理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

4. 考试结束后，请在教师指导下扫描二维码观看名师讲解.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x^2-2x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2, -1, 0\}$　　B. $\{-2, -1\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$，则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

4. $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^7$ 的展开式中，x^5 的系数为

A. 189　　B. 63

C. 21　　D. 7

5. 已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$a=4$，$b+c=5$，则△ABC 的面积为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

6. 直线 $x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 有两个不同交点的一个必要不充分条件是

A. $-2<a<3$　　B. $-1<a<3$

C. $-2<a<0$　　D. $0<a<3$

7. 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，所得图象关于 y 轴对称，则 ω 的一个可能取值是

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 执行如图 1 所示的程序框图，若 $a=0.5^{\frac{1}{2}}$，$b=0.9^{\frac{1}{4}}$，$c=\log_5 0.3$，则输出的数是

A. $0.5^{\frac{1}{2}}$

B. $0.9^{\frac{1}{4}}$

C. $\log_5 0.3$

D. $0.5^{\frac{1}{2}}+0.9^{\frac{1}{4}}+\log_5 0.3$

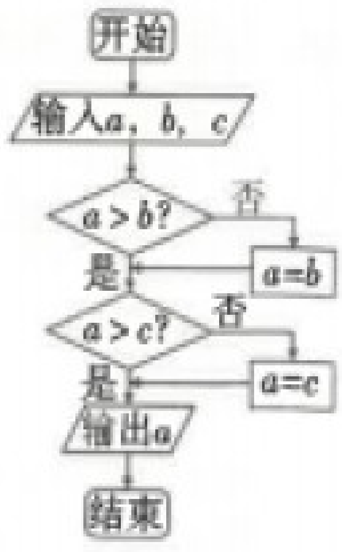

图 1

9. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，定义运算"$\otimes$"：$a\otimes b=\begin{cases}a, & a\geqslant b,\\ b, & a<b,\end{cases}$ 设函数 $f(x)=(2^x\otimes 2)-(1\otimes\log_2 x)$，$x\in(0,2)$，则 $f(x)$ 的值域为

A. $(0,3)$　　B. $[0,3)$

C. $[1,3)$　　D. $(1,3)$

10. 如图 2，在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=CD=AD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$AD\perp BD$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起到 $\triangle A'BD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则过 A'，B，C，D 四点的球的表面积为

A. 3π

B. 6π

C. 8π

D. 12π

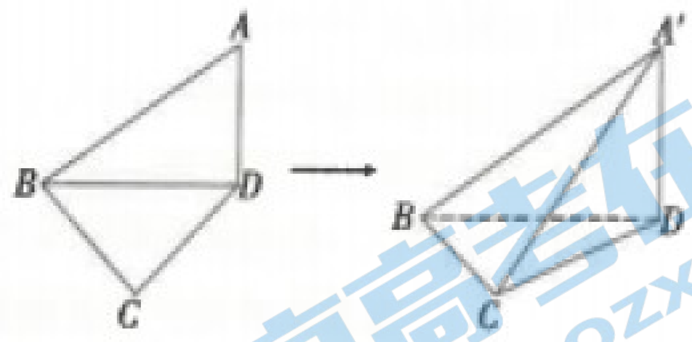

图 2

11. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，左焦点为 F，P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴，过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 N，直线 MB 与 y 轴交于点 H，若 $ON=2OH$（O 为坐标原点），则 C 的离心率为

A. 3　　B. 2

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{4}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=x\ln x+ae^x$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 曲线 $y=x+\ln x-1$ 在点$(1,0)$处的切线方程为____________.

14. 若点 A 是区域$\begin{cases}y+1\geqslant 0\\ x+y-1\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\end{cases}$内一动点，点 B 是圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$上一点，则$|AB|$的最小值为________.

15. 勾股定理又称商高定理，三国时期吴国数学家赵爽创制了一幅“勾股圆方图”，正方形 $ABDE$ 是由4个全等的直角三角形再加上中间的阴影小正方形组成的，如图3. 记$\angle ABC=\theta$，若 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-7$，在正方形 $ABDE$ 内随机取一点，则该点取自阴影正方形的概率为________.

