2023 北京五中高二（下）期末

数　　学

一、单选题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x||x|\le 2\}$，那么 $A\cap B$ 等于（　）

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$　　C. $\{x|1<x\le 2\}$　　D. $\{x|2\le x<3\}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=3-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A. $\sqrt{10}$　　B. 5　　C. 7　　D. 25

3. $(x-2y)^4$ 的展开式中含 x^2y^2 的项的系数为（　）

A. 24　　B. -24　　C. 6　　D. -6

4. 关于向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，下列命题中正确的是（　）

A. 若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}=\vec{b}$　　B. 若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，$\vec{b}\,//\,\vec{c}$，则 $\vec{a}\,//\,\vec{c}$

C. 若 $\vec{a}=-\vec{b}$，则 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$　　D. 若 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则 $\vec{a}>\vec{b}$

5. 布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达·芬奇方砖，在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案（如图 1），把三片这样的达·芬奇方砖形成图 2 的组合，这个组合表达了图 3 所示的几何体．若图 3 中每个正方体的棱长为 1，则点 A 到平面 QGC 的距离是（　）

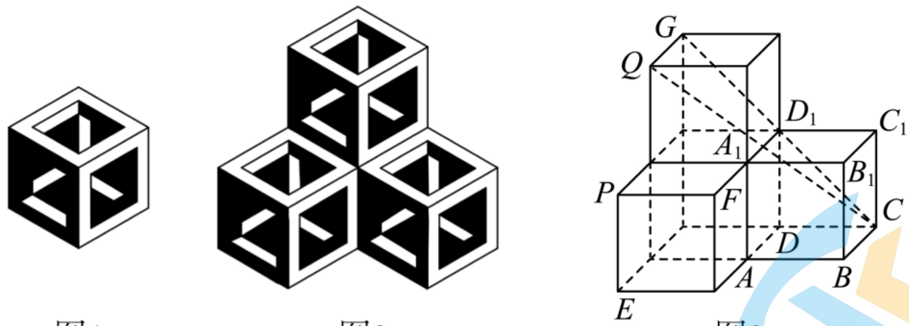


图1　　图2　　图3

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 点 F 是抛物线 $x^2=8y$ 的焦点，A 为双曲线 C：$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{b}=1$ 的左顶点，直线 AF 平行于双曲线 C 的一条渐近线，则实数 b 的值为（　）

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

7. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle A=60°$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，若 $b+c=6$，则 $a=$（　）

A. $2\sqrt{6}$　　B. 5　　C. $\sqrt{30}$　　D. $2\sqrt{7}$

8. 已知函数 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $1<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$ 恒成立，设 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right),b=f(2),c=f(3)$，则 a,b,c 的大小关系为（　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

9. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-cn\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$. 则“$c\le 2$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=f(x)\}$，若对于任意 $(x_1,y_1)\in M$，存在 $(x_2,y_2)\in M$，使得 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 成立，则称集合 M 是“Ω 集合”. 给出下列 5 个集合：

①$M=\left\{(x,y)\middle|y=\frac{1}{x}\right\}$；②$M=\left\{(x,y)\middle|y=\frac{x-1}{\mathrm{e}^x}\right\}$；③$M=\left\{(x,y)\middle|y=\sqrt{1-x^2}\right\}$；

④$M=\left\{(x,y)\middle|y=x^2+2x+2\right\}$；⑤$M=\{(x,y)|y=\cos x+\sin x\}$.

其中是“Ω 集合”的所有序号是（　）

A. ②③　　B. ①④⑤　　C. ③⑤　　D. ①②④

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x\ (x\le 1)\\ \lg(x-1)(x>1)\end{cases}$，则 $f(f(1))=$______.

12. 能够说明“若 $0<a<b<c$，则 $a<bc$”是假命题的一组实数 a,b,c 的值依次为__________.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2,n\in\mathbf{N}^*$，若 $a_7=16,a_3a_5=4$，则 a_3 的值为________.

14. 设 F 是抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，A,B 是抛物线上的两点，线段 AB 的中点 P 的坐标为 (m,n)，若 $|AF|+|BF|=5$，则实数 m 的值为________.

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>0$，且 ${a_{n+1}}^2-a_{n+1}=a_n$，给出下列四个结论：

①对于任意的 $n\ge 3$，都有 $a_n\ge 2$；

②对于任意 $a_1>0$，数列 $\{a_n\}$ 不可能为常数列；

③若 $0<a_1<2$，则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列；

④若 $a_1>2$，则当 $n\ge 2$ 时，$2<a_n<a_1$.

其中所有正确结论的序号为____________.

