“皖南八校”2022 届高三第三次联考·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. B　$A=\{x|-1<x<3\}$,,集合 $B=\{x|-2<x<2\}$,则 $A\cap B\{x|-1<x<2\}$,选 B.

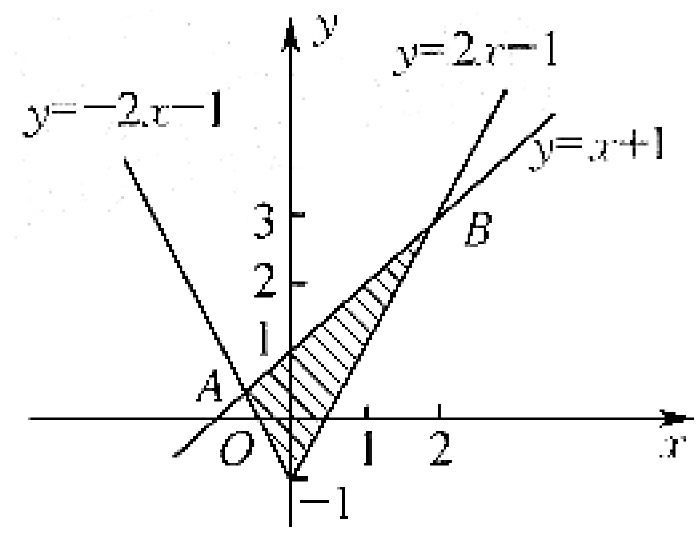
2. B　$z=\frac{1+ai}{1+i}=\frac{a+1}{2}+\frac{a-1}{2}i$,$a=-1$.选 B.

3. D　$a_5-2a_4=8a_3$,$q^2-2q-8=0$,$q=4$ 或 $q=-2$(舍),$a_1a_7=a_4^2=64$,选 D.

4. C　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,选 C.

5. D　$2^9>3^5$,故 $a>b$,又 $2\sin 1<2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故 $c<b$,选 D.

6. B　画出不等式组 $\begin{cases}y\geqslant 2|x|-1,\\ y\leqslant x+1\end{cases}$ 表示的平面区域如右图阴影部分所示. 要使 $z=kx+y$ 取得最大值的最优解有无数多个,则该平行直线系的斜率为 $k_{AB}=1$,故 $k=-1$,选 B.



7. A　$\because\tan\alpha\tan\beta=1$,$\therefore\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$,

$\therefore(\cos\alpha\cos\beta)^2=\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta\leqslant\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{2}=\frac{1}{4}$.

当且仅当 $\tan\alpha=\tan\beta=1$ 时等号成立. 故选 A.

8. A　设动点 M 的坐标,直接按题意翻译即可得到轨迹为圆. 选 A.

9. B　将函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $y=\sin\left(\omega\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像,故 $\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,即 $\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,故 $-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\omega=-6k-\frac{5}{4}$,所以,正数 ω 的最小值为 $\frac{19}{4}$,故选 B.

10. C　首先,容易知道“$y_1y_2=-p^2$”是“直线 AB 经过焦点 F”的充要条件. 设直线 AB 方程为:$x=my+t$,将其与抛物线方程得:$y^2-2pmy-2pt=0$,由直线上两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1x_2=(my_1+t)(my_2+t)=m^2y_1y_2+tm(y_1+y_2)+t^2=m^2(-2pt)+tm\cdot 2pm+t^2=\frac{p^2}{4}$ 故 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow t=\pm\frac{p}{2}$,于是,选 C.

11. $C_6^3\cdot C_6^3-C_6^3=380$,选 C.

12. C　注意到函数 $f(x)=e^x-1$ 图像下凸,$g(x)=\ln(x-a)$ 图像上凸,故“存在直线与函数 $f(x)=e^x-1$,$g(x)=\ln(x-a)$ 的图像都相切”即在定义域 $(a,+\infty)$ 上,$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立. 记 $h(x)=e^x-1-\ln(x-a)$,$h'(x)=e^x-\frac{1}{x-a}$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调增,且在 $(a,+\infty)$ 有唯一零点 x_0,即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0-a}=0$,且 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-1-\ln(x_0-a)=\frac{1}{x_0-a}+x_0-a+a-1\geqslant 2+a-1\geqslant 0$,于是,$a\geqslant -1$. 选 C.

13. -1　由 $1\times 2=2a\times a$ 得 $a=\pm 1$,但 $a=1$ 时,两条直线重合,故 a 的值为 -1.

14. $y=\pm\frac{1}{2}x$ 或 $x\pm 2y=0$　$\frac{c^2}{a^2}=5$,故 $\frac{b}{a}=2$,又渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$,故答案为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

15. 4　$\left(x+\frac{1}{2x}-\sqrt{2}\right)^n=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^{2n}$,其展开式的常数项为 $(-1)^nC_{2n}^n(\sqrt{x})^n\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^n=(-1)^nC_{2n}^n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{35}{2}$,故 n 为偶数,且 $n=4$.

