高三考试数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\sqrt{x-2}>2\}$，$B=\{x\mid x^2-6x-7<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(6,8)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(6,7)$　　D. $[2,+\infty)$

2. 已知 $(1+\mathrm{i})(z+\mathrm{i})=2-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{17}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$，则

A. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $\alpha+2\beta=\pi$　　C. $\alpha=2\beta$　　D. $\alpha=\beta$

4. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{m^2+1}-\frac{y^2}{m}=1$ 的实轴长为 $2\sqrt{5}$，则 E 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{35}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{35}}{7}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

5. 已知直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 图象的一条对称轴，则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为

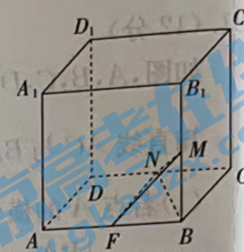
A. $[-1,1]$　　B. $[1,2]$　　C. $(-1,2]$　　D. $[-1,2]$

6. 某舞台灯光设备有一种 25 头 LED 矩阵灯（如图所示），其中有 2 头 LED 灯出现故障，假设每头 LED 灯出现故障都是等可能的，则这 2 头故障 LED 灯相邻（横向相邻或纵向相邻）的概率为

A. $\frac{2}{15}$　　B. $\frac{7}{60}$

C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{15}$

7. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,F 分别为 BB_1,CD,AB 的中点，则三棱锥 $B-MNF$ 的外接球的体积为



A. $\sqrt{5}\pi$

B. $\sqrt{6}\pi$

C. $\sqrt{3}\pi$

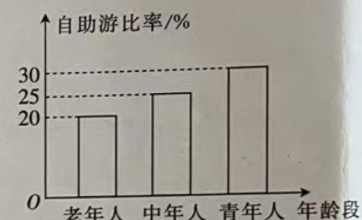
D. $2\sqrt{2}\pi$

8. 已知 $a=\frac{\sqrt{10}}{20}\ln 10$，$b=\frac{2\sqrt{2}}{e^3}$，$c=\frac{\ln 3}{3}$，则

A. $a<c<b$　　B. $c<b<a$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 随着生活水平的不断提高，旅游已经成为人们生活的一部分. 某地旅游部门从 2022 年到该地旅游的游客中随机抽取 10000 位游客进行调查，得到各年龄段游客的人数和旅游方式，如图所示，则



A. 估计 2022 年到该地旅游的游客中中年人和青年人占游客总人数的 80%

B. 估计 2022 年到该地旅游的游客中选择自助游的游客占游客总人数的 26.25%

C. 估计 2022 年到该地旅游且选择自助游的游客中青年人超过一半

D. 估计 2022 年到该地旅游的游客中选择自助游的青年人比到该地旅游的老年人还要多

10. 若 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数、奇函数、偶函数，则下列函数是偶函数的是

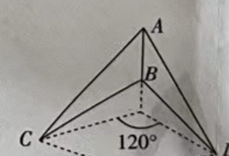
A. $y=f(g(x))h(x)$　　B. $y=f(g(x))+h(x)$

C. $y=f(h(x))g(x)$　　D. $y=f(x)|g(x)|h(x)$

11. 已知 A，B，C 是同一条直线上三个不同的点，O 为直线外一点. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4>2$，且 $\overrightarrow{OA}=a_2\overrightarrow{OB}+a_3\overrightarrow{OC}$，则 $\{a_n\}$ 的公比 q 的值可能是

A. $\sqrt{3}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{5}$，$AB=1$，$\cos\angle ABC=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，如图所示，将 $\triangle ABC$ 绕 AB 逆时针旋转 $120°$ 至 $\triangle ABD$ 处，则



A. 在旋转过程中，点 C 运动的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{5}\pi}{3}$

B. 点 B 到平面 ACD 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. 异面直线 AD 与 BC 所成的角为 $90°$

D. 直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知正数 a，b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，则 ab 的最小值为______▲______.

14. 满足直线 $l:x+y+m=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=2$ 有公共点的一个整数 $m=$______▲______.

15. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”. 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆被称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，则 C 的蒙日圆 O 的方程为___▲___；若过圆 O 上的动点 M 作 C 的两条切线，分别与圆 O 交于 P,Q 两点，则△MPQ 面积的最大值为___▲___.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}+ax-a\ln x$，若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=4$，$S_{n+1}=3S_n+4n+4$.

(1)证明：$\{a_n+2\}$是等比数列.

(2)若 $b_n=\log_3\frac{a_n+2}{2}$，求数列$\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

为了了解男、女学生对航天知识的了解情况，某调查机构进行了一个随机问卷调查（总分 100 分），调查的结果如下表所示. 若本次问卷调查的得分不低于 90 分，则认为该学生非常了解航天知识.

	男学生	女学生
不低于 90 分	8	2
低于 90 分	22	28

(1)判断是否有 95%的把握认为性别与是否非常了解航天知识有关；

(2)现将 3 个航天器模型纪念品随机分配给参与本次调查且非常了解航天知识的学生，设获得纪念品的女生人数为 X，求 X 的分布列以及数学期望.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

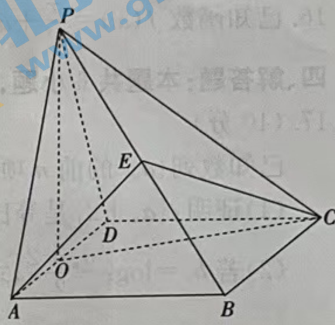
$\alpha=P(\chi^2\geqslant k)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

19.(12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形,$AD=2$,$AB=3$,$PA=PD=\sqrt{10}$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$. O 是 AD 的中点,E 是 PB 上一点,且 $AE/\!/$平面 POC.

(1)求$\dfrac{PE}{PB}$的值;

(2)求直线 CE 与平面 POC 所成角的正弦值.

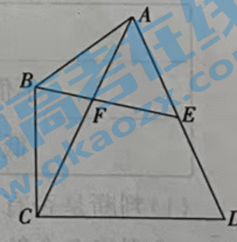


20.(12分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=3$,$AC=4$,$CD=\sqrt{15}$,$BC\perp CD$,E 为 AD 的中点,AC 与 BE 相交于点 F.

(1)求$\triangle ACD$ 的面积;

(2)求 $\sin\angle AFE$ 的值.

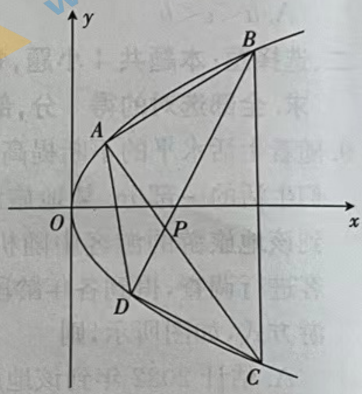


21.（12分）

如图，A,B,C,D 是抛物线 $E:y^2=4x$ 上的四个点（A,B 在 x 轴上方，C,D 在 x 轴下方），已知直线 AC 与 BD 的斜率分别为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 和 2，且直线 AC 与 BD 相交于点 P.

(1)若点 A 的横坐标为 6，则当△ADC 的面积取得最大值时，求点 D 的坐标.

(2)试问 $\frac{|PA|\cdot|PC|}{|PB|\cdot|PD|}$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$.

(1)求 $f(x)$ 的最值；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $g(x)=(x-1)e^{x}+ax^{2}+x+1$ 的图象与 $f(x)$ 的图象有两个不同的交点，求实数 a 的取值范围.

高三考试数学试卷参考答案

1. C　因为 $A=\{x|x>6\}$，$B=\{x|-1<x<7\}$，所以 $A\cap B=(6,7)$.

2. B　$z=\frac{2-4i}{1+i}-i=(1-2i)(1-i)-i=-1-4i$，故 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$.

3. D　$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta=\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta$，因为 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\alpha=\sin\beta$，故 $\alpha=\beta$.

4. A　由 $m^2+1>0$，知 E 的焦点在 x 轴上. 因为 E 的实轴长为 $2\sqrt{5}$，所以 $m^2+1=5$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$（舍去），则 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{5+2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}$.

5. D　由题可知，$-\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，则 $2\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-1,2]$.