三、解答原（第 16-19、21 题 14 分，第 20 题 15 分）

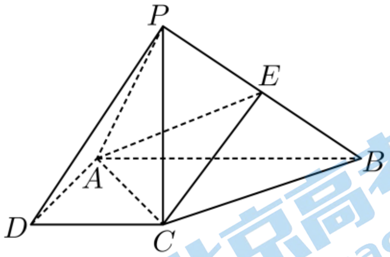
16. 已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 同时满足下列四个条件中的三个：① $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$；②

$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象可以由$y=\sin x-\cos x$的图像平移得到；③相邻两条对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$；④最大值为2.

（1）请指出这三个条件，并说明理由；

（2）若曲线$y=f(x)$的对称轴只有一条落在区间$[0,m]$上，求m的取值范围.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PC\perp$底面$ABCD$，四边形$ABCD$是直角梯形，$AD\perp DC$，$AB//DC$，$PC=AB=2AD=2CD=2$，点E在棱PB上.



（1）证明：平面$EAC\perp$平面PBC；

（2）当$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EP}$时，求二面角$P-AC-E$的余弦值.

18. 某单位有A，B两家餐厅提供早餐与午餐服务，甲、乙两人每个工作日早餐和午餐都在单位用餐，近100个工作日选择餐厅用餐情况统计如下（单位：天）：

选择餐厅（早餐，午餐）	（A，A）	（A，B）	（B，A）	（B，B）
甲	30	20	40	10
乙	20	25	15	40

假设用频率估计概率，且甲、乙选择餐厅用餐相互独立.

（1）估计一天中甲选择2个餐厅用餐的概率；

（2）记X为一天中甲用餐选择的餐厅的个数与乙用餐选择的餐厅的个数之和，求X的分布列和数学期望E（X）；

（3）判断甲、乙两人在早餐选择A餐厅用餐的条件下，哪位更有可能在午餐选择B餐厅用餐？说明理由.

19. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，$|A_1A_2|=4$，椭圆$E$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）过$D(1,0)$作直线l与椭圆E交于不同的两点M，N，其中l与x轴不重合，直线A_1M与直线$x=\dfrac{5}{2}$交于点P，判断直线A_2N与DP的位置关系，并说明理由.

20. 已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，$g\left(x\right)=\ln\left(x+a\right)$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）设 $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$，请判断 $\varphi\left(x\right)$ 是否存在极值？若存在，求出极值；若不存在，说明理由；

（3）当 $a=0$ 时，若对于任意 $s>t>0$，不等式 $g\left(s\right)-g\left(t\right)>k\left(\dfrac{1}{f\left(s\right)}-\dfrac{1}{f\left(t\right)}\right)$ 恒成立，求 k 的取值范围.

21. 已知各项均为整数的数列 $A_N: a_1, a_2, \cdots, a_N$ $N\geq 3, N\in\mathbf{N}^*$.满足 $a_1a_N<0$，且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，都有 $|a_i-a_{i-1}|\leqslant 1$.记 $S(A_N)=a_1+a_2+\cdots+a_N$.

（1）若 $a_1=3$，写出一个符合要求的 A_6；

（2）证明：数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$；

（3）若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍，证明：数列 A_N 中存在 a_r 使得 $S(A_N)=N\cdot a_r$.

参考答案

一、单选题（每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】C

【分析】先解绝对值不等式求出集合 B,再应用交集定义计算求解即可.

【详解】$B=\{x||x|\le 2\}\Rightarrow B=[-2,2]\Rightarrow A\cap B=(1,2]$.

故选:C.

2.【答案】B

【分析】计算出 $z=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，利用复数模长的性质计算出答案.

【详解】$\mathrm{i}\cdot z=3-4\mathrm{i}$，故 $z=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则 $|z|=\dfrac{|3-4\mathrm{i}|}{|\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{9+16}}{1}=5$.

故选：B

3.【答案】A

【分析】写出展开式的通项，从而计算可得.

【详解】二项式 $(x-2y)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r x^{4-r}(-2y)^r$（$0\le r\le 4$ 且 $r\in\mathrm{N}$），

所以展开式中含 x^2y^2 的项为 $T_3=\mathrm{C}_4^2x^2(-2y)^2=24x^2y^2$，

即展开式中含 x^2y^2 的项的系数为 24.

故选：A

4.【答案】C

【分析】利用向量相等、向量共线的条件、向量模的定义，逐一对各个选项分析判断即可得出结果.

【详解】选项 A，因为 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，只说明两向量的模长相等，但方向不一定相同，故选项 A 错误；

选项 B，当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，有 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，$\vec{b}\,//\,\vec{c}$，但 $\vec{a}$ 可以和 $\vec{c}$ 不平行，故选项 B 错误；

选项 C，若 $\vec{a}=-\vec{b}$，由向量相等的条件知：$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，故选项 C 正确；

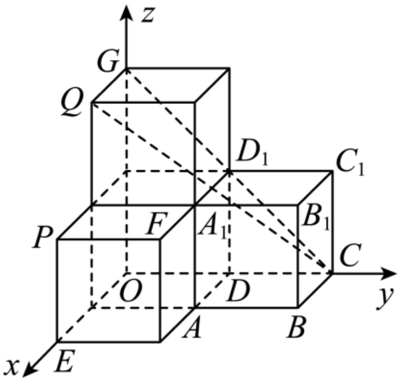
选项 D，因向量不能比较大小，只有模长才能比较大小，故选项 D 错误.

