2022 北京北师大实验中学高二（上）期中

数　　学

班级________　姓名________　学号________　成绩________

考生须知	1．本试卷共 7 页，共五道大题，25 道小题，答题卡共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟 2．在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号 3．试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4．在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答

第 I 卷(共 100 分)

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分)

1．已知空间向量 $a=(0,2,0)$，$b=(1,0,-1)$，则 $(a+b)\cdot b=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

2．若直线 $x-y-3=0$ 与 $ax+2y-1=0$ 垂直，则 $a=$

A．-2　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．若 $x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 表示圆的方程，则 m 的取值范围是

A．$(-\infty,5)$　　B．$(-\infty,5]$　　C．$(5,+\infty)$　　D．$[5,+\infty)$

4．平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=C$，若 M 为 A_1C 的中点，则 $\overline{AM}=$

A．$a+b+\frac{1}{2}c$　　B．$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+c$　　C．$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$　　D．$a+b+c$

5．已知 $A(1,0,-1)$，$B(4,3,2)$，则线段 AB 上靠近 A 的三等分点的坐标为

A．$(0,-1,-2)$　　B．$(2,1,0)$　　C．$(3,2,1)$　　D．$(5,4,3)$

6．设直线 l 的一个方向向量为 v，平面 α 的一个法向量为 n，平面 β 的一个法向量为 m，则下列说法正确的是

①若 $<v,n>=30°$，则 l 与 α 所成的角为 $30°$；

②若 l 与 α 所成角为 $60°$，则 $<v,n>=30°$；

③若 $<m,n>=60°$，则平面 α 与 β 所成的角为 $60°$；

④若平面 α 与 β 所成的角为 $60°$，则 $<m,\ n>=60°$

A．③　　B．①③　　C．②④　　D．①③④

7．点 (-1.2) 关于直线 $x+y+4=0$ 的对称点的坐标为

A．$(-6,-3)$　　B．$(-3,-6)$　　C．$(-7,-2)$　　D．$(-2,-7)$

8．三棱锥 $S-ABC$ 中，SA,SB,SC 两两垂直，$SA=1$，$SB=SC=2$，则点 S 到平面 ABC 的距离为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

9．已知点 M 的坐标为 (a,b)，圆 M 与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于 C,D 两点，则“$|AB|=|CD|$”是“$a=b$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

D．既不充分也不必要条件　　C．充分必要条件

10．设 P 为函数 $y=\sqrt{3}|x|$ 图像上的动点，Q 是圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=1$（其中 $ab=0$）上的动点，若 $|PQ|$ 最小值为 1，则以所有满足条件的点 C 为顶点的多边形的面积为

A．$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　D．$8\sqrt{3}$

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分)

11．过点 $A(3,0)$，$B(5,-2)$ 的直线的倾斜角为________.

12．若 $a=(1,0,-1)$，$b=(0,2,1)$，$c=(2,m,-1)$ 为共面向量，则 m 的值为________.

13．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为棱 BB_1 和 B_1C_1 的中点，则直线 AM 和 CN 所成角的余弦值为________.

14．平面直角坐标系中，已知直线 l 过点 $(0,1)$，与坐标轴围成的三角形的面积为 2，则直线 l 的方程为________.

15．如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面是边长为 2 的正方形，$\triangle SCD$ 是等边三角形，平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$，M,N,P 分别为棱 BC,CD,DA 的中点，Q 为 $\triangle SCD$ 及其内部的动点，满足 $PQ//$ 平面 AMS，给出下列四个结论：

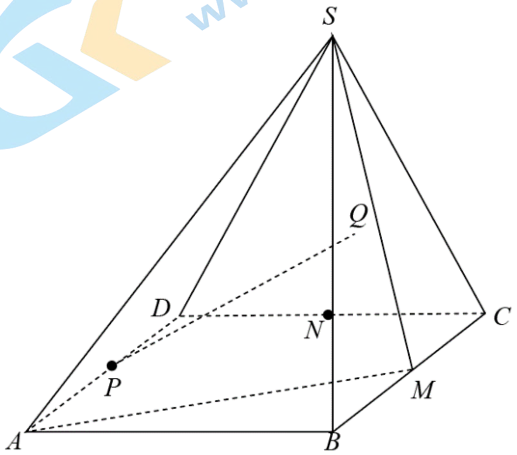
①直线 SA 与平面 $ABCD$ 所成角为 45°；

②二面角 $S-AB-N$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$；

③点 Q 到平面 AMS 的距离为定值；

④线段 NQ 长度的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

其中所有正确结论的序号是__________



三、解答题(本大题共 3 小题，共 35 分)

