绝密★启用前

天一大联考

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x^2-3x<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{x\mid 0<x<3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3\}$

2. 已知条件 $p:\alpha\neq\frac{\pi}{4}$，条件 $q:\tan\alpha\neq 1$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. -1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=m$，$AD=2$，$\angle ADC=120°$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=18$，则 $m=$

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2

5. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x-2y+4\geqslant 0,\\ x-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, $A(m,4\sqrt{2})\left(m>\frac{p}{2}\right)$ 为该抛物线上一点，且 $\cos\angle AFO=-\frac{1}{3}$（点 O 为坐标原点），则 $p=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

7. 海上渔业生产发展迅猛，我国自主研发的大型海洋养殖船纷纷下海. 网箱养殖人工创造适合鱼类生长的环境，一段时间内，研究人员发现网箱内氧的含量 H（单位：mg/L）与时间 t（单位：h）之间的关系为 $H(t)=H_0e^{-mt}$（H_0 为网箱内氧的初始含量且 $H_0>0$），且经过20 h后，网箱内氧的含量减少 $\frac{61}{125}H_0$. 若当网箱内氧的含量低于初始含量的 $\frac{2}{5}$ 时需要人工增氧，则大约经过（　　）h 后需要人工增氧.

参考数据：$\lg 2\approx 0.3$.

A. 39　　B. 33　　C. 31　　D. 27

8. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PO\perp$ 底面 $ABCD$ 于点 O，且 $PO=\sqrt{2}$，$\triangle PAB$ 和 $\triangle PCD$ 均是边长为 2 的等边三角形，则底面 $ABCD$ 的面积的取值范围是

A. $(2,4]$　　B. $[2,4]$　　C. $(2,3]$　　D. $[2,3]$

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，若 $S_4=S_8$，则下列说法错误的是

A. 若 $a_1<0$，则 $\{a_n\}$ 为递增数列　　B. 若 $d\neq 0$，则 $|a_9|>|a_6|$

C. 若 $a_4+a_{11}>0$，则 $d>0$　　D. 对任意正整数 n，有 $S_n\leq S_6$

10. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(-m,0)$ 平移后对应的函数为 $g(x)$，若 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $|m|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

11. 已知 $a=e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$, $c=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，则

A. $c>b>a$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$，右焦点为 F，直线 l_1, l_2 均过点 F 且互相垂直，l_1 与双曲线的右支交于 A, C 两点，l_2 与双曲线的左支交于 B 点，O 为坐标原点，当 A, O, B 三点共线时，$\frac{|FC|}{|AF|}=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

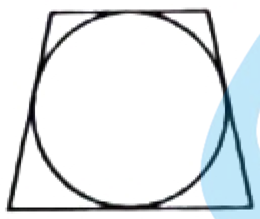
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若函数 $f(x)=2+\frac{a}{2^x-1}$ 的图象关于原点对称，则实数 $a=$ ________.

14. 已知向量$\overrightarrow{AB}=(2,t)$，$\overrightarrow{AC}=(a,4)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,3)$. 若$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，且$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，则 $a=$ ________.

15. 已知圆 B 的方程为 $x^2+y^2-4y=0$，P 是圆 B 上一动点，点 $A(2,0)$，M 为线段 PA 的中点，则$|BM|$的最小值为________.

16. 如图，有一半径为 1 的球形灯泡，要为其做一个上窄下宽的圆台形灯罩，要求灯罩对应的圆台的轴截面为球形灯泡对应的大圆的外切等腰梯形，则灯罩的表面积(不含下底面)至少为________.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b=4$ 且$\dfrac{b}{2c+a}=\dfrac{\cos(\pi-B)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)}$.

(Ⅰ)求 B；

(Ⅱ)求△ABC 面积的最大值.

18. (12 分)

已知函数$f(x)=ke^x+x^2(k\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若$f(x)$的图象在点$(\ln 2,f(\ln 2))$处的切线斜率为 $\ln\dfrac{3}{2}$，求 k 的值；

(Ⅱ)当 $k<0$ 时，判断$f(x)$在$(-\infty,0)$内有几个零点，并证明.

19. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_2=-\dfrac{63}{16}$，且 $S_{n+1}-a_1=\dfrac{3}{4}S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

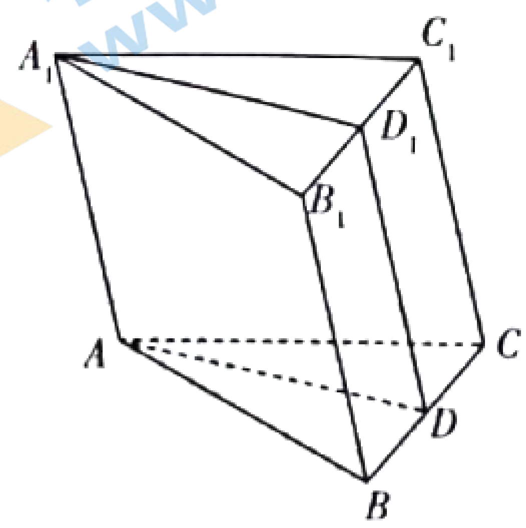
(Ⅱ)设数列$\{b_n\}$满足$\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{4-n}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

20. (12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面是边长为 $2a$ 的正三角形,侧棱 AA_1 的长为 $\sqrt{3}a$,D,D_1 分别是棱 BC,B_1C_1 的中点,平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 CBB_1C_1,且 $\angle ADD_1\neq 90°$.

(Ⅰ)求证:$BC\perp CC_1$;

(Ⅱ)若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积为 $(2\sqrt{3}+\sqrt{39})a^2$,求它的体积.



21. (12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$,求 a 的值;

(Ⅱ)若 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点,且 $f(x_0)<x_0^2-2a$ 恒成立,求 a 的取值范围.

22. (12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,焦距为 2,离心率为 $\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程.

(Ⅱ)已知点 G 的坐标为 $(4,0)$,是否存在直线 $l:x=t(|t|<a)$,使得对于 l 上任意一点 P(P 不在椭圆 E 上),若直线 PA_1 交椭圆 E 于另一点 M,直线 PA_2 交椭圆 E 于另一点 N,恒有 M,N,G 三点共线?若存在,求出 l 的方程;若不存在,请说明理由.

天一大联考

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查集合的概念与运算.

解析　$A=\{-1,0,1,2,3\}$,$B=\{x|0<x<3\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析　因为当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时,$\tan\alpha=1$,所以由 p 推不出 q,所以充分性不成立;当 $\tan\alpha\neq1$ 时,$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$ 成立,所以必要性成立. 所以 p 是 q 的必要不充分条件.

3. 答案　C

命题意图　本题考查三角恒等变换.

解析　因为 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,所以 $\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=-\sqrt{3}$,解得 $\tan\alpha=0$,所以 $\sin\alpha=0$,$\cos\alpha=\pm1$. 所以 $\cos 2\alpha=1$.

4. 答案　B

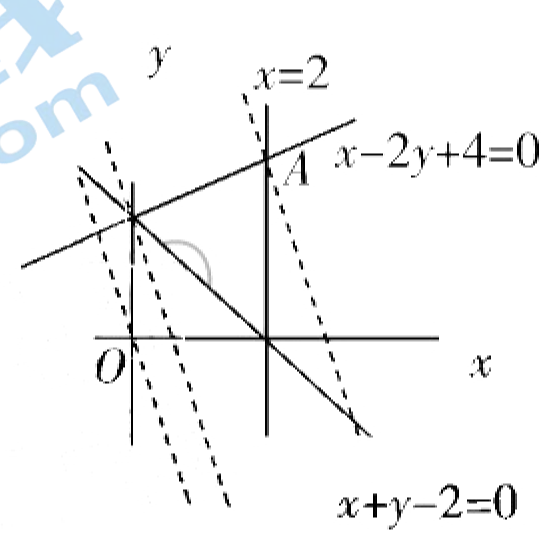
命题意图　本题考查向量的数量积.

解析　因为 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,所以 E 为边 BC 的中点. $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=m^2+\frac{1}{2}m\times2\cos60^\circ=18$,解得 $m=4$(负值舍去).