故选：C

5.【答案】C

【分析】建立空间直角坐标系，求平面 QGC 的法向量，用点到平面的距离公式计算即可.

【详解】建立空间直角坐标系如图所示：



则 $C(0,2,0)$， $Q(1,0,2)$， $G(0,0,2)$， $A(1,1,0)$， $\overrightarrow{QC}=(-1,2,-2)$， $\overrightarrow{QG}=(-1,0,0), \overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，

设平面 QGC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{QC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QG}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x=0\\ -x+2y-2z=0\end{cases}$，则平面 QGC 的一个法向量

为 $\vec{n}=(0,1,1)$，

则点 A 到平面 QGC 的距离 $d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C

6.【答案】B

【分析】由题可得 F, A 坐标，根据 $k_{AF}^2=\dfrac{b}{8}$ 可得答案.

【详解】由题 $F(0,2)$， $A\left(-2\sqrt{2},0\right)$，则 $k_{AF}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.因直线 AF 平行于双曲线 C 的一条渐近线，则 $\dfrac{b}{8}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow b=4$.

故选：B

7.【答案】A

【分析】根据三角形面积可推出 $bc=4$，利用余弦定理即可求得答案.

【详解】由于 $\angle A=60°, S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，故有 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$，解得 $bc=4$，

又 $b+c=6$，则 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{(b+c)^2-3bc}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$，

故选：A.

8.【答案】D

【分析】利用函数的单调性及偶函数的性质，结合函数的对称性即可求解.

【详解】因为当 $1<x_1<x_2$ 时， $f(x_2)-f(x_1)>0$ 恒成立，即 $f(x_2)>f(x_1)$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(x+1)$ 是偶函数，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

因为 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，

因为 $2<\frac{5}{2}<3$，

所以 $f(2)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(3)$，即 $f(2)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(3)$，

所以 $b<a<c$.

故选：D.

9.【答案】A

【分析】根据充分条件和必要条件的定义，结合数列的单调性判断

【详解】根据题意，已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-cn$，

若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则有

$a_{n+1}-a_n=[(n+1)^2-c(n+1)]-(n^2-cn)=2n+1-c>0$（$n\in\mathbf{N}^*$），

所以 $c<2n+1$，

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $c<3$，

所以当 $c\le 2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，

而当数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列时，$c\le 2$ 不一定成立，

所以“$c\le 2$”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的充分而不必要条件，

故选：A.

10.【答案】C

【分析】根据集合 M 是“Ω 集合”，即满足曲线 $y=f(x)$ 上过任意一点与原点的直线，都存在过另一点与原点的直线垂直，逐项判定，即可求解.

【详解】题意，集合 M 是“Ω 集合”，即满足曲线 $y=f(x)$ 上过任意一点与原点的直线，都存在过另一点与原点的直线垂直，

对于①中，$M=\left\{(x,y)\mid y=\frac{1}{x}\right\}$，假设集合 M 是“Ω 集合”，

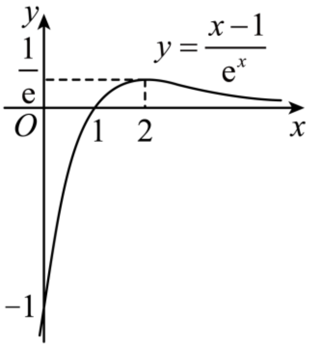
则存在两点 $A\left(x_1,\frac{1}{x_1}\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{x_2}\right)$，满足 $\frac{\frac{1}{x_1}}{x_1}\cdot\frac{\frac{1}{x_2}}{x_2}=-1$，即 $x_1^2x_2^2=-1$，方程无解，

所以假设不成立，所以集合 M 不是“Ω 集合”；

对于②中，函数 $y=\frac{x-1}{e^x}$，则 $y'=\frac{2-x}{e^x}$，

当 $x\in(-\infty,2)$ 时，$y'>0$，函数单调递增，

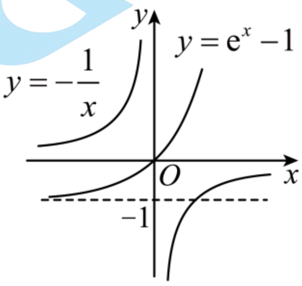
当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，且当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{e}$，图象如图所示，



设图象上对任意一点 $A(x,y)(x\neq 0)$ 时，则 $k_{OA}=\frac{y}{x}=\frac{\frac{x-1}{e^x}}{x}=\frac{x-1}{xe^x}$，

