试卷编号：9297

北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期期中考试高一数学

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=($　　$)$

(A) $\{1\}$　　(B) $\{0,1\}$　　(C) $\{-1,0,1\}$　　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 设命题 $p:\exists\, x\in\mathbf{Z}, x^2\geqslant 2x+1$, 则 p 的否定为 (　　)

(A) $\forall\, x\notin\mathbf{Z}, x^2<2x+1$　　(B) $\forall\, x\in\mathbf{Z}, x^2<2x+1$

(C) $\exists\, x\notin\mathbf{Z}, x^2<2x+1$　　(D) $\exists\, x\in\mathbf{Z}, x^2<2x+1$

3. 下列四个函数中, 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 (　　)

(A) $f(x)=3-x$　　(B) $f(x)=x^2-3x$　　(C) $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$　　(D) $f(x)=-|x|$

4. 若 $a>b>0, c>d>0$, 则一定有 (　　)

(A) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　　(B) $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　　(C) $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　　(D) $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是增函数, 且 $f(x+2)=f(2-x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则 (　　)

(A) $f(-1)<f(3)$　　(B) $f(-1)>f(3)$　　(C) $f(-1)=f(3)$　　(D) $f(0)=f(3)$

6. 若函数 $f(x)=\begin{cases}3-x^2, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ x-3, & 2<x\leqslant 5,\end{cases}$ 则方程 $f(x)=1$ 的解是 (　　)

(A) $\sqrt{2}$ 或 2　　(B) $\sqrt{2}$ 或 3　　(C) $\sqrt{2}$ 或 4　　(D) $\pm\sqrt{2}$ 或 4

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+\dfrac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2. 若 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=4m$, 则 m 的值是 (　　)

(A) 2　　(B) -1　　(C) 2 或 -1　　(D) 不存在

8. 已知 $a>0$, 且关于 x 的不等式 $x^2-2x+a<0$ 的解集为 (m,n), 则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值为 (　　)

(A) 2　　(B) $\dfrac{7}{2}$　　(C) 4　　(D) $\dfrac{9}{2}$

9. 已知 a_1, a_2, b_1, b_2 均为非零实数, 关于 x 的不等式 $a_1x + b_1 < 0$ 与 $a_2x + b_2 < 0$ 的解集分别为 M 和 N, 则 “$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$” 是 “$M = N$” 的 (　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $f(x) = x^2 - 2kx + 3k^2 - 3k + 1$ ($k \in \mathbf{R}$). 给出下列四个命题:

①对任意实数 x, 存在 k, 使得 $f(x) > 0$;　②对任意 k, 存在实数 x, 使得 $f(x) > 0$;

③对任意实数 k, x, 均有 $f(x) > 0$ 成立;　④对任意实数 k, x, 均有 $f(x) < 0$ 成立.

其中所有正确命题的序号是 (　　)

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ①③　　(D) ②④

二、填空题共 6 小题。

11. 使 “函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ 的最小值为 2” 为假命题的 a 的一个值是 ________ .

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x + 3) = -f(x)$, 且当 $x \in (0, \frac{3}{2}]$ 时, $f(x) = x^2$, 则 $f(\frac{9}{4}) =$ ________ .

13. 已知函数 $y = x^2 + ax - 1$ 在区间 $[0, 3]$ 上有最小值 -2, 则实数 a 的值等于 ________ .

14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由右表给出. 则满足不等式 $f[g(x)] > g[f(x)]$ 的解集是 ________ .

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1
$g(x)$	3	2	1

15. 某商贸公司售卖某种水果, 经过市场调研可知: 未来 20 天内, 这种水果每箱的销售利润 r (单位: 元) 与时间 t ($1 \leqslant t \leqslant 20$, $t \in \mathbf{N}^*$, 单位: 天) 之间的函数关系式为 $r = \frac{1}{4}t + 10$, 且日销售量 y (单位: 箱) 与时间 t 之间的函数关系式为 $y = 120 - 2t$. 在未来这 20 天中, 公司决定每销售 1 箱该水果就捐赠 m 元给 “精准扶贫” 对象. 为保证销售积极性, 要求捐赠之后每天都能盈利，且获得的利润随时间 t 的增大而增大, 则 m 的取值范围是 ________ .

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x \geqslant a, \\ |x + a|, & x < a, \end{cases}$ 对于任意正数 k, 关于 x 的方程 $f(x) = k$ 都恰有两个不相等的实数根.

(1) 请判断 $a = 0$ 是否符合题意: ________ (填 “是” 或者 “否”);

(2) 写出 a 的所有可能取值: ________ .

三、解答题共 **4** 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 已知集合 $A=\{x \mid |x-1|<3\}$, $B=\{x \mid m<x<2m+3\}$.

(1) 求集合 A 中的所有整数;

(2) 若 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)=\dfrac{x+m+1}{x^2+1}$, $m\in\mathbf{R}$.

(1) 求 m 的值;

(2) 用定义证明: $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数;

(3) 若实数 a 满足 $f(a^2-a+3)<\dfrac{5}{26}$, 求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 3x + 2\ (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$, 求 a, b 的值;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) > 5 - ax$.