5. 答案　C

命题意图　本题考查线性规划.

解析　作出不等式组表示的平面区域,如图中阴影部分所示,作直线 $y=-3x$ 并平移,可知当直线经过点 A 时,z 取得最大值. 由 $\begin{cases}x=2\\x-2y+4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 即 $A(2,3)$,故 $z_{\max}=9$.



6. 答案　C

命题意图　本题考查抛物线的方程与性质.

解析　过 A 作 $AH\perp x$ 轴于 H,由抛物线的定义可知 $|AF|=m+\frac{p}{2}$,又 $|FH|=m-\frac{p}{2}$,所以在 Rt$\triangle AFH$ 中,

$\cos\angle AFH=\dfrac{m-\frac{p}{2}}{m+\frac{p}{2}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $m=p$，将 $A(p,4\sqrt{2})$ 代入抛物线方程得 $p=4$.

7. **答案** D

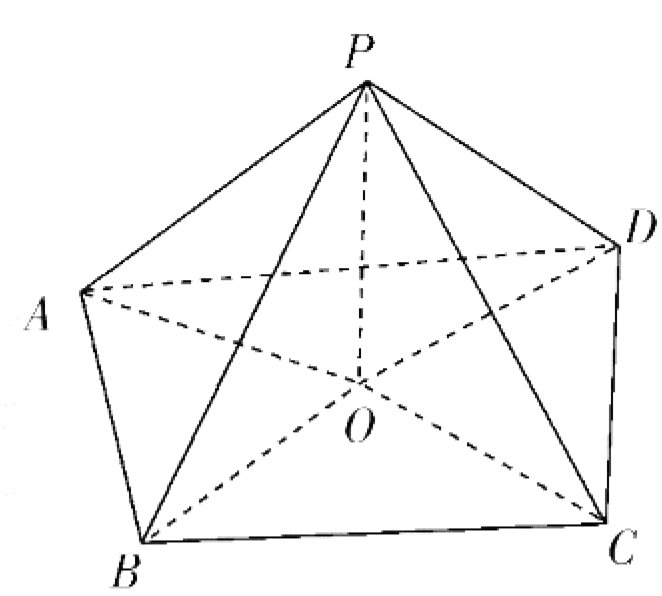
命题意图 本题考查函数的应用及对数运算.

解析 根据题意，得 $\frac{64}{125}H_0=H_0e^{-20m}$，所以 $e^{-m}=\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{1}{20}}$，所以 $H(t)=H_0\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}$. 由 $H(t)<\frac{2}{5}H_0$，得 $H_0\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}<\frac{2}{5}H_0$，即 $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{t}{20}}<\frac{2}{5}$，两边取对数并整理得 $t>\frac{20(\lg 2-\lg 5)}{\lg 64-\lg 125}=\frac{20(2\lg 2-1)}{9\lg 2-3}\approx 26\frac{2}{3}$，故大约经过 27 h 后需要人工增氧.

8. **答案** A

命题意图 本题考查解三角形在立体几何中的应用.

解析 因为 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PCD$ 均是边长为 2 的等边三角形，$PO=\sqrt{2}$，易得 $OA=OB=OC=OD=\sqrt{2}$，且 $\angle AOB=\angle COD=\frac{\pi}{2}$. 设 $\angle BOC=\theta$，则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}OA\cdot OB+\frac{1}{2}OC\cdot OD+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\theta+\frac{1}{2}OA\cdot OD\sin(\pi-\theta)=2+2\sin\theta$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，故 $\sin\theta\in(0,1]$，所以 $S_{ABCD}\in(2,4]$.



9. **答案** D

命题意图 本题考查数列的综合应用.