若令 $k_{OA}=\frac{x-1}{xe^x}=1$，即 $x-1=xe^x$，也即 $-\frac{1}{x}=e^x-1$，

由函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象与函数的图象 $y=e^x-1$ 无交点，即 $k_{OA}=\frac{x-1}{xe^x}=1$ 无解，



所以 $k_{OA}\neq 1$，

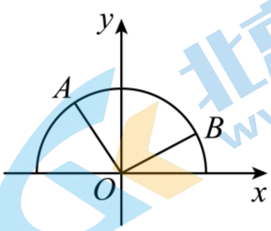
故对于 $k_{OA}=-1$ 时不存在 $k_{OB}=1$，此时不存在一点 B，使得 $OA\perp OB$ 成立，

所以集合 $M=\left\{(x,y)\,|\,y=\frac{x-1}{e^x}\right\}$ 不是"Ω 集合"；

对于③中，集合 $M=\left\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{1-x^2}\right\}$ 的图象表示一个在 x 轴上方的半圆（包括 x 轴上的点），

如图所示，根据圆的性质，可得对任意一点 A，总是存在一点 B，使得 $OA\perp OB$ 成立，

所以集合 $M=\left\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{1-x^2}\right\}$ 是"Ω 集合"；

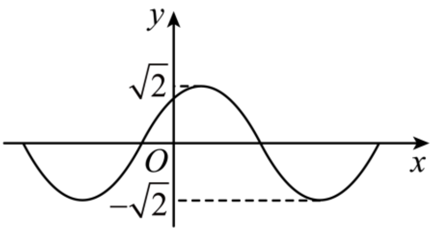


对于④中，函数 $y=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$，当点 $A(0,2),B(x_2,y_2)$ 时，

若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $y_2=0$ 不成立，

所以集合 $M=\{(x,y)\mid y=x^2+2x+2\}$ 不是“Ω 集合”；

对于⑤中，函数 $y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，其大致图象如下.



设 A 是其图象上任意一点，由图可知直线 OA 的斜率的范围是 $(-\infty,+\infty)$

根据图象可得，其图象上任意一点 A，总是存在一点 B，使得 $OA\perp OB$ 成立，

所以集合 $M=\{(x,y)\mid y=\cos x+\sin x\}$ 是“Ω 集合”.

故选：C.

【点睛】关键点睛：本题主要考查了集合 M 是“Ω 集合”的新定义及应用，其中解答的关键是理解对于任意 $(x_1,y_1)\in M$，存在 $(x_2,y_2)\in M$，使得 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 成立，即满足曲线 $y=f(x)$ 上过任意一点与原点的直线，都存在过另一点与原点的直线垂直，着重考查了分析问题和解答问题的能力.

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】0

【分析】由内向外，逐步代入，即可求出结果.

【详解】由题意，$f(1)=2^1=2$，$\therefore f\left(f(1)\right)=f(2)=\lg 1=0$.

故答案为：0

12.【答案】$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}$（答案不唯一）

【分析】由条件可得存在 a,b,c 满足条件 $0<a<b<c$，$a\ge bc$，由此可得 $c<1$，再取满足条件的特殊值.

【详解】由“若 $0<a<b<c$，则 $a<bc$”是假命题可得，

存在 a,b,c 满足条件 $0<a<b<c$，但 $a\ge bc$，

由此可得 $b>bc$，故 $c<1$，

若取 $c=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{4}$，则 $b\le\dfrac{1}{2}$，故可取 $b=\dfrac{1}{3}$.

故答案为：$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}$（答案不唯一）.

13.【答案】-1 或 1

【分析】由等比的定义结合其性质得出 a_3 的值.

【详解】因为 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，

由 $a_7=16$，$a_3a_5=a_4^2=4$，得 $a_4=\pm2$，所以 $q^3=\dfrac{a_7}{a_4}=\pm8$，

所以 $q=\pm2$，

当 $q=2$ 时，$a_4=2$，则 $a_3=\dfrac{a_4}{q}=1$；

当 $q=-2$ 时，$a_4=-2$，则 $a_3=\dfrac{a_4}{q}=-1$.

综上，a_3 的值为 -1 或 1.

故答案为：-1 或 1

14.【答案】2

【分析】设 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$，根据焦点弦公式得 $x_1+x_2=4$，再利用中点公式即得到 m 的值.

【详解】$\because F$ 是抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，

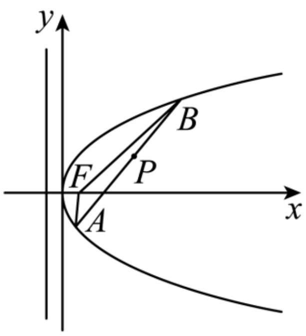
$\therefore F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，准线方程 $x=-\dfrac{1}{2}$，

设 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$，

$\therefore |AF|+|BF|=x_1+\dfrac{1}{2}+x_2+\dfrac{1}{2}=5$，$\therefore x_1+x_2=4$，

$\therefore$ 线段 AB 的中点横坐标为 2，即 $m=2$.