6. A　这 2 头故障 LED 灯相邻的概率为 $\frac{4\times5\times2}{C_{25}^2}=\frac{2}{15}$.

7. B　由题知 $NF/\!/BC$，因为 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，所以 $NF\perp$ 平面 A_1ABB_1，因为 $MF\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $NF\perp MF$，又 $MB\perp BN$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle NFM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle MBN$ 有公共的斜边 MN，设 MN 的中点为 O，则点 O 到 M,N,B,F 的距离都相等，所以点 O 为三棱锥 $B-MNF$ 外接球的球心，MN 为该球的直径，所以 $2R=\sqrt{BC^2+CN^2+BM^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$，$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，该球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times(\frac{\sqrt{6}}{2})^3\pi=\sqrt{6}\pi$.

8. D　设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>e)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，则 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上是减函数. 又 $e<3<\sqrt{10}<e^3$，且 $a=f(\sqrt{10})=\frac{\ln\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$，$f(e^3)=\frac{\ln e^3}{e^3}=\frac{3}{e^3}>\frac{2\sqrt{2}}{e^3}=b$，$c=f(3)=\frac{\ln 3}{3}$，所以 $f(3)>f(\sqrt{10})>f(e^3)>b$，即 $b<a<c$.

9. ABC　设 2022 年到该地旅游的游客总人数为 a，
由题意可知游客中老年人、中年人、青年人的人数分别为 $0.2a$，$0.35a$，$0.45a$，
其中选择自助游的老年人、中年人、青年人的人数分别为 $0.04a$，$0.0875a$，$0.135a$，
所以 2022 年到该地旅游的游客中中年人和青年人的人数为 $0.35a+0.45a=0.8a$，所以 A 正确；
因为 2022 年到该地旅游的游客选择自助游的人数为 $0.04a+0.0875a+0.135a=0.2625a$，所以 B 正确；
因为 2022 年到该地旅游且选择自助游的游客的人数为 $0.2625a$，其中青年人的人数为 $0.135a$，所以 C 正确；
因为 2022 年到该地旅游的游客中选择自助游的青年人的人数为 $0.135a$，而到该地旅游的老年人的人数为 $0.2a$，所以 D 错误.

10. ABD　若 $F(x)=f(g(x))h(x)$，则 $F(-x)=f(g(-x))h(-x)=f(-g(x))h(x)=f(g(x))h(x)$，
则 $y=f(g(x))h(x)$ 是偶函数.
若 $F(x)=f(g(x))+h(x)$，则 $F(-x)=f(g(-x))+h(-x)=f(-g(x))+h(x)=f(g(x))+h(x)$，则 $y=f(g(x))+h(x)$ 是偶函数.
若 $F(x)=f(h(x))g(x)$，则 $F(-x)=f(h(-x))g(-x)=-f(h(x))g(x)$，则 $y=f(h(x))g(x)$ 是奇函数.
若 $F(x)=f(x)|g(x)|h(x)$，则 $F(-x)=f(-x)|g(-x)|h(-x)=f(x)|-g(x)|h(x)=f(x)|g(x)|\cdot h(x)$，则 $y=f(x)|g(x)|h(x)$ 是偶函数.

11. CD　因为 A,B,C 是同一条直线上三个不同的点，且 $\overrightarrow{OA}=a_2\overrightarrow{OB}+a_3\overrightarrow{OC}$，所以 $a_2+a_3=1$.

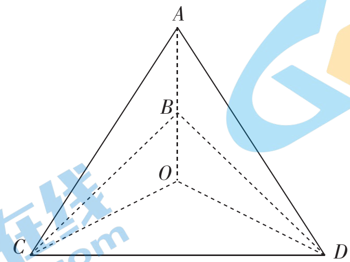
因为 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，所以公比 $q>0$.

因为$\frac{a_4}{q^2}+\frac{a_4}{q}=1$，所以 $a_4=\frac{q^2}{1+q}>2$，又 $q>0$，所以 $q>1+\sqrt{3}$.