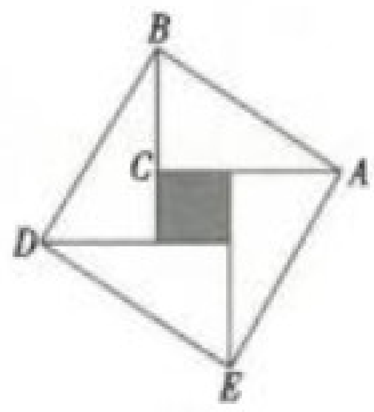

图3

16. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，直线 m 与 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P，过线段 AB 的中点 M 作 $MN\perp l$，垂足为 N，O 为坐标原点，则 $2(|OP|-|MN|)=$________.

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_4+a_5=16$，$S_6=36$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分12分）

某企业为提高生产质量，引入了一批新的生产设备，为了解生产情况，随机抽取了新、旧设备生产的共200件产品进行质量检测，统计得到产品的质量指标值如下表及图4（所有产品质量指标值均位于区间$(15,45]$内），若质量指标值大于30，则说明该产品质量高，否则说明该产品质量一般.

新设备生产的产品质量指标值的频数分布表

质量指标	频数
$(15,20]$	2
$(20,25]$	8
$(25,30]$	10
$(30,35]$	30
$(35,40]$	20
$(40,45]$	10
合计	80

旧设备生产的产品质量指标值的频率分布直方图

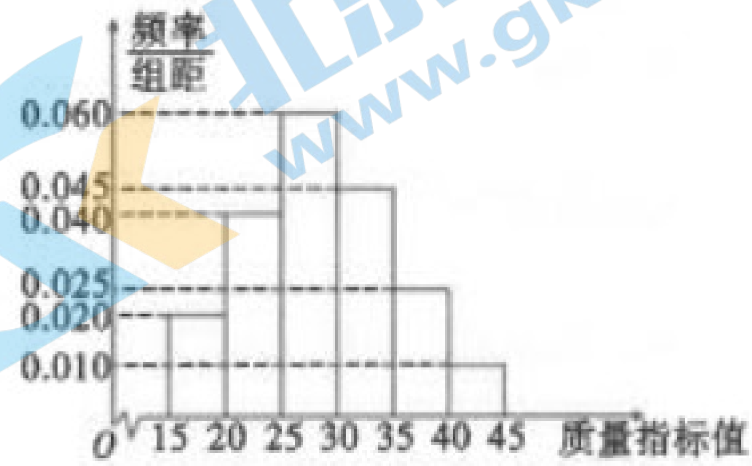

图4

（1）根据上述图表完成下列2×2列联表，并判断是否有99%的把握认为产品质量高与引入新设备有关；

新旧设备产品质量2×2列联表

	产品质量高	产品质量一般	合计
新设备产品			
旧设备产品			
合计			

（2）从旧设备生产的质量指标值位于区间$(15,30]$的产品中，按分层抽样抽取6件产品，再从这6件产品中

随机选取3件产品进行质量检测，记抽到质量指标值位于(25，30]的产品数为X，求X的分布列和期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分12分）

如图5，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PA=AB=1$，$PB=PD=\sqrt{2}$.

（1）证明：$BD\perp$平面PAC；

（2）若E是PC的中点，F是棱PD上一点，且BE//平面ACF，求二面角$F-AC-D$的余弦值.

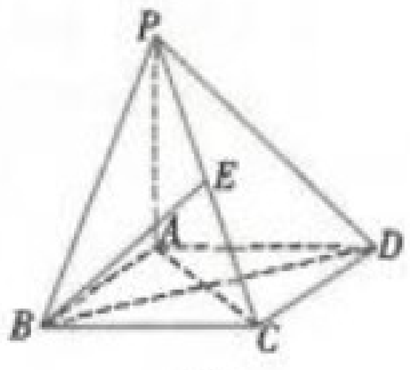

图5

20.（本小题满分12分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，上顶点为$B$，$\triangle BF_1F_2$的面积为$\sqrt{3}$，$C$上的点到右焦点$F_2$的最大距离是3.

（1）求C的标准方程；

（2）设C的左、右顶点分别为A_1，A_2，过A_1，A_2分别作x轴的垂线l_1，l_2，直线l：$y=kx+m(k\neq0)$与C相切，且l与l_1，l_2分别交于P，Q两点，求证：$\angle PF_1Q=\angle PF_2Q$.