故答案为：2.



15.【答案】③④

【分析】对数列递推关系变形得到 $a_n-2=a_{n+1}{}^2-a_{n+1}-2=(a_{n+1}-2)(a_{n+1}+1)$，得到 a_n-2 与 $a_{n+1}-2$ 同号，当 $0<a_1<2$ 时，$0<a_n<2$，①错误；

当 $a_1=2$ 时，推导出此时 $\{a_n\}$ 为常数列，②错误；

作差法结合 $0<a_1<2$ 时，$0<a_{n+1}<2$，求出数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，③正确；

由 a_n-2 与 $a_{n+1}-2$ 同号，得到当 $a_1>2$，有 $a_n>2$，结合作差法得到 $\{a_n\}$ 为递减数列，④正确.

【详解】因为 $a_{n+1}^{2}-a_{n+1}=a_n$，所以 $a_n-2=a_{n+1}^{2}-a_{n+1}-2=(a_{n+1}-2)(a_{n+1}+1)$，

因为任意的 $n\in\mathrm{N}^*$ 都有 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}+1>0$，

所以 a_n-2 与 $a_{n+1}-2$ 同号，当 $0<a_1<2$，则 $n\geq3$ 时，都有 $0<a_n<2$，①错误；

当 $a_1=2$ 时，$a_2-2=\dfrac{a_1-2}{a_2+1}=0$，所以 $a_2=2$，同理得：$a_n=2(n\geq3)$，此时 $\{a_n\}$ 为常数列，②错误；

$a_{n+1}-a_n=-a_{n+1}^{2}+2a_{n+1}=-(a_{n+1}-1)^2+1$，

由 A 选项知：若 $0<a_1<2$，则 $0<a_{n+1}<2$，

所以 $a_{n+1}-a_n=-a_{n+1}^{2}+2a_{n+1}=-(a_{n+1}-1)^2+1>-1+1=0$，

则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，③正确；

由 a_n-2 与 $a_{n+1}-2$ 同号，当 $a_1>2$，则 $n\geq2$ 时，都有 $a_n>2$，

且此时 $a_{n+1}-a_n=-a_{n+1}^{2}+2a_{n+1}=-(a_{n+1}-1)^2+1<-1+1=0$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，

综上：若 $a_1>2$，则当 $n\geq2,$ 时，$2<a_n<a_1$，④正确.

故答案为：③④

三、解答原（第 16-19、21 题 14 分，第 20 题 15 分）

16.【答案】（1）①③④，理由见解析；（2）$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

【分析】（1）先分析②③④成立时的情况，然后推出矛盾即可确定出满足的三个条件；

（2）先根据（1）求解出 $f(x)$ 的解析式，然后采用整体替换的方法求解出 $f(x)$ 的对称轴方程，然后对 k 进行赋值，确定出在区间 $[0,m]$ 上仅有一条对称轴时 m 的取值范围.

【详解】（1）三个条件是：①③④，理由如下：

若满足②：因为 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $A=\sqrt{2},\omega=1$；

若满足③：因为 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以 $\omega=2$，

若满足④：$A=2$，

由此可知：若满足②，则③④均不满足，

所以满足的三个条件是：①③④；

（2）由③④知：$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

由①知：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=\dfrac{1}{2}$，

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$ 或 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$ 或 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

不妨令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，所以 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{6}$；当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$；当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{6}$，

所以若要 $y=f(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0,m]$ 上，只需 $m\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 m 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

【点睛】方法点睛：已知函数 $g(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0)$，

若求函数 $g(x)$ 图象的对称轴，则令 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$；

若求函数 $g(x)$ 图象的对称中心或零点，则令 $\omega x+\varphi=k\pi$，$k\in Z$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】（1）由线面垂直得到线线垂直，求出各边长，由勾股定理逆定理得到 $AC\perp BC$，从而证明出线面垂直，面面垂直；

（2）解法一：以 C 为原点，CB，CA，CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建系，写出点的坐标及平面的法向量，求出二面角的余弦值；

解法二：取 AB 的中点 G，连接 CG，以点 C 为原点，CG，CD，CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建系，写出点的坐标及平面的法向量，求出二面角的余弦值；

【小问 1 详解】

因为 $PC\perp$ 底面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PC\perp AC$.

因为 $AB=2$，$AD=CD=1$，所以 $AC=BC=\sqrt{2}$.

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$.

又因为 $PC\cap BC=C$，$PC\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $AC\perp$ 平面 PBC.

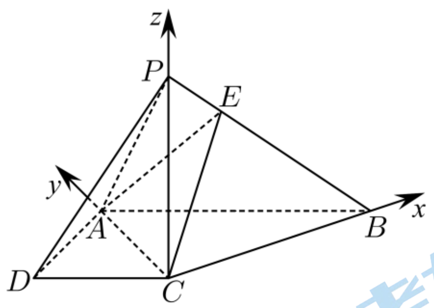
又 $AC\subset$ 平面 EAC，

所以平面 $EAC \perp$ 平面 PBC.

