秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2022年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数 $z=\dfrac{m-i}{1+i}$ 是实数，则实数 $m=$

A．-1　　　B．0　　　C．1　　　D．2

2．下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A．$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　　　B．$y=|x|-x^2$　　　C．$y=|x|-1$　　　D．$y=x-\dfrac{1}{x}$

3．某种包装的大米质量 ξ（单位：kg）服从正态分布 $\xi\sim N\left(10,\sigma^2\right)$，根据检测结果可知 $P(9.98\leqslant\xi\leqslant10.02)=0.98$，某公司购买该种包装的大米2000袋，则大米质量在10.02 kg以上的袋数大约为

A．10　　　B．20　　　C．30　　　D．40

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2+a_5+a_8=\pi$，则 $\tan(a_1+a_9)=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

5. 如果函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像关于点 $\left(-\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值是

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

6. 甲，乙，丙，丁四支足球队进行单循环比赛（每两个球队都要比赛一场），每场比赛的计分方法是：胜者得3分，负者得0分，平局两队各得1分．全部比赛结束后，四队的得分为：甲6分，乙5分，丙4分，丁1分，则

A. 甲胜乙　　B. 乙胜丙　　C. 乙平丁　　D. 丙平丁

7. 已知抛物线 $C_1:y^2=4x$，圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=2$，直线 $l:y=k(x-1)$ 与 C_1 交于 A，B 两点，与 C_2 交于 M，N 两点，若 $|AB|=8$，则 $|MN|=$

A. $\sqrt{14}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

8. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若集合 $M=\{x|x^2<x\}$，$N=\{x|x^2<\log_a x\}$，且 $N\subseteq M$，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$　　B. $(0,1)\cup\left[e^{\frac{1}{e}},+\infty\right)$

C. $(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{2e}}\right]$　　D. $(0,1)\cup\left[e^{\frac{1}{2e}},+\infty\right)$

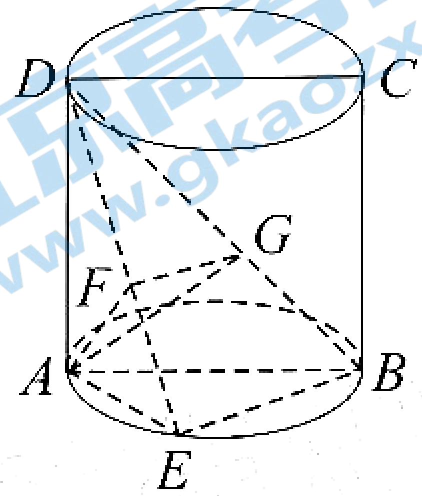
二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 抛掷两枚质地均匀的骰子，记“第一枚骰子出现的点数小于3”为事件 A，“第二枚骰子出现的点数不小于3”为事件 B，则下列结论中正确的是

A. 事件 A 与事件 B 互为对立事件　　B. 事件 A 与事件 B 相互独立

C. $P(B)=2P(A)$　　D. $P(A)+P(B)=1$

10．如图，圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形，E 在底面圆周上，$AE=BE$，$AF\perp DE$，F 是垂足，G 在 BD 上，$DG=2BG$，则下列结论中正确的是



A．$AF\perp BD$

B．直线 DE 与直线 AG 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$

C．直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

D．若平面 $AFG\cap$ 平面 $ABE=l$，则 $l\parallel FG$

11．已知 $a>0$，$b>0$，直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2b+1$ 相切，则下列不等式成立的是

A．$ab\leqslant\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 8$　　C．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$3^{a+b}\leqslant\sqrt{3}$

12．我们常用的数是十进制数，如 $1079=1\times10^3+0\times10^2+7\times10^1+9\times10^0$，表示十进制的数要用 10 个数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9；而电子计算机用的数是二进制数，只需两个数码 0 和 1．如四位二进制的数 $1101_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$，等于十进制的数 13．把 m 位 n 进制中的最大数记为 $M(m,n)$，其中 m，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$，$M(m,n)$ 为十进制的数，则下列结论中正确的是

A．$M(5,2)=31$　　B．$M(4,2)=M(2,4)$

C．$M(n+2,n+1)<M(n+1,n+2)$　　D．$M(n+2,n+1)>M(n+1,n+2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__________．

14．写出一个同时满足下列性质①②③的双曲线方程__________．

① 中心在原点，焦点在 y 轴上；② 一条渐近线方程为 $y=2x$；③ 焦距大于 10．

15．函数 $f(x)=\sin\pi x-\ln|2x-3|$ 的所有零点之和为__________．

16．在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=2$，$AD=CD=CB=1$，将△ ACD 沿 AC 折起，连接 BD，得到三棱锥 $D-ABC$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为__________，此时该三棱锥的外接球的表面积为__________．（第一个空 2 分，第二个空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