16. 1 或 2　$a_n=\begin{cases}n,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\\ 2\cdot 3^{\frac{n}{2}-1},n=2k,k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ $\frac{S_{2m}}{S_{2m-1}}=3-\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}\leqslant 3$. ,所以 $\frac{S_{2m}}{S_{2m-1}}$ 只能为 a_1,a_2,a_3 之一,

若 $3-\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}=1$,即 $\frac{m^2-1}{3^{m-1}+m^2-1}=1$,得 $3^{m-1}=0$,无解;

若 $3-\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}=2\Rightarrow\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}=1\Rightarrow 3^{m-1}=m^2-1\Rightarrow m=2$；

若 $3-\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}=3\Rightarrow\frac{2(m^2-1)}{3^{m-1}+m^2-1}=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=1$．综上得 $m=1$ 或 $m=2$.

17．解：(1)∵$\sin C=(3-\cos C)\tan B$，∴$\sin C+\cos C\tan B=3\tan B$，即 $\sin C\cos B+\cos C\sin B=3\sin B$，

∴$\sin(B+C)=3\sin B$.

又∵$B+C=\pi-A$，∴$\sin A=3\sin B$.

由正弦定理知，$a=3b$，即 $\frac{a}{b}=3$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\geqslant\frac{2\sqrt{8b^2c^2}}{6bc}$(当且仅当 $c=2\sqrt{2}b$ 时取等号)$=\frac{4b}{3c}+\frac{c}{6b}\geqslant2\sqrt{\frac{4b}{3c}\cdot\frac{c}{6b}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\cos B$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

18．解：(1)

	关注	没关注	合计
男	30	30	60
女	12	28	40
合计	42	58	100

$K^2=\frac{100(30\times28-12\times30)^2}{42\times58\times40\times60}=\frac{800}{203}\approx3.941>3.841$

所以有 95％的把握认为“对冬奥会开幕式的关注与性别有关”. ……………………………… 6 分

(2)∵随机选一名高一女生，对此事关注的概率 $P=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$.

又∵$X\sim B\left(3,\frac{3}{10}\right)$，所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

$E(X)=np=\frac{9}{10}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

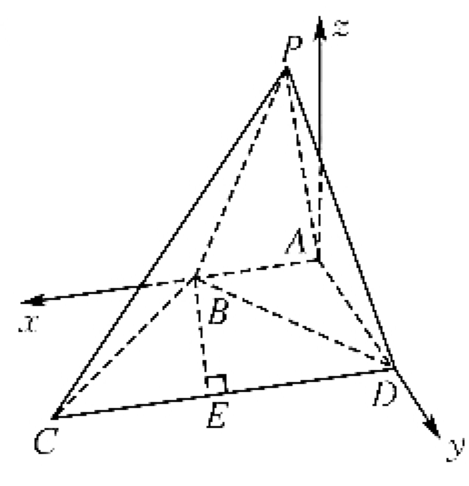
19．解：(1)取 CD 的中点 E，∵$BC=BD$，∴$BE\perp CD$.

∵$AB\parallel CD$ 且 $AB=DE$，∴四边形 $ABED$ 是矩形，∴$AB\perp AD$.

∵$PA\perp AB$ 且 $AD\cap AP=A$，∴$AB\perp$平面 PAD. ∴$V_{P\text{-}ABD}=V_{B\text{-}ADP}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADP}\cdot AB=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

……………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，在平面 PAD 内，作 $Az\perp AD$，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $P(0,-1,\sqrt{3})$，$D(0,2,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(2\sqrt{2},2,0)$，所以 $\overrightarrow{PD}=(0,3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{2},3,-\sqrt{3})$.



设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=3y-\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{2}x-y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $z=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,\sqrt{3})$.

同理可得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$，于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

即二面角 $B-PD-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)依题意,方程 $f'(x)=e^x(a-x-1)+1=0$ 在区间$[0,1]$上有解,

即 $a=x+1-e^{-x}$在区间$[0,1]$上有解. 记 $g(x)=x+1-e^{-x}$,

则函数 $g(x)$区间$[0,1]$上单调增,其值域为$\left[0,2-\frac{1}{e}\right]$.