解析 对于 A，由 $S_4=S_8$ 得 $a_5+a_6+a_7+a_8=0$，又 $a_5+a_8=a_7+a_6$，所以 $a_5+a_8=a_7+a_6=0$，得 $d=-\frac{2}{11}a_1$，因为 $a_1<0$，所以 $d>0$，A 正确；对于 B，因为 $|a_9|>|a_6|$ 等价于 $(a_9)^2>(a_6)^2$，等价于 $(a_9+a_6)(a_9-a_6)>0$，即 $3d(a_5+d+a_8+d)>0$，因为 $a_5+a_8=0$，所以有 $6d^2>0$，B 正确；对于 C，$a_4+a_{11}=a_5-d+a_8+3d=2d>0$，C 正确；对于 D，因为 $d=-\frac{2}{11}a_1$，若 $a_1<0$，则 $d>0$，又 $a_7+a_6=0$，所以 $a_7=-a_6>0$，S_6 最小，若 $a_1>0$，则 S_6 最大，D 错误.

10. **答案** A

命题意图 本题考查三角函数的性质及图象变换.

解析 由题可知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$g(x)$ 的解析式为 $g(x)=2\sin\left(2x+2m+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$2m\leqslant 2x+2m+\frac{\pi}{3}\leqslant 2m+\frac{5\pi}{6}$. 若 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2m,\\ 2m+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ 或

$\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2m,\\ 2m+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant m\leqslant-\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant m\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $|m|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

11. **答案** A

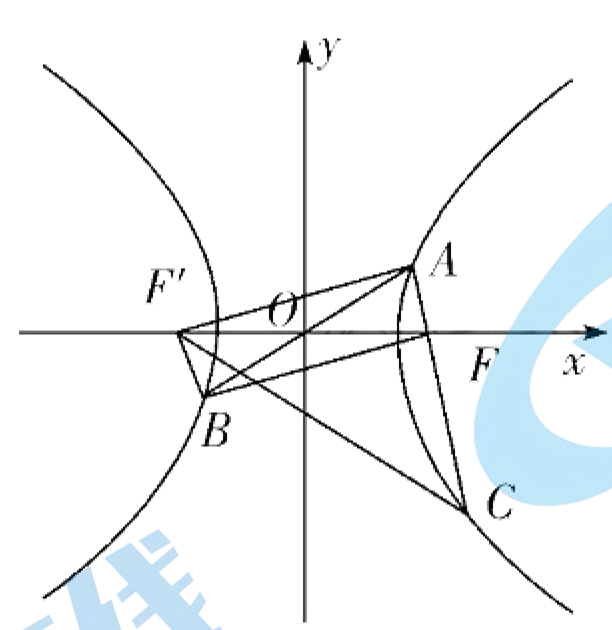
命题意图 本题考查构造函数，利用导数研究函数的性质.

解析 $b=e^{-\frac{\pi}{6}}\sin\frac{\pi}{6}$，$c=2e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}$，设 $f(x)=\frac{\sin x}{e^x},x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，因为 $\cos x\geqslant\sin x$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，因为 $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$，所以 $e^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}<e^{-\frac{\pi}{6}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}<e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}<2e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

12. **答案** B

命题意图 本题考查双曲线的定义与性质，及直线与双曲线的位置关系.

解析 如图，设双曲线的左焦点为 F'，双曲线的半焦距为 $c(c>0)$，则焦距 $|F'F|=2c$. 设 $|AF|=m(m>0)$，$|FC|=tm(t>0)$，连接 AF',BF',CF'. 根据双曲线的对称性可知 $|OA|=|OB|$，$|OF|=|OF'|$，又 $BF\perp AC$，所以四边形 $AFBF'$ 为矩形. 由双曲线的定义可知 $|AF'|=m+2a$，$|F'C|=|FC|+2a=tm+2a$. 又 $|AC|=|AF|+|FC|=(t+1)m$，所以在 $\text{Rt}\triangle AF'C$ 中，$|F'C|^2=|AF'|^2+|AC|^2$，即 $(tm+2a)^2=(m+2a)^2+[(t+1)m]^2$，解得 $m=\frac{2a(t-1)}{t+1}$. 在 $\text{Rt}\triangle AF'F$ 中，$|F'F|^2=|AF'|^2+|AF|^2$，即 $4c^2=(m+2a)^2+m^2$，即 $4c^2=2m^2+4am+4a^2$，所以 $4c^2=2\left[\frac{2a(t-1)}{t+1}\right]^2+4a\times\frac{2a(t-1)}{t+1}+4a^2$，即 $\frac{4c^2}{4a^2}=2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2+2\times\frac{t-1}{t+1}+1$. 因为 $\frac{4c^2}{4a^2}=\frac{5}{2}$，代入上式解得 $t=3$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 4

命题意图 本题考查函数的奇偶性.