20. 对于非空有限整数集 X, $m \in \mathbf{N}^*$, 定义 $X^m = \{x^m \mid x \in X\}$, 对 $n \in \mathbf{Z}$, $Y \oplus n = \{x + n \mid x \in Y\}$. 现有两个非空有限整数集 A, B, 已知 $A \oplus 1 \subseteq B$ 且 $B^2 \oplus (-4) \subseteq A$.

(1) 当 $A = \{-3, 0\}$ 时, 求集合 B;

(2) 证明: $A \subseteq \{-3, -2, 0, 1\}$;

(3) 当 $A \oplus 1 = B$ 且 $B^2 \oplus (-4) = A$ 时, 任取 $a \in A, b \in B$, 构造函数 $f(x) = (x - a)(x - b)$, 问: 当 a, b 取何值时, $f(x)$ 的最小值最小?

北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期期中考试高一数学参考答案

1. (2023 丰台二模 1) B

2. B

3. C

因为 $f(x) = 3 - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 所以 A 不符合题意; 因为 $f(x) = x^2 - 3x$ 的图象是开口向上且对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ 的抛物线, 所以它在 $(0, +\infty)$ 上先减后增, 所以 B 不符合题意; 因为 $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 C 符合题意; 因为 $f(x) = -|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 所以 D 不符合题意.

4. (2023 昌平高三上期末 4) C

不妨令 $a = 3, b = 1, c = 1, d = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{a}{c} = 3, \frac{b}{d} = 3$, 所以 A, B 不正确; $\frac{a}{d} = 9, \frac{b}{c} = 1$, D 不正确, C 正确.

5. A

易知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以 $f(3) = f(1) \neq f(0)$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是增函数, 所以 $f(-1) < f(1) = f(3)$. 故选 A.

6. C

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时, 令 $3 - x^2 = 1$, 则 $x = \pm\sqrt{2}$, 而 $-\sqrt{2} \notin [-1, 2]$, 故舍去; 当 $2 < x \leqslant 5$ 时, 令 $x - 3 = 1$, 则 $x = 4$, 满足题意. 综上, $x = \sqrt{2}$ 或 4.

7. A

由题知, $\begin{cases} m \neq 0, \\ \Delta = (m+2)^2 - 4m \cdot \frac{m}{4} > 0, \end{cases}$ 解得 $m > -1$ 且 $m \neq 0$. 因为 $x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m}$, $x_1x_2 = \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{1}{4}} = 4m$, 所以 $m = 2$ 或 -1. 因为 $m > -1$, 所以 $m = 2$.

8. D

因为 m, n 是方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的两根, 所以 $m + n = 2$, $mn = a > 0$, 所以 $m > 0, n > 0$, 且

$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{2}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{4}{n})=\frac{1}{2}(5+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n})\geqslant\frac{9}{2}$, 当且仅当 $n=\frac{4}{3}, m=\frac{2}{3}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

9. B

取 $a_1=b_1=1, a_2=b_2=-1$, 则可得 $M=(-\infty,-1), N=(-1,+\infty), M\neq N$, 因此不是充分条件, 而由 $M=N$, 显然可以得到 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$, 所以是必要条件.

10. (2021 朝阳高二下期末 9) A

令 $f(x)=x^2-2kx+3k^2-3k+1=0$,

记 $\Delta=(2k)^2-4(3k^2-3k+1)=-4(2k-1)(k-1)$,

因为 $f(x)$ 为开口向上的二次函数,

所以对任意 k, 总存在 x 使得 $f(x)>0$, 故②正确④错误;

因为当 $k\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$ 时, $\Delta=-4(2k-1)(k-1)<0$,

所以方程 $x^2-2kx+3k^2-3k+1=0$ 无解,

所以 $f(x)=x^2-2kx+3k^2-3k+1>0$ 恒成立, 故①正确;

因为当 $k\in[\frac{1}{2},1]$ 时, $\Delta=-4(2k-1)(k-1)\geqslant 0$,

所以方程 $x^2-2kx+3k^2-3k+1=0$ 有一根或两根,

所以对任意 x, $f(x)>0$ 不恒成立, 故③错误;

故答案为: A.

11. $a>1$ 的任何一个数.

12. $\frac{9}{16}$.

13. -2.

14. $\{2\}$.

若 $x=1$, 则 $g(1)=3, f[g(1)]=f(3)=1, g[f(1)]=g(1)=3$, 此时 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 不成立; 若 $x=2$, 则 $f[g(2)]=f(2)=3, g[f(2)]=g(3)=1$, 此时 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 成立; 若 $x=3$, 则 $f[g(3)]=f(1)=1, g[f(3)]=g(1)=3$, 此时 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 不成立. 故不等式 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的解集为 $\{2\}$.

15. $(\frac{19}{4},\frac{41}{4})$.

16. (1) 否; (2) $a=1$.