21.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=e^x\left(a\ln x+\dfrac{a}{x}+1\right)(a\in\mathbf{R})$.

（1）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线斜率为0，求实数a的值；

（2）记$f(x)$的极值点为x_1，函数$g(x)=a\ln x+1$的零点为x_2，当$a>\dfrac{1}{\ln 2}$时，证明：$x_1<x_2$.

请考生在第22、23两题中任选一题作答，并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分10分）【选修4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cdot\cos\alpha,\\y=2+t\cdot\sin\alpha,\end{cases}$（$t$为参数，$\alpha$为倾斜角），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，圆$C$的极坐标方程为$\rho=6\cos\theta+8\sin\theta$，圆心为$C$，直线$l$与圆$C$交于$A$，$B$两点.

（1）求圆C的直角坐标方程；

（2）已知点$M(1,2)$，当$\angle ACB$最小时，求$|MA|+|MB|$的值.

23.（本小题满分10分）【选修4-5：不等式选讲】

已知函数$f(x)=|x-a|+|x+1|$.

（1）当$a=2$时，求不等式$f(x)\leqslant5$的解集；

（2）若存在实数x，使$f(x)\leqslant3$成立，求实数a的取值范围.

①本期试卷升级啦，每道题配有视频真人讲解，扫描试卷上面二维码进入。讲完试卷后，提醒学生试卷上有二维码，里面有名师真人视频讲解，如有没听懂的题可通过扫描二维码学习。
②试卷同时配有互联网大数据学习平台，以“课后解题”为核心， 解决学生和家长课后错题辅导的需求，让试卷自己说话，降低老师讲题负担。
③不改变学校老师教学、学生学习的原有习惯。
④给学生提供一个新的课后加强学习的途径。
⑤视频不是直接讲答案，主要讲解答题过程和知识点。

云南师大附中2020届高考适应性月考卷（三）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	C	D	A	B	B	C	A	A	D

【解析】

1．$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{x\mid x<0或x>2\}$，$A\cap B=\{-2,\ -1\}$，故选B.

2．$z=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$，故选A.

3．$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$，记向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为$\theta$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，故选C.

4．$\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^7$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_7^r x^{7-r}\left(\dfrac{3}{x}\right)^r=3^r\mathrm{C}_7^r x^{7-2r}$，令$7-2r=5$，解得$r=1$，$\therefore 3\cdot\mathrm{C}_7^1=21$，故选C.

5．由余弦定理得$\dfrac{1}{2}=\dfrac{16+b^2-(5-b)^2}{8b}$，$\therefore b=\dfrac{3}{2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，故选D.

6．圆的标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$，圆心$(1,\ -2)$，半径$r=\sqrt{2}$，因为直线与圆有两个不同的交点，所以圆心到直线的距离$d=\dfrac{|1-2+a|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$，所以$|a-1|<2$，$\therefore -1<a<3$，求其必要不充分条件，即$(-1,\ 3)$为其真子集，故选A.

7．$y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度后得$y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\omega\pi}{3}\right)$，因为图象关于$y$轴对称，$\therefore \dfrac{\omega\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \omega=\dfrac{3}{2}+3k$，$k\in\mathbf{Z}$，故选B.

8．由程序框图知，输出 a，b，c 中最大的数，$\because a=0.5^{\frac{2}{4}}=0.25^{\frac{1}{4}}<b=0.9^{\frac{1}{4}}$，$c<0$，所以 b 最大，故选 B．

9．由题意，$f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<1,\\ 2^x-1,\ 1\leqslant x<2,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的值域为 $[1,\ 3)$，故选 C．

10．由条件知 $BC\perp CD$，$A'D\perp BD$，因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，且交线为 BD，$\therefore A'D\perp$ 平面 BCD，$\therefore A'D\perp BC$，$A'D\cap CD=D$，$\therefore BC\perp$ 平面 $A'CD$，$\therefore BC\perp A'C$，所以过 A'，B，C，D 四点的球的直径为 $A'B=2R=\sqrt{3}$，所以 $S=4\pi R^2=3\pi$，故选 A．