16．(本小题满分 12 分)

已知向量 $a=(1,0,-1)$，$b=(3,t,0)$.

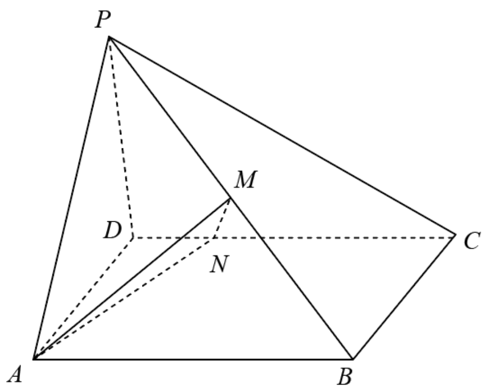
(I)若 $t=3$，求 $<a,b>$；

(Ⅱ)求证：对任意 $t\in\mathbf{R}$，$2a+b$ 与 $2a-b$ 不垂直；

(III)若 $\lambda a+b$ 与 z 轴平行，求 λ，t 的值

17．(本小题满分 13 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=4$，$BC=2$，$PD=2\sqrt{3}$，M 为 PB 中点，N 为 CD 靠近 D 的四等分点.



(I)求证：$PB\perp$ 平面 AMN；

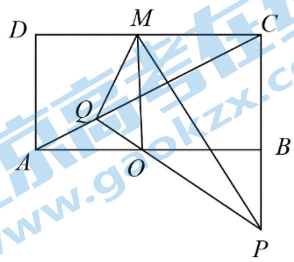
(Ⅱ)求二面角 $M-AN-B$ 的余弦值；

(III)求点 D 到平面 AMN 的距离.

18．(本小题满分 10 分)

用坐标法解答以下问题

如图，已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，O,M 分别为 AB,CD 的中点，P 为 CB 延长线上一点，________.



从①②中任选其一，补充在横线中并作答，如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分，

①连接 PO 并延长交 AC 于点 Q，求证：$\angle QMO=\angle PMO$；

②取 AC 上一点 $Q(AQ<CQ)$，使得 $\angle QMO=\angle PMO$，求证：P,O,Q 三点共线.

第Ⅱ卷(共 50 分)

四、填空题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

19．一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 2km 的圆形区域内。已知小岛中心位于轮船正西 4km 处，陆上的港口位于小岛中心正北 3km 处，如果轮船沿直线返航，那么它是否有触礁危险？________(填“是”或“否”)

20．已知点 $A(2,1)$，$B(3,4)$，$C(0,2)$，直线 $l:y=k(x-1)$，若直线 l 与线段 AB 有公共点，则 k 的最大值为________；若直线 l 与线段 BC 有公共点，则 k 的取值范围是________.

21．已知单位向量e_1,e_2,e_3，两两夹角均为$\frac{\pi}{3}$，则$|e_1+e_2|=$________；$|e_1+e_2+e_3|$的最小值为________.

22．已知四棱锥$P-ABCD$中，底面四边形$ABCD$是边长为$\sqrt{2}$的正方形，$PD\perp AC$，设$PD=m$．记直线PB与平面$ABCD$所成角为α，二面角$P-AC-B$的大小为β．给出下列四个结论：

①若$\beta<\frac{\pi}{2}$，则$m>1$；　　②若$m>1$，则$\beta<\frac{\pi}{2}$；

③$\alpha<\angle RBA$；　　④$\beta>\angle PAB$

其中所有正确结论的序号是________.