解析 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-1)=-f(1)$，即 $2+\frac{a}{2^{-1}-1}=-\left(2+\frac{a}{2^1-1}\right)$，解得 $a=4$.

14. **答案** 22

命题意图 本题考查向量平行、垂直的定义.

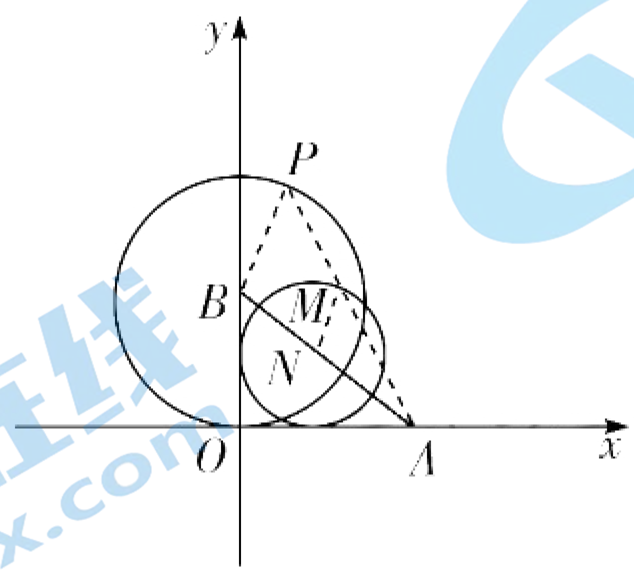
解析 因为 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$，所以 $2\times 3+t=0$，得 $t=-6$. 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(a,4)+(-1,3)=(a-1,7)$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，

所以 $2(a-1)+7t=0$,解得 $a=22$.

15. **答案** $\sqrt{2}-1$

命题意图 本题考查圆的方程及性质,圆与圆的位置关系.

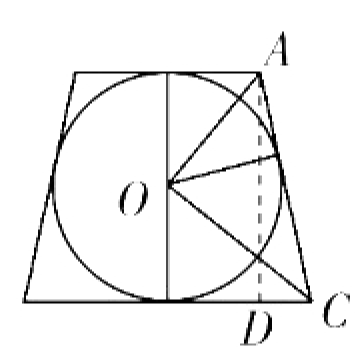
解析 圆 B 的方程可化为 $x^2+(y-2)^2=4$,可知 $B(0,2)$,如图,取线段 AB 的中点 $N(1,1)$,连接 MN,又 M 为线段 PA 的中点,所以 $|MN|=\frac{1}{2}|BP|=1$,所以 M 点在以 $N(1,1)$ 为圆心,1 为半径的圆上,圆 N 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,圆 B 与圆 N 相交,$|BM|$ 的最小值为 $|BN|-1=\sqrt{2}-1$.



16. **答案** $2(1+\sqrt{2})\pi$

命题意图 本题考查圆台的侧面积的计算及基本不等式的应用.

解析 如图,过 A 作 AD 垂直于下底于 D. 设球心为 O,圆台的上底面半径为 r,下底面半径为 R,母线长为 l,由平面几何知识可知 $l=R+r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC^2=CD^2+AD^2$,即 $(R+r)^2=(R-r)^2+2^2$,所以 $Rr=1$. 灯罩的表面积 $S=S_{圆台侧}+S_{上底}=\pi(R+r)l+\pi r^2=\pi(R+r)^2+\pi r^2=\pi(R^2+2Rr+2r^2)=2\pi+\pi(R^2+2r^2)\geqslant 2\pi+\pi(2\sqrt{R^2\times 2r^2})=2(1+\sqrt{2})\pi$,等号当且仅当 $R^2=2r^2$ 且 $Rr=1$,即 $R=\sqrt[4]{2}$,$r=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$时取得.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 (Ⅰ)由已知可得 $b\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=(2c+a)\cos(\pi-B)$,