11．$\because \triangle NAO\backsim\triangle MAF$，$\therefore \dfrac{|ON|}{|MF|}=\dfrac{|OA|}{|AF|}=\dfrac{a}{c-a}$，又 $\because \triangle BOH\backsim\triangle BFM$，$\therefore \dfrac{|OH|}{|FM|}=\dfrac{|BO|}{|BF|}=\dfrac{a}{a+c}$，$|ON|=2|OH|$，$\dfrac{a}{c-a}=\dfrac{2a}{c+a}$，$\therefore c=3a$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=3$，故选 A．

12．$\because f'(x)=1+\ln x+a\mathrm{e}^x$，由题意，$f'(x)=1+\ln x+a\mathrm{e}^x=0$ 有两个不同的实根，即 $y=-a$ 和 $y=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有两个交点，令 $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{\mathrm{e}^x}$．记 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，$h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，所以当 $x\in(0,\ 1]$ 时，$h(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ 1]$ 上单调递增；当 $x\in(1,\ +\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，由图象知，当 $0<-a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，$y=-a$ 和 $y=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有两个交点，故选 D．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$2x-y-2=0$	$\sqrt{2}-1$	$\dfrac{1}{25}$	2

【解析】

13．$y'=1+\dfrac{1}{x}$，所以切线斜率为 $k=1+1=2$，所以切线方程为 $y=2(x-1)$，即 $2x-y-2=0$．

8．由程序框图知，输出 a，b，c 中最大的数，$\because a=0.5^{\frac{2}{4}}=0.25^{\frac{1}{4}}<b=0.9^{\frac{1}{4}}$，$c<0$，所以 b 最大，故选 B．

9．由题意，$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 2^x-1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的值域为 $[1,\ 3)$，故选 C．

10．由条件知 $BC\perp CD$，$A'D\perp BD$，因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，且交线为 BD，$\therefore A'D\perp$ 平面 BCD，$\therefore A'D\perp BC$，$A'D\cap CD=D$，$\therefore BC\perp$ 平面 $A'CD$，$\therefore BC\perp A'C$，所以过 A'，B，C，D 四点的球的直径为 $A'B=2R=\sqrt{3}$，所以 $S=4\pi R^2=3\pi$，故选 A．

11．$\because \triangle NAO\backsim\triangle MAF$，$\therefore \dfrac{|ON|}{|MF|}=\dfrac{|OA|}{|AF|}=\dfrac{a}{c-a}$，又 $\because \triangle BOH\backsim\triangle BFM$，$\therefore \dfrac{|OH|}{|FM|}=\dfrac{|BO|}{|BF|}=\dfrac{a}{a+c}$，$|ON|=2|OH|$，$\dfrac{a}{c-a}=\dfrac{2a}{c+a}$，$\therefore c=3a$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=3$，故选 A．

12．$\because f'(x)=1+\ln x+a\mathrm{e}^x$，由题意，$f'(x)=1+\ln x+a\mathrm{e}^x=0$ 有两个不同的实根，即 $y=-a$ 和 $y=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有两个交点，令 $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{\mathrm{e}^x}$．记 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，$h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，所以当 $x\in(0,\ 1]$ 时，$h(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ 1]$ 上单调递增；当 $x\in(1,\ +\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，由图象知，当 $0<-a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，$y=-a$ 和 $y=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有两个交点，故选 D．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$2x-y-2=0$	$\sqrt{2}-1$	$\dfrac{1}{25}$	2

【解析】

13．$y'=1+\dfrac{1}{x}$，所以切线斜率为 $k=1+1=2$，所以切线方程为 $y=2(x-1)$，即 $2x-y-2=0$．

14．由约束条件画出可行域如图 1 所示，记圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+y-1=0$ 的距离为 d，则 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$．