【小问 2 详解】

解法一：

以点 C 为原点，CB，CA，CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,\sqrt{2},0)$，$P(0,0,2)$.



设点 E 的坐标为 (x,y,z)，因为 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EP}$，所以 $(x-\sqrt{2},y,z)=2(-x,-y,2-z)$，

即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$y=0$，$z=\dfrac{4}{3}$，所以 $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{4}{3}\right)$.

所以 $\overrightarrow{CA}=(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{4}{3}\right)$.

设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$.

所以 $\begin{cases}\sqrt{2}y=0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}x+\dfrac{4}{3}z=0\end{cases}$，取 $x=2\sqrt{2}$，则 $y=0$，$z=-1$.

所以平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$.

又因为 $BC\perp$ 平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$.

设平面 PAC 与平面 ACE 的夹角为 θ，

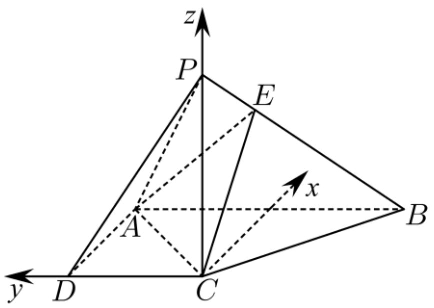
则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CB}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}\times\sqrt{(\sqrt{2})^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以，平面 PAC 与平面 ACE 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

解法二：

取 AB 的中点 G，连接 CG，以点 C 为原点，CG，CD，CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示

的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$B(1,-1,0)$，$A(1,1,0)$，$P(0,0,2)$．



设点 E 的坐标为 (x,y,z)，因为 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EP}$，所以 $(x-1,y+1,z)=2(-x,-y,2-z)$，

即 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=\frac{4}{3}$，所以 $E\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$．

所以 $\overrightarrow{CA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$．

设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$．

所以 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$，取 $x=3$，则 $y=-3$，$z=-\frac{3}{2}$．

所以，平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(3,-3,-\frac{3}{2}\right)$．

又因为 $BC\perp$ 平面 PAC，所以平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{CB}=(1,-1,0)$．

设平面 PAC 与平面 ACE 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CB}\right\rangle\right|=\dfrac{|3\times1+(-3)\times(-1)|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

所以，平面 PAC 与平面 ACE 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

18.【答案】（1）0.6；

（2）分布列见解析，期望为 3；

（3）乙更有可能在午餐选择 B 餐厅用餐

【分析】（1）由统计图表得出一天中甲选择 2 个餐厅用餐的天数，然后计算概率；

（2）得出 X 的可能值是 $2,3,4$，计算出概率的分布列，由期望公式计算期望．

（3）直接由统计图表计算甲、乙两人在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下，午餐选择 B 餐厅用餐的概率，比较即得．

【小问 1 详解】

由统计图表，一天中甲选择 2 个餐厅用餐的天数为 60，概率为 $P=\frac{60}{100}=0.6$；

【小问 2 详解】

易知 X 的可能值是 $2,3,4$，

$P(X=2)=\frac{40}{100}\times\frac{60}{100}=0.24$，$P(X=3)=\frac{40}{100}\times\frac{40}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{60}{100}=0.52$，

$P(X=4)=\frac{60}{100}\times\frac{40}{100}=0.24$，

X 的分布列为

X	2	3	4
P	0.24	0.52	0.24

$E(X)=2\times0.24+3\times0.52+4\times0.24=3$.

【小问 3 详解】

甲在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下午餐选择 B 餐厅用餐的概率为 $P_1=\frac{20}{50}=0.4$，

乙在早餐选择 A 餐厅用餐的条件下午餐选择 B 餐厅用餐的概率为 $P_2=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}>0.4$，

所以乙更有可能在午餐选择 B 餐厅用餐.

19.【答案】(1) 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 平行，理由见解析.

【分析】(1) 由条件列关于 a,b,c 的方程，解方程求 a,b,c。可得椭圆方程；

(2) 根据题意设直线 MN 及 M、N 点坐标，结合题意求点 P 的坐标，结合韦达定理证明 $k_{A_2N}=k_{DP}$ 即可.