所以 $b\cos A=(2c+a)(-\cos B)$. ………………………………………………………………(1 分)

由正弦定理可得 $\sin B\cos A=-(2\sin C+\sin A)\cos B$,

即 $\sin(A+B)=-2\sin C\cos B$. ………………………………………………………………(3 分)

因为 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

又 $\sin C>0$,所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………(4 分)

又 $B\in(0,\pi)$,

所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

即 $b^2=a^2+c^2+ac$, ………………………………………………………………(6 分)

又 $b=4$,

所以 $16=a^2+c^2+ac\geqslant 2ac+ac=3ac$,

即 $ac\leqslant\frac{16}{3}$,当且仅当 $a=c$ 时取等号. …………(8 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …………(10 分)

18. **命题意图** 本题考查导数的几何意义及导数在求函数零点问题中的应用.

解析 (Ⅰ)由题可知 $f'(x)=ke^x+2x$, …………(1 分)

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(\ln 2,f(\ln 2))$ 处的切线斜率为 $f'(\ln 2)=2k+2\ln 2=\ln\frac{3}{2}$, …………(3 分)

即 $2k=\ln\frac{3}{2}-2\ln 2=\ln\frac{3}{8}$,

所以 $k=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$. …………(4 分)

(Ⅱ)$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有唯一的零点. …………(5 分)

证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有唯一的零点等价于方程 $ke^x+x^2=0(k<0)$ 有唯一负实根, …………(7 分)

等价于方程 $k=-\frac{x^2}{e^x}(k<0)$ 有唯一负实根,等价于直线 $y=k(k<0)$ 与曲线 $g(x)=-\frac{x^2}{e^x}$ 在 $x<0$ 时有唯一的交点. …………(9 分)

因为 $g'(x)=\frac{x^2-2x}{e^x}=\frac{x(x-2)}{e^x}$, …………(10 分)

所以当 $x<0$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,

所以 $g(x)<g(0)=0$,且 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$, …………(11 分)

所以直线 $y=k(k<0)$ 与曲线 $g(x)=-\frac{x^2}{e^x}(x<0)$ 有唯一的交点,结论得证. …………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查等比数列的定义及错位相减法.

解析 (Ⅰ)因为 $S_{n+1}-a_1=\frac{3}{4}S_n$,

所以当 $n=1$ 时 $S_2-a_1=\frac{3}{4}a_1$. …………(1 分)

因为 $S_2=-\frac{63}{16}$,所以 $a_1=-\frac{9}{4}$,$S_{n+1}+\frac{9}{4}=\frac{3}{4}S_n$,即 $4S_{n+1}=3S_n-9$. …………(2 分)

所以 $4S_n=3S_{n-1}-9(n\geqslant 2)$,两式相减可得 $4a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$. …………(3 分)

又 $a_1=-\frac{9}{4}$,$4(a_1+a_2)=3a_1-9$,所以 $a_2=-\frac{27}{16}$,则 $4a_2=3a_1$. …………(4 分)

所以 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{9}{4}$ 为首项,$\frac{3}{4}$ 为公比的等比数列.

因此 $a_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$. …………(5 分)

(Ⅱ)由题意得 $b_n=(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$, …………(6 分)

则 $T_n=(-3)\times\frac{3}{4}+(-2)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$,

$\frac{3}{4}T_n=(-3)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-2)\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. ………………………………………………（8 分）

两式相减,得 $\frac{1}{4}T_n=(-3)\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+(-4)\times\frac{3}{4}-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}-3-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ ………………………………………………（10 分）

$=-n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,

所以 $T_n=-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. ………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明及几何体体积的计算.

解析 （Ⅰ）如图,过点 A 作 $AO\perp DD_1$ 交 DD_1 于点 O.

$\because$ 平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 CBB_1C_1,平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $CBB_1C_1=DD_1$,$AO\perp DD_1$,$AO\subset$ 平面 ADD_1A_1,

$\therefore AO\perp$ 平面 CBB_1C_1. ………………………………………………（2 分）

又 $BC\subset$ 平面 CBB_1C_1,$\therefore AO\perp BC$.