问题：已知 $n\in\mathbf{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，是否存在数列 $\{a_n\}$，满足 $S_1=1$，$a_{n+1}\geqslant 1+a_n$，_____？若存在，求通项公式 a_n；若不存在，说明理由．

在① $a_{n+1}=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$；② $a_n=S_{n-1}+n\left(n\geqslant 2\right)$；③ $a_{n+1}=2a_n+n-1$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（12 分）

某校为全面加强和改进学校体育工作，推进学校体育评价改革，建立了日常参与，体质监测和专项运动技能测试相结合的考查机制．在一次专项运动技能测试中，该校随机抽取 60 名学生作为样本进行耐力跑测试，这 60 名学生的测试成绩等级及频数如下表．

成绩等级	优	良	合格	不合格
频数	7	11	41	1

（1）从这 60 名学生中随机抽取 2 名学生，这 2 名学生中耐力跑测试成绩等级为优或良的人数记为 X，求 $P\left(X=1\right)$；

（2）将样本频率视为概率，从该校的学生中随机抽取 3 名学生参加野外拉练活动，耐力跑测试成绩等级为优或良的学生能完成该活动，合格或不合格的学生不能完成该活动，能完成活动的每名学生得 100 分，不能完成活动的每名学生得 0 分．这 3 名学生所得总分记为 Y，求 Y 的数学期望．

19. （12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=90^{\circ}$，$\angle D=60^{\circ}$，$AC=6$，$CD=3\sqrt{3}$.

（1）求 $\triangle ACD$ 的面积；

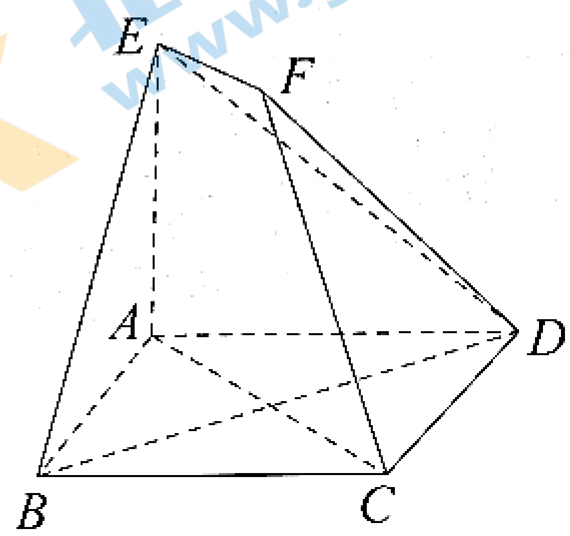
（2）若 $\cos\angle ACB=\frac{9}{16}$，求 $AB+\frac{3}{4}BC$ 的值.

20. （12 分）

如图，已知四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，$EF\parallel AC$，$AC=2EF$，平面 $AEFC\perp$ 平面 $ABCD$，$AE=AB$.

（1）求证：平面 $BED\perp$ 平面 $AEFC$；

（2）若 $AE\perp AC$，求二面角 $A-CF-D$ 的余弦值.



21．（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴长为 4．

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P(-3,0)$ 作两条相互垂直的直线 l_1 和 l_2，直线 l_1 与 C 相交于两个不同点 A，B，在线段 AB 上取点 Q，满足 $\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}$，直线 l_2 交 y 轴于点 R，求△ PQR 面积的最小值．

22．（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=2x\ln x-x^2-mx+1$．

（1）若 $m=0$，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $m<0$，$0<b<a$，证明：$2\ln\frac{a+b}{a-b}<\frac{4ab}{a^2-b^2}-m$．

2022年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	B	C	B	D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9. BCD　　10. AD　　11. AC　　12. ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $\frac{1}{2}$　　14. $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{6}=1$　　15. 9　　16. $\frac{\sqrt{3}}{12}$，5π

说明: 第(14)题答案可以为: $\frac{y^2}{4b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\left(b^2>5\right)$.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.　(10分)

解：若选条件①.

由于$a_1=S_1=1>0$，$a_{n+1}\geq 1+a_n$，得$a_n>0$.　……………………………1分

由$a_{n+1}=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$，得$S_{n+1}-S_n=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$，　…………………………2分

得$\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)=2\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$，　……………………………3分

因为$\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\neq 0$，

所以$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=2$.　……………………………4分

所以数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$是首项为$\sqrt{S_1}=1$，公差为2的等差数列.　…………………………5分

所以$\sqrt{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$.