【小问 1 详解】

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的半焦距为 c，

由已知点 A_1,A_2 的坐标分别为 $(-a,0),(a,0)$，

因为 $|A_1A_2|=4$，所以 $2a=4$，所以 $a=2$，

又椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $c=\sqrt{3}$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

因为直线 MN 与 x 轴不重合，且过点 $D(1,0)$，

所以可设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

联立方程 $\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去 x 可得 $\left(m^2+4\right)y^2+2my-3=0$，

方程 $\left(m^2+4\right)y^2+2my-3=0$ 的判别式 $\Delta=4m^2+12\left(m^2+4\right)>0$，

设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}, y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+4}$，

$\because A_1\left(-2,0\right),A_2\left(2,0\right)$，则 $k_{A_1M}=\dfrac{y_1}{x_1+2}, k_{A_2N}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$

则直线 A_1M 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，

代入 $x=\dfrac{5}{2}$ 可得 $y=\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}$，即 $P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}\right)$

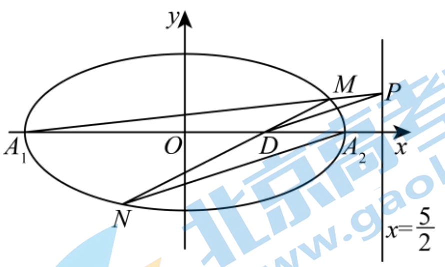
$\therefore k_{DP}=\dfrac{\dfrac{9y_1}{2\left(x_1+2\right)}}{\dfrac{5}{2}-1}=\dfrac{3y_1}{x_1+2}$，

则 $k_{A_2N}-k_{DP}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{3y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{my_2-1}-\dfrac{3y_1}{my_1+3}=\dfrac{3\left(y_1+y_2\right)-2my_1y_2}{\left(my_1+3\right)\left(my_2-1\right)}$

$\because 3\left(y_1+y_2\right)-2my_1y_2=3\left(-\dfrac{2m}{m^2+4}\right)+\dfrac{6m}{m^2+4}=0$，即 $k_{A_2N}-k_{DP}=0$

$\therefore k_{A_2N}=k_{DP}$，

所以直线 A_2N 与 DP 平行.



【点睛】关键点点睛：

(1)解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x(或 y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系.

(2)涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为0或不存在等特殊情形.

20.【答案】（1） $y-\mathrm{e}x=0$

（2）不存在，理由见详解

（3） $\left[-\mathrm{e},+\infty\right)$

【分析】（1）先求得 $f'(x)$，从而得到 $f(1)$， $f'(1)$，再根据导数的几何意义和直线的点斜式方程即可求出切线方程；

（2）先求 $\varphi'(x)$，要判断 $\varphi(x)$ 是否存在极值，即判断 $\varphi(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调情况，即判断 $\varphi'(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上的符号情况；

（3）将原恒成立条件转化为对于任意 $x>0$，不等式 $k\geq-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 恒成立，从而构造函数，再根据函数在定义域上的最值即可求得 k 的取值范围.

【小问1详解】

由 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x$，所以 $f(1)=\mathrm{e}$， $f'(1)=\mathrm{e}$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\mathrm{e}=\mathrm{e}(x-1)$，即 $y-\mathrm{e}x=0$.

【小问2详解】

由 $\varphi(x)=f(x)g(x)=\mathrm{e}^x\cdot\ln(x+a)$， $x>-a$，

则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\ln(x+a)+\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{x+a}=\mathrm{e}^x\cdot\left[\ln(x+a)+\dfrac{1}{x+a}\right]$， $x>-a$，

令 $m(x)=\ln(x+a)+\dfrac{1}{x+a}$， $x>-a$，

则 $m'(x)=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{(x+a)^2}=\dfrac{x+a-1}{(x+a)^2}$， $x>-a$，

当 $0<x+a<1$，即 $-a<x<1-a$ 时， $m'(x)<0$，此时 $m(x)$ 单调递减；

当 $x+a>1$，即 $x>1-a$ 时， $m'(x)>0$，此时 $m(x)$ 单调递增，

所以 $m(x)_{\min}=m(1-a)=1>0$，

所以对任意 $x>-a$，都有 $\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，即 $\varphi(x)$ 不存在极值.

【小问3详解】

当 $a=0$ 时， $g(x)=\ln x$，

对于任意 $s>t>0$，不等式 $g(s)-g(t)>k\left(\dfrac{1}{f(s)}-\dfrac{1}{f(t)}\right)$ 恒成立，

等价于对于任意 $s>t>0$，不等式 $g(s)-\dfrac{k}{f(s)}>g(t)-\dfrac{k}{f(t)}$ 恒成立，

等价于函数 $h(x)=g(x)-\dfrac{k}{f(x)}=\ln x-\dfrac{k}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

等价于导函数 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{k}{e^x}\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

等价于对于任意 $x>0$，不等式 $k\geq -\dfrac{e^x}{x}$ 恒成立，

令 $n(x)=-\dfrac{e^x}{x}$，则 $n'(x)=-\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{x^2}$， $x>0$，

当 $0<x<1$ 时， $n'(x)>0$，此时 $n(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时， $n'(x)<0$，此时 $n(x)$ 单调递减，

所以 $n(x)_{\max}=n(1)=-e$，即 $k\geq -e$，

故 k 的取值范围为 $[-e,+\infty)$.

