$.

一个正六棱柱的体积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 2^2\times 8=48\sqrt{3}$.

故该几何体的体积为 $2\times 48\sqrt{3}-\frac{56\sqrt{3}}{3}=\frac{232\sqrt{3}}{3}$.



17.解：（1）在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=10,\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=25$，解得$AC=5$.

（2）在$\triangle ACD$中，$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，所以$AC=2\sqrt{7}\sin\angle ADC=2\sqrt{7}\sin\angle ADB$.

在$\triangle ABD$中，$\angle BAD=90^\circ,\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}$，所以$AB=4\sqrt{7}\sin\angle ADB$.

故$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{4\sqrt{7}\sin\angle ADB}{2\sqrt{7}\sin\angle ADB}=2$.

18.解：（1）当E为PD的中点时，AE // 平面PBC.理由如下：

设F为PC的中点，连接EF,FB,AE.

在$\triangle PCD$中，EF // $CD,EF=\dfrac{1}{2}CD$.

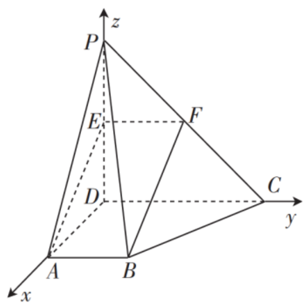
因为$CD=2AB,AB$ // CD，所以EF // $AB,EF=AB$，

所以四边形$EFBA$为平行四边形，所以AE // BF.

因为$BF\subset$平面PBC，所以AE // 平面PBC.

（2）以D为坐标原点，DA,DC,DP所在直线分别为x,y,z轴，建立

如图所示的空间直角坐标系.



设$PD=CD=AD=2AB=2$，则$P(0,0,2),C(0,2,0),B(2,1,0)$，

$\overrightarrow{PB}=(2,1,-2),\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$.

设平面PBC的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+y-2z=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$

令$y=2$，则$\vec{m}=(1,2,2)$.

设G为AP的中点，连接DG（图略），易证得$DG\perp$平面PAB，所以$\overrightarrow{DG}$是平面PAB的一个法向量.

又$D(0,0,0),G(1,0,1)$，所以$\overrightarrow{DG}=(1,0,1)$.

设平面 PBC 与平面 PAB 的夹角为 θ，

$$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{DG}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{DG}}{|\vec{m}|\left|\overrightarrow{DG}\right|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，即平面 PBC 与平面 PAB 的夹角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

19.（1）证明：令 $n=1$，可得 $a_2=2$.

因为 $2a_{n+1}-a_n=n+2$ ①，所以 $2a_n-a_{n-1}=n+1(n\geq 2)$ ②.

①-②得 $2a_{n+1}-a_n-(2a_n-a_{n-1})=1$，即 $2(a_{n+1}-a_n-1)=a_n-a_{n-1}-1$.

因为 $a_2-a_1-1=0$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n-1\}$ 为常数列.

（2）解：由（1）可得 $a_{n+1}-a_n-1=0$，所以 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

所以 $a_n=n$.

因为 $b_n=\frac{n}{4^{n-1}}$，所以 $T_n=\frac{1}{4^0}+\frac{2}{4^1}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^{n-1}}$ ③，

$\frac{1}{4}T_n=\frac{1}{4^1}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$ ④.

③-④得 $\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n}{4^n}$

$$=\frac{\frac{1}{4^0}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n}{4^n}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{3n+4}{3\cdot 4^n},$$

所以 $T_n=\frac{16}{9}-\frac{3n+4}{9\cdot 4^{n-1}}$.

20.解：（1）$f'(x)=2x-a-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$f'(4)=8-a-\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$，解得 $a=1$.

（2）$f(x)=x^2-x-2\sqrt{x}+b,f'(x)=\frac{2x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

令函数 $g(x)=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1,g'(x)=3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$.

当$x>\frac{1}{6}$时，$g'(x)>0$；当$0<x<\frac{1}{6}$时，$g'(x)<0$.

所以$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{6}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$上单调递增.

因为$g(0)=-1,g(1)=0$，所以当$x>1$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$；当$0<x<1$时，$g(x)<0$，

即$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

当$0<b\leq 1$时，$f(x)$在$[0,b]$上的最小值为$f(b)=b^2-b-2\sqrt{b}+b=0$，解得$b=2^{\frac{2}{3}}>1$，舍去.

当$b>1$时，$f(x)$在$[0,b]$上的最小值为$f(1)=-2+b=0$，解得$b=2$，

此时$f(x)=x^2-x-2\sqrt{x}+2,f(0)=2,f(2)=4-2\sqrt{2}<2$，符合题意.

综上，b的值为2.

21.解：（1）因为渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$c^2=a^2+b^2=\frac{7}{4}a^2=7,a=2,b=\sqrt{3}$.

