

2019 北京汇文中学高一（上）期中

数 学

一、选择

1、若集合 $A=\{0.1.2.4\}$, $B=\{1.2.3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0.1.2.3.4\}$ B. $\{1.2.\}$ C. $\{0.4\}$ D. $\{3\}$

2、下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是

- A. $y=\frac{1}{x}$ B. $y=(x-1)^2$ C. $y=2^{-x}$ D. $y=\log_2(x+1)$

3. 设 $a=\log_2\pi$, $b=\log_{\frac{1}{2}}\pi$, $c=\pi^{-2}$ 则

- A. $a>b>c$ B. $b>a>c$ C. $a>c>b$ D. $c>b>a$

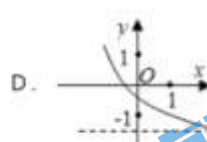
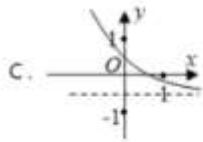
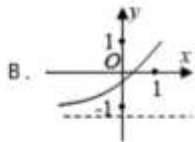
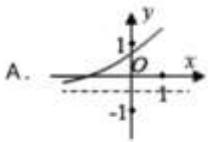
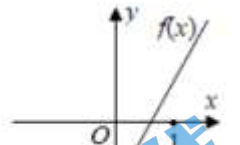
4. 设 a, b 为实数，则 “ $ab<1$ ” 是 “ $0<a<\frac{1}{b}$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 函数 $y=\begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$ 的值域是

- A. \mathbb{R} B. $[0, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

6. 已知函数 $f(x)=ax+b$ 的图象如右图所示，则函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能是



7. 已知函数 $g(x)=f(x)-x$ 是偶函数，且 $f(3)=4$ ，则 $f(-3)=$

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 4

8. “ $x>0$ ” 是 $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知实数 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$, $f(1-a) \geq f(1+a)$ 则实数 a 的取值范围是

- (A) $[-2, -1] \cup (0, +\infty)$ (B) $[-2, -1]$ (C) $(-\infty, 0)$ (D) $(0, +\infty)$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2}, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ \ln(x+1), & x \in (-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4x - 4$, 设 b 为实数，若存在实数 a , 使得 $f(a) + g(b) = 0$, 则 b 的取值范围是

- A. $[-1, 5]$ B. $(-\infty, -1) \cup [5, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 5]$

二、填空

11. 函数 $y = \sqrt{2^x - 2}$ 的定义域为 _____

12. 函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x > 0 \\ x^2 - 4, & x < 0 \end{cases}$ 的零点是 ()

13. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 若 $f(m) > f(2)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

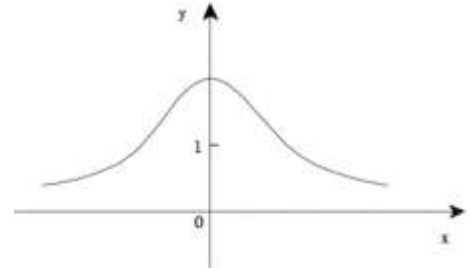
14. 方程 $x^2 + 2x = 21$ 的解的个数为 _____, 若有解, 则将其解按四舍五入精确到个位, 得到的近似解 _____

15. 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$ 的图象如图所示, 则实数 a, b, c 的大小关系是 _____

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$

①若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____

②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____



三、解答: (共 30 分)

17. (6 分) 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | 0 < x < a\}$.

(I) 若 $a=5$, 求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$;

(II) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

18. (7 分)

(I) 证明: 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 2]$ 上是减函数;

(II) 设常数 $a \in (1, 9)$, 求函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在 $x \in [1, 3]$ 上的最大值和最小值.

19. (8 分) 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足: “对于区间 $(0, +\infty)$ 上的任意 a, b 都有 $f(a+b) > f(b)$ 成立”.

(I) 求 $f(0)$ 的值, 并指出 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(II) 用增函数的定义证明, 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0)$ 上的增函数;

(III) 判断 $f(x)$ 是否为 \mathbb{R} 上的增函数, 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

20. (9分) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件:

① 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+2) \geq f(x) + 2$;

② 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+3) \leq f(x) + 3$. 设 $g(x) = f(x) - x$.

(I) 证明 $g(x+3) \leq g(x) \leq g(x+2)$.

(II) 若 $f(4) = 5$ 求, $f(2020)$ 的值.