故实数 a 的取值范围是$\left[0,2-\frac{1}{e}\right]$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=0\Leftrightarrow e^x-\frac{x+1}{x-1}=0(x\neq1)$,

令 $h(x)=e^x-\frac{x+1}{x-1}=e^x-1-\frac{2}{x-1}$

在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,\infty)$上单调递增,

$h(-2)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{3}<0$,$h(0)=2>0$,

$h(1.1)=e^{1.1}-21<0$,$h(2)=e^2-3>0$,

$h(x)$在$(-\infty,1)$,$(1+\infty)$上各有一个零点. …………………………………………………………………… 12

21. 解:(1)∵椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$ ①,

又 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab=1$ ②,由①②解得$\begin{cases}a=2,\\b=1\end{cases}$,故椭圆的标准方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 3

(2)(ⅰ)设直线 CD:$y=-\frac{1}{2}x+t$ 代入得$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得

$x^2-2tx+2t^2-2=0$,

设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

$x_1+x_2=2t$,$x_1x_2=2t^2-2$,

$$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{(-\frac{1}{2}x_1+t)(-\frac{1}{2}x_2+t-1)}{x_2(x_1-2)}$$

分子$=(-\frac{1}{2}x_1+\frac{x_1+x_2}{2})(-\frac{1}{2}x_2+\frac{x_1+x_2}{2}-1)=\frac{x_2}{2}\cdot\frac{x_1-2}{2}$,

∴$k_1k_2=\frac{1}{4}$为定值. …………………………………………………………………… 6 分

(ⅱ)令直线 AC:$y=k(x-2)$,

∵$x^2+4y^2=0$,∴$x^2+4k^2(x-2)^2=4$,

∴$(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$,

由韦达定理得 $x_Ax_1=2x_1=\frac{16k^2-4}{4k^2+1}$,故 $x_1=\frac{8k^2-2}{4k^2+1}$. …………………………………………………… 7 分

由(ⅰ)知,直线 BD:$y=\frac{1}{4k}x+1$,$x^2+4(\frac{1}{16k^2}x+\frac{1}{2k}x+1)=4$,

$x^2+\frac{1}{4k^2}x^2+\frac{2}{k}x=0$,

$(4k^2+1)x^2+8kx=0$,故 $x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}$. …………………………………………………… 8 分

从而,$|CD|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{8k^2+8k-2}{4k^2+1}\right|$. …………………………………… 9 分

记 $f(k)=\frac{8k^2+8k-2}{4k^2+1}=\frac{8k^2+2+8k-4}{4k^2+1}=2+4\cdot\frac{2k-1}{4k^2+1}$. 当 $k=\frac{1}{2}$时,$f(k)=2$;

当 $k\neq\frac{1}{2}$时,记 $2k-1=t$,则 $2+4\cdot\frac{2k-1}{4k^2+1}=2+4\cdot\frac{t}{t^2+2t+2}=2+4\cdot\frac{1}{t+\frac{2}{t}+2}\cdot g(t)(t\neq0)$.

令 $g(t)=2+\dfrac{4}{t+\dfrac{2}{t}+2}$.

当 $t>0$ 时，$t+\dfrac{2}{t}+2\geqslant 2\sqrt{2}+2$，于是 $g(t)\leqslant 2+\dfrac{4}{2\sqrt{2}+2}=2\sqrt{2}$. ………………………………………… 10 分

此时，$|CD|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|g(t)|\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 即 $k=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$时，等号成立.

同理，当 $t<0$ 时，$-2\sqrt{2}\leqslant g(t)<2$.

此时，$|CD|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|g(t)|\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

当且仅当 $t=-\sqrt{2}$ 即 $k=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$时，等号成立.

综上所述，当且仅当 $k=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$时，$|CD|$ 取得最大值 $\sqrt{10}$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由直线 l 的参数方程，消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y+3=0$.

由 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+2x-m=0$. ………………………… 5 分

(2)将直线 l 的参数方程改写为标准形式：$\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 并代入曲线 C 的直角坐标方程，

并整理得 $t^2+2\sqrt{2}t+3-m=0$.(＊)设 t_1，t_2 是方程(＊)的两个根，则有 $\Delta>0$，$t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=3-m$.

由题意，不妨设 $t_1=-2t_2$，$\therefore t_2^2=8$.

又 $-2t_2^2=3-m$，故 $m=19$. ………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+2|-|x-1|$，$f(x)>2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\text{ 时},\\ 3>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant -2\text{ 时},\\ -3>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<1\text{ 时},\\ 2x+1>2.\end{cases}$

从而，原不等式的解集为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 5 分

(2)当 $x\in[0,2]$时，$f(x)<|x-4|\Leftrightarrow|x+a|-|x-1|<4-x$.

①当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$|x+a|<3$，即 $-3<x+a<3\Leftrightarrow -3-x<a<3-x$ 恒成立.

$\because 1\leqslant x\leqslant 2$，故 $-4<a<1$.

②当 $0\leqslant x<1$ 时，$|x+a|<5-2x$，即 $2x-5<x+a<5-2x\Leftrightarrow x-5<a<5-3x$ 恒成立.

$\because 0\leqslant x<1$，故 $-4\leqslant a\leqslant 2$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-4,1)$. ……………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。