故C的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

（2）因为点$(m,\sqrt{3}k)$在双曲线C上，所以$\frac{m^2}{4}-\frac{(\sqrt{3}k)^2}{3}=1$，即$m^2-4k^2=4$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$得$(3-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-12=0$.

$\Delta=48(m^2-4k^2+3)=336>0$.

$x_1+x_2=\frac{8km}{3-4k^2},x_1x_2=\frac{-4m^2-12}{3-4k^2}$.

$y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=\frac{(-4m^2-12)k^2}{3-4k^2}+\frac{8k^2m^2}{3-4k^2}+m^2$

$$=\frac{3\left(m^2-4k^2\right)}{3-4k^2}=\frac{12}{3-4k^2}.$$

$$x_2-x_1=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{8km}{3-4k^2}\right)^2+\frac{4\left(4m^2+12\right)}{3-4k^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3m^2-12k^2+9}}{\left|3-4k^2\right|}=\frac{4\sqrt{21}}{\left|3-4k^2\right|}.$$

因为 $x_1x_2=\frac{-4m^2-12}{3-4k^2}<0$，所以 $3-4k^2>0$，所以 $x_2-x_1=\frac{4\sqrt{21}}{3-4k^2}$.

$$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2+2\left(x_2-x_1\right)-4}$$

$$=\frac{\frac{12}{3-4k^2}}{\frac{-4m^2-12}{3-4k^2}+\frac{8\sqrt{21}}{3-4k^2}-4}$$

$$=\frac{12}{-4m^2-12+8\sqrt{21}-12+16k^2}$$

$$=\frac{12}{-16-24+8\sqrt{21}}=-\frac{15+3\sqrt{21}}{8}.$$

故 k_1k_2 为定值，定值为 $-\frac{15+3\sqrt{21}}{8}$.

22.（1）证明：当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{x}{2}, f'\left(x\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos x+1\right)\leq 0$，

所以 $f\left(x\right)$ 是减函数.

因为 $f\left(0\right)=0$，所以 $f\left(x\right)$ 只有一个零点.

（2）解：$f\left(x\right)+x\cos x>0$，

即 $a\sin x-\left(a+1\right)x+x\cos x>0$.

令函数 $g\left(x\right)=a\sin x-\left(a+1\right)x+x\cos x, x\in\left(0,\pi\right)$，

$g'\left(x\right)=\left(a+1\right)\left(\cos x-1\right)-x\sin x$.

$g\left(0\right)=0$，要使得 $g\left(x\right)>0$，则存在 $x_1\in\left(0,\pi\right)$，使得 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上单调递增，即当 $x\in\left(0,\ x_1\right)$ 时，

$g'(x)>0$.

令函数$h(x)=g'(x)=(a+1)(\cos x-1)-x\sin x, x\in(0,\pi)$，

$h'(x)=-(a+2)\sin x-x\cos x$.

$h(0)=0$，要使得$h(x)>0$，则存在$x_2\in(0,\pi)$，使得$h(x)$在$(0,x_2)$上单调递增，即当$x\in(0,x_2)$，时，

$h'(x)>0$.

令函数$u(x)=h'(x)=-(a+2)\sin x-x\cos x, x\in(0,\pi)$，

$u'(x)=-(a+3)\cos x+x\sin x$.

$u(0)=0, u'(0)=-(a+3)$.

当$-(a+3)\geq 0$，即$a\leq -3$时，$g'(x)=(a+1)(\cos x-1)-x\sin x\geq -2(\cos x-1)-x\sin x$.

令函数$s(x)=-2(\cos x-1)-x\sin x, s'(x)=\sin x-x\cos x$.

令函数$t(x)=s'(x)=\sin x-x\cos x, t'(x)=x\sin x$.

因为$t'(x)>0$在$(0,\pi)$上恒成立，所以函数$t(x)=s'(x)$在$(0,\pi)$上单调递增.

因为$t(0)=s'(0)=0$，所以$t(x)=s'(x)>0$在$(0,\pi)$上恒成立，

所以$s(x)$在$(0,\pi)$上单调递增.

因为$s(0)=0$，所以$s(x)>0$在$(0,\pi)$上恒成立，即$g'(x)>0$在$(0,\pi)$上恒成立，所以$g(x)$在$(0,\pi)$上单调递增，

$g(x)>g(0)=0$，符合题意.

当$-(a+3)<0$，即$a>-3$时，存在$x_0\in(0,\pi)$，使得当$x\in(0,x_0)$时，$u'(x)<0$，即$u(x)$在$(0,x_0)$上单调递减.

因为$u(0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$u(x)<0$，即$h'(x)<0$，所以$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减.

因为$h(0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减.

因为$g(0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<0$，与题意不符.

综上，a的取值范围为$(-\infty,-3]$.