17. (1) $-1, 0, 1, 2, 3$; (2) $(-\infty,-3]\cup[-2,\frac{1}{2}]$.

18. (1) 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0)=0$, 解得 $m=-1$,

此时 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 为奇函数, 符合题意.

所以 $m=-1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$,

任取 $1\leqslant x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}$

$=\dfrac{x_1(x_2^2+1)-x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\dfrac{(x_1x_2^2-x_2x_1^2)+(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$.

因为 $1\leqslant x_1<x_2$, 所以 $x_1-x_2<0$, $x_1x_2>1$, $1-x_1x_2<0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 所以 $f(x_1)>f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

(3) 因为 $a^2-a+3=(a-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{11}{4}>1$, 且 $f(5)=\dfrac{5}{26}$,

由 (2) 可得 $a^2-a+3>5$, 解得 $a<-1$ 或 $a>2$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

19. (1) $a=1$, $b=2$.

(2) 原不等式可化为 $ax^2+(a-3)x-3>0$, 即 $(ax-3)(x+1)>0$,

当 $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x\mid x<-1\}$.

当 $a\neq 0$ 时, 方程 $(ax-3)(x+1)=0$ 的根为 $x_1=\dfrac{3}{a}$, $x_2=-1$,

①当 $a>0$ 时, $\dfrac{3}{a}>-1$, 则原不等式的解集为 $\{x\mid x>\dfrac{3}{a}$ 或 $x<-1\}$;

②当 $-3<a<0$ 时, $\dfrac{3}{a}<-1$, 原不等式的解集为 $\{x\mid \dfrac{3}{a}<x<-1\}$;

③当 $a=-3$ 时, $\dfrac{3}{a}=-1$, 则原不等式的解集为 $\varnothing$;

④当 $a<-3$ 时, $\dfrac{3}{a}>-1$, 则原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<\dfrac{3}{a}\}$.

综上所述, 当 $a>0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x\mid x>\dfrac{3}{a}$ 或 $x<-1\}$; 当 $-3<a<0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x\mid \dfrac{3}{a}<x<-1\}$; 当 $a=-3$ 时, 原不等式的解集为 $\varnothing$; 当 $a<-3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<\dfrac{3}{a}\}$; 当 $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x\mid x<-1\}$.

20. (1) 根据定义有 $A\oplus 1=\{a+1\mid a\in A\}=\{-2,1\}\subseteq B$,

同时 $B^2\oplus(-4)=\{b^2-4\mid b\in B\}\subseteq A=\{-3,0\}$.

则对所有 $b\in B$, 均有 $b^2-4=-3$ 或 0.

考虑 $b^2-4=-3$, 解得 $b=1$ 或 -1.

考虑 $b^2-4=0$, 解得 $b=2$ 或 -2.

于是 $\{-2,1\}\subseteq B\subseteq\{-2,-1,1,2\}$,

将所有情形枚举出来得 $B=\{-2,1\}$ 或 $\{-2,-1,1\}$,
或 $\{-2,1,2\}$, 或 $\{-2,-1,1,2\}$.
(2) 由条件可知若 $a\in A$, 有 $a+1\in B$,
于是 $(a+1)^2-4=a^2+2a-3\in A$.
如果 $a\in A$, 且 $a\geqslant 2$, 则 $a^2+2a-3\geqslant 4+2a-3>a$.
于是集合 A 中存在一连串可以无限递增的元素, 这与 A 为有限集矛盾.
如果 $a\in A$, 且 $a\leqslant -4$, 则 $a^2+2a-3=(a+1)^2-4\geqslant 9-4=5$.
于是集合 A 中存在一个大于等于 2 的元素, 由上个情况可知, 这与 A 为有限集矛盾.
如果 $-1\in A$, 则 $(-1)^2+2(-1)-3=-4\in A$,
而由上个情况可知 $-4\notin A$, 矛盾. 故 $-1\notin A$.
综上所述, $A\subseteq\{-3,-2,0,1\}$.
(3) 借助第 (2) 问的结论, 可知 $B=A\oplus 1\subseteq\{-2,-1,1,2\}$, 并且 $A=B^2\oplus(-4)\subseteq\{-3,0\}$.
因为 A 为非空集合, 所以 -3 与 0 之间至少有一个属于 A.
若 $-3\in A$, 有 $-3+1=-2\in B$, 从而 $(-2)^2-4=0\in A$.
同样地, 若 $0\in A$, 得 $0+1=1\in B$, 从而 $1^2-4=-3\in A$.
因此 $A=\{-3,0\}$, $B=\{-2,1\}$.
根据二次函数的性质可知 $f(x)=(x-a)(x-b)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 时取最小值.
即 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{a+b}{2})=(\dfrac{a+b}{2}-a)(\dfrac{a+b}{2}-b)=\dfrac{b-a}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}=-\dfrac{(a-b)^2}{4}$.
要使 $f(x)_{\min}$ 尽可能小, 则 $|a-b|$ 必须尽可能大.
因此当 $a=-3$, $b=1$ 时, $f(x)$ 的最小值最小, 为 -4.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！