五、解答题(本大题共 3 小题，共 34 分)

23．(本小题满分 10 分)

平面直角坐标系中，已知圆C的圆心是$(0,1)$，半径是 1，直线l的方程为$x-2y+m=0$，点$A(-1,0)$.

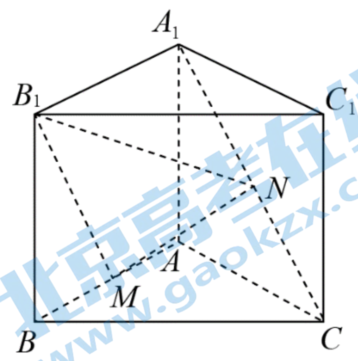
(I)若l与圆C相切，求m的值；

(Ⅱ)若l经过点A，求直线l与圆的交点的坐标；

(III)若过点A的直线l'截得圆C的弦长$|MN|\geq\sqrt{3}$，求l'的斜率的取值范围.

24．(本小题满分 14 分)

如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=\sqrt{5}$，$AB=AA_1=2$，M为棱AB的中点，N是A_1C的中点.



(I)证明：$MN//$平面BCC_1B_1；

(Ⅱ)求直线A_1C与平面B_1MN所成角的正弦值；

(III)棱AC上是否存在点P，使得点P在平面B_1MN内？若存在，求$\frac{AP}{AC}$的值；若不存在，说明理由。

25．(本小题满分 10 分)

对于空间向量m，定义$\|m\|=\max\{|a|,|b|,|c|\}$，其中$\max\{x,y,z\}$表示$x,y,z$这三个数的最大值。

(I)已知$a=\left(6,\frac{11}{2},1\right)$，$b=\left(x,\frac{1}{2}x,-x\right)$.

①写出$\|a\|$，写出$\|b\|$ (用含x的式子表示)；

②当$0\leq x\leq 4$，写出$\|a-b\|$的最小值及此时x的值；

(Ⅱ)设$a=(x_1,y_1,z_1)$，$b=(x_2,y_2,z_2)$，求证：$\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$；

(III)在空间直角坐标系$O-xyz$中，$A(2,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,6)$，点P是以O为球心，1 为半径的

球面上的动点，点 Q 是 $\triangle ABC$ 内部的动点，直接写出 $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ 的最小值及相应的点 P 的坐标.

参考答案

第 I 卷（共 100 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	C	B	A	A	C	B	D

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

题号	11	12	13	14	15
答案	$\frac{3}{4}\pi$	2	$\frac{2}{5}$	$y=\frac{1}{4}x+1$ 或 $y=-\frac{1}{4}x+1$	②③④

三、解答题（共 35 分）

16．解：（I）当 $t=3$ 时，$\cos<a,b>=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

因为 $<a,b>\in[0,\pi]$，所以 $<a,b>=\frac{\pi}{3}$.

（II）因为 $(2a+b)(2a-b)=4|a|^2-|b|^2$

$$=8-\left(t^2+9\right)=-t^2-1<0$$

因此，对任意 $t\in\mathbf{R}$， $2a+b$ 与 $2a-b$ 不垂直

（III）由题意知，$\lambda a+b//\left(0,0,1\right)$

即存在 $k\in\mathbf{R}$， 使得 $\lambda a+b=k\left(0,0,1\right)$

则 $(\lambda+3,t,-\lambda)=(0,0,k)$

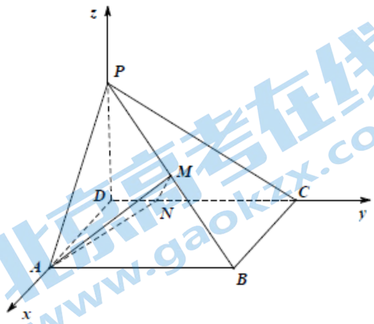
即 $\begin{cases}\lambda+3=0\\ t=0\\ -\lambda=k\end{cases}$ ，解得 $\lambda=-3$， $t=0$

17．解：(I) 因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为矩形，因此 PD,AD,CD 两两垂直，以 D 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

$P(0,0,2\sqrt{3})$， $B(2,4,0)$， $A(2,0,0)$， $M(1,2,\sqrt{3})$， $N(0,1,0)$

$\overrightarrow{AN}=(-2,1,0)$， $\overrightarrow{AM}=(-1,2,2\sqrt{3})$， $\overrightarrow{PB}=(2,4,-2\sqrt{3})$.