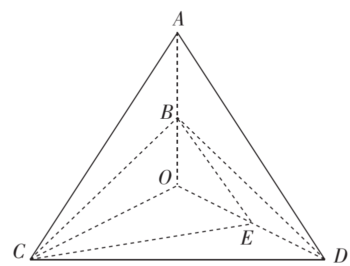
12. BCD　过 C 作 $CO\perp AB$，交 AB 的延长线于 O，则 $DO\perp AB$，$\angle COD=120°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，$BC=\sqrt{5}$，$\cos\angle CBO=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $BO=1$，$CO=DO=2$，

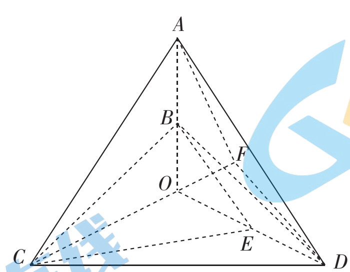
所以在旋转过程中，点 C 运动的轨迹长度为$\frac{1}{3}\times 2\pi\times 2=\frac{4\pi}{3}$，故 A 错误.



在$\triangle ACD$ 中，$AC=AD=2\sqrt{2}$，$CD=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ACD}=\sqrt{15}$. 设点 B 到平面 ACD 的距离为 h，因为 $V_{A-BCD}=\frac{1}{2}V_{A-COD}=\frac{\sqrt{3}}{3}=V_{B-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot h$，所以 $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 B 到平面 ACD 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 B 正确.



取 OD 的中点 E，连接 BE，则 $BE/\!/AD$，连接 CE，所以$\angle CBE$ 为所求角，在$\triangle CBE$ 中，$BC=\sqrt{5}$，$BE=\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{7}$，所以 $BC^2+BE^2=CE^2$，所以 $BC\perp BE$，所以异面直线 AD 与 BC 所成的角为 $90°$，故 C 正确.



过 D 作 $DF\perp CO$，交 CO 的延长线于 F，连接 AF，则 $DF\perp$平面 ABC，所以$\angle DAF$ 为所求的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DFA$ 中，$DF=\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle DAF=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，故 D 正确.

13. 8　因为 $a>0$，$b>0$，所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2a+b}{ab}\geqslant\frac{2\sqrt{2ab}}{ab}$，所以 $ab\geqslant 2\sqrt{2ab}$，解得 $ab\geqslant 8$，当且仅当 $a=2$，$b=4$ 时，等号成立.

14. 2(或-2，-1，0，1，只需填写一个答案即可)　由题可知，$\frac{|m|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqslant\sqrt{2}$，解得$-2\leqslant m\leqslant 2$.

15. $x^2+y^2=12$；12　由题意可知，点$(2\sqrt{2},2)$一定在蒙日圆 O 上，所以蒙日圆 O 的半径 $r=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}$，所以蒙日圆 O 的方程为 $x^2+y^2=12$. 因为 M,P,Q 都在圆 O 上，且$\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$，所以 PQ 为圆 O 的直

径，所以$|PQ|=4\sqrt{3}$，故$\triangle MPQ$面积的最大值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=12$.

16. $(-\infty,-\frac{1}{e}]$　$f(x)\leqslant0$等价于$e^{-x+\ln x}-a(-x+\ln x)\leqslant0$，令$t=-x+\ln x$，则$t'=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$. 当$x\in(0,1)$时，$t'>0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$t'<0$. 故$t\leqslant-1$. $f(x)\leqslant0$转化为$e^t-at\leqslant0$，即$a\leqslant\frac{e^t}{t}$. 令$g(t)=\frac{e^t}{t}$，$t\leqslant-1$，则$g'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}<0$，则$g(t)\geqslant g(-1)=-\frac{1}{e}$，故$a$的取值范围为$(-\infty,-\frac{1}{e}]$.

