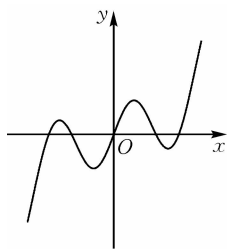
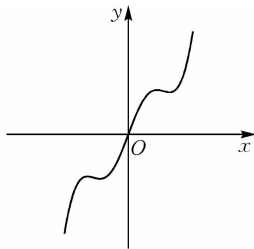


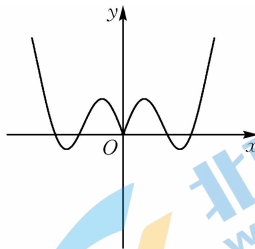
6. 函数 $f(x) = x^3 + \sin 3x$ 的图象大致为



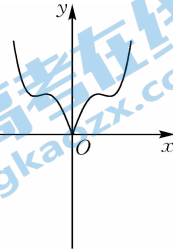
A



B



C



D

7. 数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时,发现有这样一个数列 $\{a_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, 其中从第3项起,每一项都等于它前面两项之和,即 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 这样的数列称为“斐波那契数列”. 若 $a_m = 2(a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{174}) + 1$, 则 $m =$

A. 175

B. 176

C. 177

D. 178

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$, 且 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立, 若 $f(x)$ 在区间

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有3个零点, 则 ω 的取值范围是

A. $\left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right)$

B. $\left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right]$

C. $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$

D. $\left(\frac{9}{2}, 9\right]$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 下列代数式的值为 $\frac{1}{4}$ 的是

A. $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$

B. $\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$

C. $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$

D. $2\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当且仅当 $n = 12$ 时 S_n 取得最大值, 则满足 $S_k > 0$ 的最大的正整数 k 可能为

A. 22

B. 23

C. 24

D. 25

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right)$, 且 $f\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 为奇函数, 当 $x \in$

$\left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ 时, $f(x) = \frac{8}{3}x^2 + ax - 2$, 则

A. $f(x)$ 是周期为3的周期函数

B. $f(1) = 1$

C. 当 $x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$ 时, $f(x) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{22}{3}x - 2$

D. $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 2$

12. 三角函数表最早可以追溯到古希腊天文学家托勒密的著作《天文学大成》中记录的“弦表”, 可以用来查询非特殊角的三角函数近似值, 为天文学中很多复杂的运算提供了便利, 有趣的是, 很多涉及三角函数值大小比较的问题却不一定要求出准确的三角函数值, 就比如下面几个选项, 其中正确的是

A. $\tan \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

B. $\cos \frac{1}{2} > \frac{7}{8}$

C. $\sin 1 > 2\sin \frac{1}{2}$

D. $\left(\sin \frac{1}{2}\right)^{\sin \frac{1}{2}} > \frac{2}{3}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 8 + 5^{\log_5 2} =$ _____.

14. 已知 $\sin \alpha = \frac{2m-3}{m+2}$, $\cos \alpha = -\frac{m+1}{m+2}$, 且 α 为第二象限角, 则 $\frac{\sin(\alpha+2\ 024\pi) + \cos(\alpha+2\ 023\pi)}{\cos(\alpha+\frac{2\ 021\pi}{2})}$
= _____.

15. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x) > f'(x)$, 若 $f(0) = 0$, 则不等式 $f(2x^2 - 5x - 7) > 0$ 的解集为 _____.

16. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = (a_n + 3)(a_n - 1)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a_n a_{n+1}}$, 若 $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \lambda - \frac{5}{3}\lambda^2$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则 λ 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域.

18. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 7$, $a_3 + 2a_8 = 35$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $3b_n - 2S_n = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \cdot 3^x + \frac{1}{3^{x-1}}$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $g(x) = 9^x + 9^{-x} + mf(x) + m^2 - 1$, 求函数 $g(x)$ 的最小值.

20. (本小题满分 12 分)

在数 1 和 3 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n , 令 $a_n = \log_3 T_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{(n+1) \cdot 2^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + \ln x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x) < e^x + x^2 - 2$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a(e^x - x) - e^{-x} - x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = e$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, x_1, x_2 分别为函数 $f(x)$ 的极大值点和极小值点, 且 $f(x_1) + tf(x_2) > 0$, 求 t 的取值范围.