【点睛】关键点点睛：涉及不等式恒成立问题，将给定的不等式等价转化，构造函数，进而通过导函数使问题得到解决是解答此类问题的关键.

21. 【答案】（1） $3,2,1,1,0,-1$(答案不唯一)；（2）证明见解析（3）证明见解析.

【分析】（1）根据条件写出 A_6，满足相邻项相差为 0 或 1， $a_6<0$ 即可；

（2）假设 $a_1<0,a_N>0$，把 A_N 中的所有负数组成集合 T，取 T 中最大值为 a_m，可证明 $a_{m+1}=0$，若 $a_1>0,a_N<0$，考虑数列 $B_N:-a_1,-a_2,\cdots,-a_N$，同上处理得 $-a_{m+1}=0$，即 $a_{m+1}=0$；

（3）设 $t=\dfrac{S(A_n)}{N}$，则 $t\in Z$. A_n 中最大值为 $M>0$，最小值为 $m<0$，可得 $m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$，设在数列 A_N 中， $a_i=m$， $a_j=M$， $j-i\geq 2$，构造数列 B： $a_i-t,a_{i+1}-t,\cdots,a_j-t$，则数列 B 至少有 3 项，利用（2）存在 r， $a_r-t=0$， $a_r=t$，若 $i>j$，构造数列 B： $t-a_i,t-a_{i+1},\cdots,t-a_j$，同理得证.

【详解】解：（1） $3,2,1,1,0,-1$.答案不唯一.

（2）因为 $a_1a_N<0$，所以 a_1,a_N 异号.

假设 $a_1<0,a_N>0$.

设 $T=\{i\mid a_i<0,i\in\{1,2,3,\cdots,N\}\}$.因为 $a_1<0$，所以 $T\neq\varnothing$.

又因为 T 是有限自然数集，所以可设 T 中的最大数为 m， $1\leq m\leq N-1$..

令 $k=m+1$，则 $a_k\geq 0$.

因为 $|a_k-a_{k-1}|=a_k-a_{k-1}\leq 1$，所以 $a_k\leq 1+a_{k-1}=1+a_m<1$.

因为 $0\leq a_k<1$，且 a_k 为整数，所以 $a_k=0$.

因此若数列 $A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N(N\geq 3)$ 满足 $a_1<0,a_N>0$，且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，

都有$|a_i-a_{i-1}|\leqslant 1$，

则存在a_k使得$a_k=0$.

若$a_1>0,a_N<0$，则数列$-a_1,-a_2,\cdots,-a_N$满足$-a_1<0,-a_N>0$，

且对任意$i=2,3,\cdots,N$，都有$|(-a_i)-(-a_{i-1})|=|a_i-a_{i-1}|\leq 1$，

故存在$-a_k$使得$-a_k=0$，即存在a_k使得$a_k=0$.

综上，数列A_N中存在a_k使得$a_k=0$.

（3）设$t=\dfrac{S(A_n)}{N}$，则$t\in Z$.

设数列$A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N$中的最大值为$M>0$，最小值为$m<0$.

因为$Nm<S(A_N)<NM$，所以$m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$.

设在数列A_N中，$a_i=m$，$a_j=M$.

若$i<j$，因为$|a_i-a_j|=M-m\geq 1-(-1)=2$，所以$j\geq i+2$.

设数列$B:a_i-t,a_{i+1}-t,\cdots,a_j-t$，则数列$B$至少有3项.

因为$(a_i-t)(a_j-t)=(m-t)(M-t)<0$，且对任意$k=1,2,\cdots,j-i$，

都有$|(a_{i+k}-t)-(a_{i+k-1}-t)|=|a_{i+k}-a_{i+k-1}|\leq 1$，

所以由（2）可知存在a_r-t使得$a_r-t=0$，$r\in\{i+1,i+2,\cdots,j-1\}$.，即$t=\dfrac{S(A_n)}{N}=a_r$.

若$i>j$，设数列$C:t-a_j,t-a_{j+1},\cdots,t-a_i$.

同理，存在$t-a_r$使得$t-a_r=0$ $r\in\{j+1,j+2,\cdots,i-1\}$.，即$t=\dfrac{S(A_n)}{N}=a_r$.

综上，若$S(A_N)$是N的整数倍，则数列A_N中存在a_r使得$S(A_N)=Na_r$.

【点睛】关键点点睛：本题考查数列新定义，解题关键是问题的转化，第（2）小题在负数向正数转化时中间一定会出现0，这里出现一个技巧，在正数向负数转化时（当然也会出现0），取相反数构成新数列，问题变为刚解决的问题，负数向正数转化．第（3）小题利用极端思想，取数列中的最大值M和最小值m，由最小值到最大值间的数列（原数列的一部分），构造数列$\{a_k-t\}$（或$\{t-a_k\}$）利用（2）的结论得证．