17. (1)证明：当$n=1$时，$S_2=3S_1+8$. 因为$a_1=4$，所以$a_2=16$. ………………………… 1分

当$n\geqslant2$时，因为$S_{n+1}=3S_n+4n+4$，所以$S_n=3S_{n-1}+4(n-1)+4$，………………… 2分

则$a_{n+1}=3a_n+4$，即$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$. ………………………… 4分

又$a_2+2=3(a_1+2)$，所以$\{a_n+2\}$是以6为首项，3为公比的等比数列. ………………… 5分

(2)解：由(1)可知$a_n+2=6\times3^{n-1}=2\times3^n$，………………………… 6分

所以$b_n=\log_3\frac{a_n+2}{2}=n$，$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，………………… 8分

故$T_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ………………… 10分

18. 解：(1)$\chi^2=\frac{60\times(8\times28-2\times22)^2}{10\times50\times30\times30}=4.32$. ………………………… 4分

因为$P(\chi^2\geqslant3.841)=0.05$，所以有95%的把握认为性别与是否非常了解航天知识有关. ………… 5分

(2)获得纪念品的女生人数X的可能取值为0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$；………………………… 6分

$P(X=1)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$；………………………… 7分

$P(X=2)=\frac{C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$. ………………………… 8分

X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

………………………… 10分

$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$. ………………………… 12分

19. 解：(1)设平面AOE与直线PC相交于点F，连接EF，OF.

因为$AE/\!/$平面POC，$AE\subset$平面$AEFO$，平面$AEFO\cap$平面$POC=FO$，

所以$AE/\!/FO$. ………………………… 2分

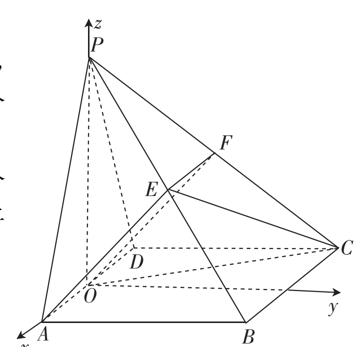
因为$AO/\!/BC$，$BC\subset$平面PBC，$AO\not\subset$平面PBC，所以$AO/\!/$平面PBC.

………………………… 4分

又平面$AEFO\cap$平面$PBC=EF$，所以$AO/\!/EF$，所以四边形$AEFO$为平行四边形，

所以$EF=AO=\frac{1}{2}BC$，所以E，F分别为PB，PC的中点，故$\frac{PE}{PB}=\frac{1}{2}$.

………………………… 6分



(2)以点O为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$Oxyz$，则$O(0,0,0)$，$C(-1,3,0)$，$P(0,0,3)$，

$E(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{OC}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{CE}=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. ································ 8 分

设平面 POC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-x+3y=0,\\3z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(3,1,0)$. ················ 10 分

设直线 CE 与平面 POC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$. ···················· 12 分

20. 解：(1)在△ABC 中，$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{16+9-4}{2\times4\times3}=\frac{7}{8}$. ···························· 2 分

因为 $BC\perp CD$，所以 $\sin\angle ACD=\cos\angle ACB=\frac{7}{8}$， ·· 3 分

所以△ACD 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{15}\times\frac{7}{8}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$. ···························· 5 分

(2)由(1)可知，$\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. 在△$ACD$ 中，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD=16$，故 $AD=4$，则 $AE=2$. ·· 6 分

在△ABC 中，由 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，解得 $\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，则 $\cos\angle BAC=\frac{11}{16}$. ··················· 7 分

在△ACD 中，由 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，解得 $\sin\angle CAD=\frac{7\sqrt{15}}{32}$，则 $\cos\angle CAD=\frac{17}{32}$. ·················· 8 分

$\cos\angle BAD=\cos(\angle BAC+\angle CAD)=\cos\angle BAC\cos\angle CAD-\sin\angle BAC\sin\angle CAD=-\frac{1}{4}$. ·············· 9 分

因为 $AE=AB$，所以 $\angle ABE=\angle AEB$，所以 $\cos 2\angle ABE=\cos(\pi-\angle BAE)=-\cos\angle BAE=\frac{1}{4}$，······ 10 分

故 $2\cos^2\angle ABE-1=\frac{1}{4}$，解得 $\cos\angle ABE=\frac{\sqrt{10}}{4}$，则 $\sin\angle ABE=\frac{\sqrt{6}}{4}$. ···································· 11 分

$\sin\angle AFE=\sin(\angle ABE+\angle BAC)=\sin\angle ABE\cos\angle BAC+\cos\angle ABE\sin\angle BAC=\frac{13\sqrt{6}}{32}$. ················ 12 分