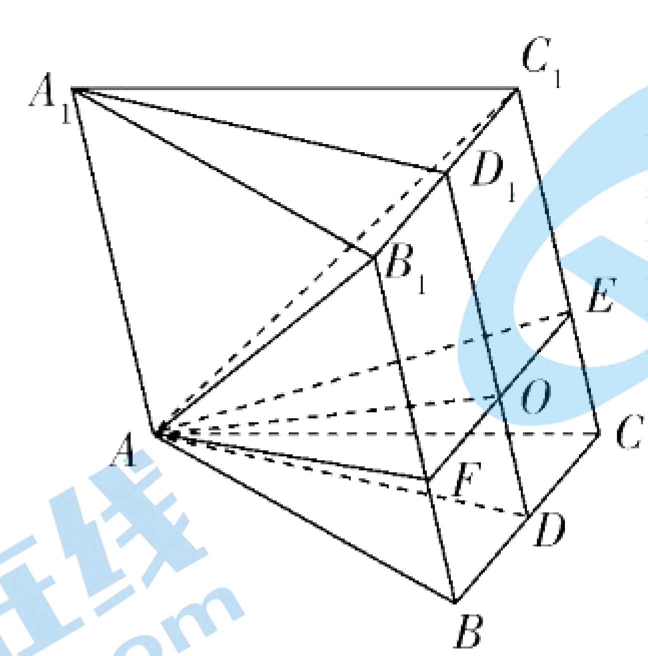
$\because$ $\triangle ABC$ 是正三角形,D 为 BC 的中点,$\therefore BC\perp AD$. ………………………………（3 分）

$\because AO\cap AD=A$,$AO,AD\subset$ 平面 ADD_1A_1,

$\therefore BC\perp$ 平面 ADD_1A_1.

又 $DD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1,$\therefore BC\perp DD_1$. ………………………………（4 分）

易知 $DD_1/\!/CC_1$,$\therefore BC\perp CC_1$. ………………………………（5 分）



（Ⅱ）由（Ⅰ）知四边形 CBB_1C_1 为矩形,

如图,过 O 作 $OE\perp CC_1$,交 CC_1 于 E,连接 AE.

易知四边形 $CDOE$ 为矩形,$OE=CD=\frac{1}{2}BC=a$. ………………………………（6 分）

由（Ⅰ）知 $AO\perp$ 平面 CBB_1C_1,所以 $AO\perp CC_1$,

又 $AO\cap OE=O$,所以 $CC_1\perp$ 平面 AOE,所以 $CC_1\perp AE$. ………………………………（7 分）

同理过 O 作 $OF\perp BB_1$,交 BB_1 于 F,连接 AF,可证 $AF\perp BB_1$.

由 $OE=OF$,可知 $AE=AF$. ………………………………………………（8 分）

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积 $S=S_{四边形CBB_1C_1}+2S_{四边形ACC_1A_1}=2a\times\sqrt{3}a+2\sqrt{3}a\times AE=(2\sqrt{3}+\sqrt{39})a^2$,

所以 $AE=\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$. ………………………………………………………………………………… (9 分)

在 $Rt\triangle AOE$ 中,$OE=a$,$AE=\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$,所以 $AO=\dfrac{3}{2}a$. ………………………………………………… (10 分)

连接 AC_1,AB_1. 四棱锥 $A-CBB_1C_1$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{四边形CBB_1C_1}\times AO=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}a^2\times\dfrac{3}{2}a=\sqrt{3}a^3$,

又 $V=\dfrac{2}{3}V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}$,所以$V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. ……………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)由题可知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=2x-2+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-2x+a}{x}$. ……………………………………………………………………… (1 分)

$f(x)$的单调递减区间为$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$等价于$f'(x)\leqslant0$ 的解集为$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$,

即 $2x^2-2x+a\leqslant0$ 的解集为$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$. ……………………………………………………………… (2 分)

所以方程 $2x^2-2x+a=0$ 的两个根分别为$\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$, ……………………………………………………… (3 分)

由根与系数的关系可得$\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}$,所以 $a=\dfrac{3}{8}$. ……………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)若 x_0 是$f(x)$的极大值点,则$f'(x)=0$ 至少有一正根,