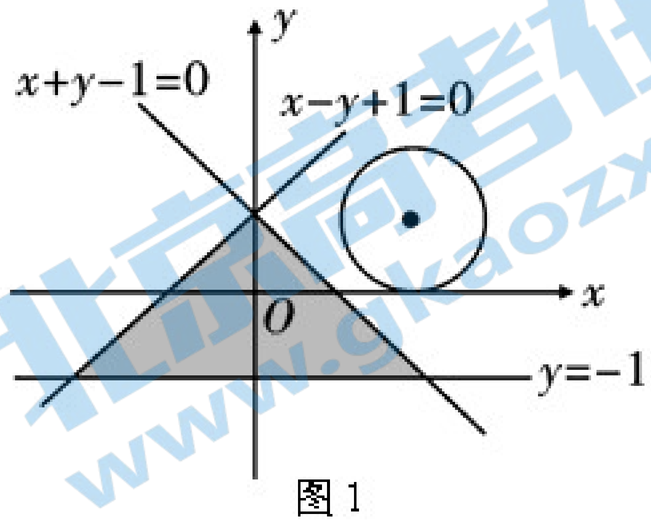

图 1

15．$\because \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-7$，$\therefore \tan\theta=\frac{4}{3}=\frac{AC}{BC}$，不妨设 $AC=4a$，$BC=3a$，则 $AB=5a$，

所以大正方形的面积为 $25a^2$，阴影小正方形的面积为 a^2，所以概率为 $P=\frac{1}{25}$．

16．由题意得 $F(1,0)$，准线方程为 l: $x=-1$，设 $M(x_0, y_0)$，过 A, B 两点分别作 AA', BB' 垂直于 l，则 $2|MN|=|AA'|+|BB'|=x_A+1+x_B+1=2x_0+2$，因为直线 m 的斜率存在，设为 k，则线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$，令 $y=0$，得 $x=ky_0+x_0$，即 $|OP|=ky_0+x_0$，由点差法得 $ky_0=2$，所以 $2(|OP|-|MN|)=2x_0+4-(2x_0+2)=2$．

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得 $\begin{cases}a_4+a_5=2a_1+7d=16,\\ S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=36,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$． ……………………………………………（6 分）

（2）$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$．

……………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）列联表如下：

	产品质量高	产品质量一般	合计
新设备产品	60	20	80
旧设备产品	48	72	120
合计	108	92	200

$\therefore k=\dfrac{200(60\times72-48\times20)^2}{108\times92\times80\times120}\approx23.67>6.635$，

所以有99%的把握认为产品质量高与引入新设备有关. ……………………（6分）

（2）由题意，从(15，20]中抽取1件产品，从(20，25]中抽取2件产品，从(25，30]中抽取3件产品，

故X可能的取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$，

X的分布列为

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{1}{20}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2}$. ……………………（12分）

19.（本小题满分12分）

（1）证明：$\because PA=AB=AD=1$，$PB=PD=\sqrt{2}$，

$\therefore PA\perp AB$，$PA\perp AD$，$AB\cap AD=A$，

$\therefore PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp BD$.

又$\because ABCD$为正方形，

$\therefore AC\perp BD$，$PA\cap AC=A$，$\therefore BD\perp$平面PAC. ……………………（6分）

（2）解：如图2，连接ED，取ED的中点M，

设$AC\cap BD=O$，连接OM，则$BE/\!/OM$，

从而$BE/\!/$平面ACM，平面ACM与PD的交点即为F.

建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，

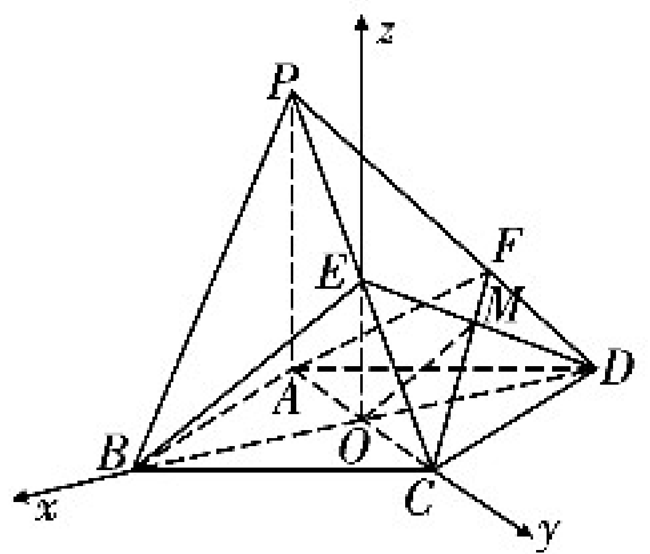

图2

$\overrightarrow{OC}=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OE}=\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$，

$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OD}}{2}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$，

平面 ACF 即平面 ACM ，设其法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -\sqrt{2}x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,\ 0,\ \sqrt{2})$，