因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=2\times(-1)+4\times2+(-2\sqrt{3})\times2\sqrt{3}=0$，



所以 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AM}$，即 $PB\perp AN$

因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AN}=2\times(-2)+4\times1+(-2\sqrt{3})\times0=0$

所以 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AN}$，即 $PB\perp AN$

又因为 $AMI\,AN=A$，因此 $PB\perp$ 平面 AMN

（II）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $n=(0,0,1)$ 为平面 ANB 的一个法向量

由（I）知 $\overrightarrow{PB}=\left(2,4,-2\sqrt{3}\right)$ 为平面 AMN 的一个法向量。

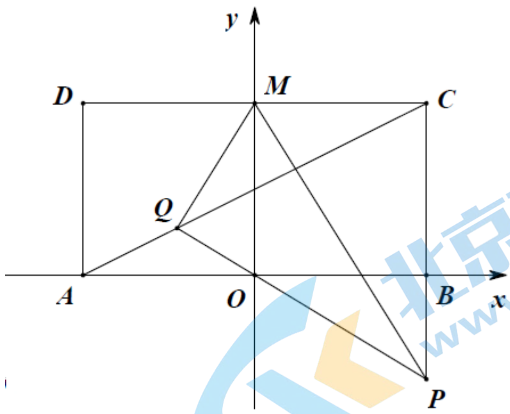
$$\cos<\overrightarrow{PB},n>=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot n}{|PB|\cdot|n|}=\frac{(2,4,-2\sqrt{3})\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+4^2+(-2\sqrt{3})^2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

设所求角为 θ，由图知 θ 为锐角，因此 $\cos\theta\frac{\sqrt{6}}{4}$

（III）点 D 到平面 AMN 的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|PH|}\right|=\left|\frac{(2,0,0)\cdot(2,4,-2\sqrt{3})}{\sqrt{2^2+4^2+(-2\sqrt{3})^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

18．解：以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OM}$ 的方向为 x,y 轴正方向建立平面直角坐标系.

图中直线 AC 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.



选择①：设 $P(1,k)$，

则直线 POQ 的方程为 $y=kx$，

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\\ y=kx\end{cases}$

得 $Q\left(\frac{1}{2k-1},\frac{k}{2k-1}\right)$.

所以 $k_{MQ}=\dfrac{\frac{k}{2k-1}-1}{\frac{1}{2k-1}}=1-k$

又 $k_{MP}=\frac{k-1}{1}=k-1$，所以 $k_{MP}=-k_{MQ}$.

所以 $\angle QMO=\angle PMO$.

选择②：设 $Q\left(t,\frac{t+1}{2}\right)$，

则 $k_{MQ}=\dfrac{\dfrac{t+1}{2}-1}{t}=\dfrac{t-1}{2t}$

因为 $\angle QMO=\angle PMO$，所以 $k_{MP}=-k_{MQ}=\dfrac{1-t}{2t}$

所以直线 PM 的方程为 $y=\dfrac{1-t}{2t}x+1$

所以 $P\left(1,\dfrac{t+1}{2t}\right)$

所以 $k_{OP}=k_{OQ}=\dfrac{t+1}{2t}$，所以 P,O,Q 三点共线.

第Ⅱ卷（共 50 分）

四、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

题号	19	20	21	22
答案	否	2；$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$	$\sqrt{3}$；$\sqrt{2}$	①

五、解答题（共 34 分）

23．解：圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$．

（I）由题意知，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0-2\times1+m|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|m-2|}{\sqrt{5}}=1$

解得 $m=2+\sqrt{5}$ 或 $2-\sqrt{5}$

（Ⅱ）若直线 l 过点 A，则 $m=1$，直线 l 的方程为 $x-2y+1=0$．

联立直线 l 与圆 C 的方程，$\begin{cases}x-2y+1=0\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$，

解得交点坐标分别为（1,1)，（$-\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{5}$）

（Ⅲ）设直线 l' 斜率为 k，则直线 l' 的方程为 $y=k(x+1)$，即 $kx-y+k=0$．

设圆心 C 到直线 l' 的距离为 d'，有 $(d')^2+\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2=1$

因为 $|MN|\geq\sqrt{3}$，所以 $d'\leq\dfrac{1}{2}$.