即方程 $2x^2-2x+a=0$ 至少有一正根. ……………………………………………………………………… (5 分)

若 $a=0$,则方程 $2x^2-2x+a=0$ 的正根为 $x=1$,

因为当 $0<x<1$ 时 $f'(x)<0$,当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$,

所以此时 $f(x)$只有极小值点 1,不符合题意. ……………………………………………………………… (6 分)

若 $a<0$,则方程 $2x^2-2x+a=0$ 有一正根和一负根,设为 α,β,且 $\alpha>0,\beta<0$,

则 $2x^2-2x+a=2(x-\alpha)(x-\beta)$.

因为当 $0<x<\alpha$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>\alpha$ 时,$f'(x)>0$,所以此时 $f(x)$只有极小值点 α,不符合题意. … (7 分)

若 $a>0$,由题可知方程 $2x^2-2x+a=0$ 应有两个不等的正根,设为 x_1,x_2,其中 $x_1<x_2$,

则$\begin{cases}\Delta=4-8a>0,\\ \dfrac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… (8 分)

所以 $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x+a}{x}=\dfrac{2(x-x_1)(x-x_2)}{x}$.

列表如下:

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 x_1 是极大值点,x_2 是极小值点,则 $x_0=x_1$. ……………………………………………………… (9 分)

由 $0<x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=1$，得 $0<x_1<\frac{1}{2}$.

由题可知 $f(x_0)=x_0^2-2x_0+a\ln x_0<x_0^2-2a$，即 $a\ln x_0-2x_0+2a<0$ 当 $0<x_0<\frac{1}{2}$时恒成立. ………… (10 分)

令 $h(x)=a\ln x-2x+2a,0<x<\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=\frac{a-2x}{x}=\frac{2\left(\frac{a}{2}-x\right)}{x}$.

因为 $0<a<\frac{1}{2}$，所以 $0<\frac{a}{2}<\frac{1}{4}$.

所以当 $0<x<\frac{a}{2}$时，$h'(x)>0$，当 $x>\frac{a}{2}$时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}+a<0$，……… (11 分)

解得 $0<a<\frac{2}{\mathrm{e}}$，又 $0<a<\frac{1}{2}$，所以此时 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质及直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）设椭圆 E 的焦距为 $2c(c>0)$，则 $2c=2$，所以 $c=1$，

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2$. ………………………………………………………… (2 分)

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b^2=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… (4 分)

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

假设存在直线 $l:x=t(|t|<a)$满足题设条件，则 $|t|<2$. 设 $P(t,y_0)$，易知直线 MN 的斜率存在.

因为 M,N,G 三点共线，所以可设直线 MN 的方程为 $y=k(x-4)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. ……………… (5 分)

将直线 MN 的方程与椭圆方程联立消去 y 并整理得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ………………………………………………………… (7 分)

因为 P,M,A_1 三点共线，所以 $\frac{y_0}{t+2}=\frac{y_1}{x_1+2}$. ①

同理 P,N,A_2 三点共线，所以 $\frac{y_0}{t-2}=\frac{y_2}{x_2-2}$. ② ………………………………………………… (8 分)

当 $y_0=0$ 时，$y_1=y_2=0$，式子①②恒成立.

当 $y_0\neq 0$ 时，①②平方相除得 $\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}=\frac{3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)(x_2-2)^2}{3\left(1-\frac{x_2^2}{4}\right)(x_1+2)^2}=\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$.

设 $\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2=\lambda$，则 $(\lambda-1)x_1x_2+2(\lambda+1)(x_1+x_2)+4(\lambda-1)=0$. ……………………………… (10 分)

将 x_1x_2，x_1+x_2 的值代入上式，得 $(\lambda-1)(64k^2-12)+64(\lambda+1)k^2+4(\lambda-1)(3+4k^2)=0$，即 $(9\lambda-1)k^2=0$，

所以当 $\lambda=\frac{1}{9}$时，上式恒成立，从而解得 $t=1$ 或 4（舍去）.

故存在直线 $l:x=1$ 满足题设条件. ………………………………………………………… (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。