易知平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$，

$\therefore\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因为二面角 $F-AC-D$ 为锐二面角，

故所求余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意 $\begin{cases}bc=\sqrt{3},\\ a+c=3,\end{cases}$ 解得 $a=2,\ b=\sqrt{3},\ c=1$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………（4 分）

（2）证明：因为直线 $l:\ y=kx+m(k\neq 0)$ 与椭圆 C 相切，

所以 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$\therefore\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=0$，化简得 $m^2=4k^2+3$，

由题意，直线 l_1 的方程为 $x=-2$，直线 l_2 的方程为 $x=2$，

所以 $P(-2,\ -2k+m),\ Q(2,\ 2k+m)$，

又 $F_1(-1,\ 0),\ F_2(1,\ 0)$，

$\therefore\overrightarrow{F_1P}=(-1,\ -2k+m)$，$\overrightarrow{F_1Q}=(3,\ 2k+m)$，

$\therefore\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=-3+m^2-4k^2=0$，

$\therefore\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，$\therefore\angle PF_1Q=\frac{\pi}{2}$，

同理得 $\overrightarrow{F_2P}=(-3,\ -2k+m)$，$\overrightarrow{F_2Q}=(1,\ 2k+m)$，

$\therefore \overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=-3+m^2-4k^2=0$，$\therefore \overrightarrow{F_2P}\perp\overrightarrow{F_2Q}$，

$\therefore \angle PF_2Q=\angle PF_1Q=\dfrac{\pi}{2}$． ……………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，$\because f'(x)=\mathrm{e}^x\left(a\ln x+\dfrac{2a}{x}+1-\dfrac{a}{x^2}\right)$，

$\therefore f'(1)=\mathrm{e}(2a+1-a)=0$，$\therefore a=-1$． ……………………………………………（4 分）

（2）证明：$\because f'(x)=\mathrm{e}^x\left(a\ln x+\dfrac{2a}{x}+1-\dfrac{a}{x^2}\right)$，

令 $h(x)=a\ln x+\dfrac{2a}{x}+1-\dfrac{a}{x^2}$，

当 $a>\dfrac{1}{\ln 2}$ 时，$h'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{2a}{x^2}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{a(x^2-2x+2)}{x^3}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增．

又 $h(1)=a+1>0$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-a\ln 2+1<0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，使得 $h(x_0)=0$．

且当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，所以 $x_1=x_0$，

所以 $x_1\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ 且 $h(x_1)=0$，即 $a\ln x_1+\dfrac{2a}{x_1}+1-\dfrac{a}{x_1^2}=0$．

又 $g(x_1)=a\ln x_1+1=\dfrac{a(1-2x_1)}{x_1^2}<0=g(x_2)$，

又当 $a>\dfrac{1}{\ln 2}$ 时，$g(x)$ 是单调递增函数，

所以 $x_1<x_2$ 得证． ……………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）圆 C：$\rho^2=6\rho\cos\theta+8\rho\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=6x+8y$，得 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

…………………………………………………………（5 分）

（2）因为直线 l 过点 M，当 $\angle ACB$ 最小时，直线 l 与 CM 垂直，

因为 $|CM|=2\sqrt{2}$，点 M 在圆 C 内部，

所以 $|MA|+|MB|=|AB|=2\sqrt{25-8}=2\sqrt{17}$.　…………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-2|+|x+1|=\begin{cases}-2x+1,\ x\leqslant -1,\\ 3,\ -1<x<2,\\ 2x-1,\ x\geqslant 2,\end{cases}$

当 $x\leqslant -1$ 时，$-2x+1\leqslant 5$，$\therefore -2\leqslant x\leqslant -1$；

当 $-1<x<2$ 时，$3\leqslant 5$ 成立，$\therefore -1<x<2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$2x-1\leqslant 5$，$\therefore 2\leqslant x\leqslant 3$.

综上，解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$.　……………………………………………（5 分）

（2）由题意，$f(x)_{\min}\leqslant 3$，

因为 $|x-a|+|x+1|\geqslant |a+1|$，当且仅当 $x-a$ 与 $x+1$ 异号时等号成立，

所以 $|a+1|\leqslant 3$, $\therefore -4\leqslant a\leqslant 2$.　…………………………………………（10 分）