21. 解：(1)由题可知，点 A 的坐标为 $(6,2\sqrt{6})$，直线 AC 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+4\sqrt{6}$，则 $|AC|$ 的长度为定值. ···
·· 1 分

将直线 AC 平移到与抛物线 E 相切，切点为 D，此时△ADC 的面积取得最大值. 设切线的方程为 $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+m$，联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+m,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2+2\sqrt{6}y-2\sqrt{6}m=0$. ································· 2 分

$\Delta=(2\sqrt{6})^2+4\times2\sqrt{6}m=0$，解得 $m=-\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $y=-\sqrt{6}$，$x=\frac{3}{2}$，故点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2},-\sqrt{6})$. ········· 4 分

(2)设 $P(x_0,y_0)$，则直线 BD 的方程为 $y-y_0=2(x-x_0)$，联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\y-y_0=2(x-x_0),\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-2y+2y_0-4x_0=0$，·· 5 分

则 $y_B+y_D=2$，$y_By_D=2y_0-4x_0$. ·· 6 分

同理可得，$y_A+y_C=-2\sqrt{6}$，$y_Ay_C=-2\sqrt{6}y_0-4x_0$. ·· 7 分

$|PA|=\sqrt{1+\frac{1}{(-\frac{\sqrt{6}}{3})^2}}|y_A-y_0|=\frac{\sqrt{10}}{2}|y_A-y_0|$，$|PC|=\sqrt{1+\frac{1}{(-\frac{\sqrt{6}}{3})^2}}|y_C-y_0|=\frac{\sqrt{10}}{2}|y_C-y_0|$，

$|PB|=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}|y_B-y_0|=\frac{\sqrt{5}}{2}|y_B-y_0|$，$|PD|=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}|y_D-y_0|=\frac{\sqrt{5}}{2}|y_D-y_0|$，………………… 9 分

所以$\frac{|PA|\cdot|PC|}{|PB|\cdot|PD|}=\frac{2(y_A-y_0)(y_C-y_0)}{(y_B-y_0)(y_D-y_0)}=\frac{2[y_Ay_C-(y_A+y_C)y_0+y_0^2]}{y_By_D-(y_B+y_D)y_0+y_0^2}=\frac{2(y_0^2-4x_0)}{y_0^2-4x_0}=2$. ………… 11 分

故$\frac{|PA|\cdot|PC|}{|PB|\cdot|PD|}$是定值，且该定值为 2. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$，所以 $f'(x)=\ln(x+1)+1$， ………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{e}-1$， ……………………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$在$(-1,\frac{1}{e}-1)$上单调递减，在$(\frac{1}{e}-1,+\infty)$上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e}-1)=-\frac{1}{e}$，无最大值. ……………………………………………………… 4 分

(2)令 $h(x)=(x-1)e^x-(x+1)\ln(x+1)+ax^2+x+1$，则 $h(x)$在$[0,+\infty)$上有两个零点.

$h'(x)=xe^x-\ln(x+1)+2ax$， ………………………………………………………………………………… 5 分

令 $\varphi(x)=h'(x)=xe^x-\ln(x+1)+2ax$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x+1}+2a$，

因为 $\varphi'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)=2a$. ………………………………… 6 分

当 $a\geqslant0$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$，$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即 $h'(x)\geqslant0$，

则 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，

所以 $h(x)$有且仅有 1 个零点，不符合条件. ………………………………………………………… 7 分

当 $a<0$ 时，$\varphi'(0)=2a<0$，$\varphi'(-2a)=(-2a+1)e^{-2a}-\frac{1}{-2a+1}+2a>-2a+1-1+2a=0$，

所以存在 $x_0\in(0,-2a)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$. ……………………………………………………… 8 分

当 $x\in[0,x_0)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，且 $\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增， ………………………………………………… 9 分

因为当 $x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$，所以存在 t，使得 $\varphi(t)=0$.

当 $x\in[0,t)$时，$h'(x)\leqslant0$，则 $h(x)$在$[0,t)$上单调递减，

当 $x\in(t,+\infty)$时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$在$(t,+\infty)$上单调递增. ……………………………… 11 分

因为 $h(0)=0$，且 $x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，所以 $h(x)$在$[0,+\infty)$上有两个零点.

所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,0)$. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。