解 $d'=\dfrac{|0-1+k|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\leq\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\leq k\leq\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

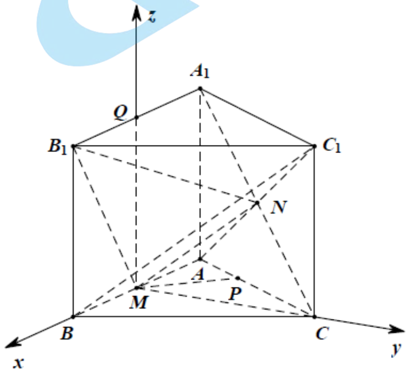
24．解：（I）证明：连接 AC_1,BC_1，由于 $AM=MB,AN=NC_1$，故 $MN//BC_1$

又因为 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$MN\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $MN//$ 平面 BCC_1B_1

（Ⅱ）如图，取 A_1B_1 中点 Q，由于 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，$MQ // AA_1$，因此 $MQ \perp$ 平面 ABC，又因为 $AC = BC$，所以 $MB \perp MC$，故 MB，MC，MQ 两两垂直，以 M 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MQ}$ 的方向为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $M-xyz$

则 $A_1(-1,0,2), C(0,2,0), B_1(1,0,2), M(0,0,0), N\left(-\dfrac{1}{2},1,1\right)$.

$\overrightarrow{A_1C} = (1,2,-2)$，$\overrightarrow{MB_1} = (1,0,2)$，$\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{1}{2},1,1\right)$



设平面 B_1MN 的法向量为 $n = (x, y, z)$，

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{MB_1} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}，即 \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -\dfrac{1}{2}x + y + z = 0 \end{cases}，取 \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

则 $n = (2,2,-1)$

设所求角为 θ，则 $\sin\theta = \left|\cos < n, \overrightarrow{A_1C} >\right| = \left|\dfrac{n \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|n| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|}\right|$

$$= \left|\frac{(2,2,-1)\cdot(1,2,-2)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right| = \frac{8}{9}$$

（Ⅲ）设 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} (0 \le \lambda \le 1)$，

则 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = (-1,0,0) + \lambda(1,2,0) = (\lambda-1, 2\lambda, 0)$

若点 P 在平面 B_1MN 内，则 $\overrightarrow{MP}$ 垂直于平面 B_1MN 的法向量 n

因此 $\overrightarrow{MP} \cdot n = (\lambda-1, 2\lambda, 0)\cdot(2,2,-1) = 6\lambda - 2 = 0$，解得 $\lambda = \dfrac{1}{3} \in [0,1]$，

故棱 AC 上是否存在点 P，使得点 P 在平面 B_1MN 内，此时 $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{1}{3}$

25．解：（Ⅰ）① $\|a\| = 6$，$\|b\| = |x|$；② $\|a-b\|_{\min} = 4$，此时 $x = 3$

（Ⅱ）$\|a+b\| = \max\{|x_1+x_2|, |y_1+y_2|, |z_1+z_2|\}$

$\leqslant \max\{|x_1|+|x_2|, |y_1|+|y_2|, |z_1|+|z_2|\}$

因为 $\|a\| = \max\{|x_1|, |y_1|, |z_1|\}$，$\|b\| = \max\{|x_2|, |y_2|, |z_2|\}$，

所以 $|x_1|, |y_1|, |z_1| \leqslant \|a\|$，$|x_2|, |y_2|, |z_2| \leqslant \|b\|$

所以 $\|a+b\| \leqslant \max\{\|a\|+\|b\|, \|a\|+\|b\|, \|a\|+\|b\|\} = \|a\|+\|b\|$

（III）$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|_{\min}=\frac{5}{11}$ $P\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right)$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。