所以 $S_n=(2n-1)^2$． ……………………………………………6 分

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8n-8$， ……………………7 分

由于 $a_1=1$ 不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 8n-8, & n\ge 2.\end{cases}$ ……………………………………………8 分

因为 $a_2=8$，$1+a_1=2$，满足 $a_2\ge 1+a_1$．

当 $n\ge 2$ 时，$a_{n+1}-(1+a_n)=7>0$，满足 $a_{n+1}\ge 1+a_n$． 缺验证扣1分………9 分

所以选择①时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 8n-8, & n\ge 2.\end{cases}$ ………………10 分

若选条件②．

由于 $a_n=S_{n-1}+n\,(n\ge 2)$，得 $a_2=S_1+2=3$． ……………………1 分

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_{n-1}+n$，$a_{n+1}=S_n+n+1$， ……………………2 分

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1$， ……………………3 分

得 $a_{n+1}=2a_n+1$， ……………………4 分

得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)(n\ge 2)$． ……………………5 分

由于 $a_2+1=4=2(a_1+1)$， ……………………6 分

则数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 $a_1+1=2$，公比为 2 的等比数列． ……………………7 分

故 $a_n+1=2\times 2^{n-1}$，即 $a_n=2^n-1$． ……………………8 分

因为 $a_{n+1}-(1+a_n)=(2^{n+1}-1)-(1+2^n-1)=2^n-1>0$， 缺验证扣1分………9 分

所以 $a_{n+1}>1+a_n$，符合题意．

所以选择②时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=2^n-1$． ……………………10 分

若选条件③．

$a_1=S_1=1$． ……………………1 分

因为 $a_{n+1}=2a_n+n-1$，得 $a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$， ……………………3 分

由于 $a_1+1=2\ne 0$，则 $a_n+n\ne 0$． ……………………4 分

则 $\dfrac{a_{n+1}+(n+1)}{a_n+n}=2$. ·······················5 分

所以 $\{a_n+n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列. ·······················6 分

所以 $a_n+n=2^n$，即 $a_n=2^n-n$. ·······················7 分

因为 $a_{n+1}-(1+a_n)=2^{n+1}-(n+1)-(1+2^n-n)=2^n-2\geq 0$， ·······················8 分

满足 $a_{n+1}\geq 1+a_n$. 缺验证扣1分·········9 分

所以选择③时问题中的数列 $\{a_n\}$ 存在，此时 $a_n=2^n-n$. ·······················10 分

18. （12 分）

（1）解：根据题意，这 60 名学生中耐力跑测试成绩等级为优或良的人数为 $7+11=18$，

···1 分

成绩等级为合格或不合格的人数为 42. ···2 分

则 $P(X=1)=\dfrac{C_{18}^1C_{42}^1}{C_{60}^2}=\dfrac{126}{295}$. ···4 分

（2）解法 1：从该校的学生中随机抽取 3 名，相当于进行了 3 次独立重复试验，设所抽取的 3 名学生中耐力跑成绩为优或良的人数为 ξ，则 ξ 服从二项分布 $B(3,p)$. ·········5 分

由题意得任取 1 名学生耐力跑成绩为优或良的频率为 $\dfrac{7+11}{60}=0.3$， ··············6 分

将样本频率视为概率得 $p=0.3$. ···7 分

根据二项分布的均值公式得 $E\xi=3p=0.9$. 有期望=3P给1分 ·········9 分

根据题意得 $Y=100\xi$， ···10 分

所以 Y 的数学期望为 $EY=100E\xi=90$. 有第一个等式给1分·····················12 分

解法 2：从该校的学生中随机抽取 3 名，相当于进行了 3 次独立重复试验，设所抽取的 3 名学生中耐力跑成绩为优或良的人数为 ξ，则 ξ 服从二项分布 $B(3,p)$. ·········5 分

由题意得任取 1 名学生耐力跑成绩为优或良的频率为 $\dfrac{7+11}{60}=0.3$， ··············6 分

将样本频率视为概率得 $p=0.3$. ···7 分

而 $Y=100\xi$，则 Y 的所有可能取值为 0，100，200，300. ·······················8 分

且 $P(Y=0)=C_3^0\times0.3^0\times0.7^3=0.343$，$P(Y=100)=C_3^1\times0.3^1\times0.7^2=0.441$，

$P(Y=200)=C_3^2\times0.3^2\times0.7^1=0.189$，$P(Y=300)=C_3^3\times0.3^3\times0.7^0=0.027$.

……………………………………………………10 分

所以 Y 的分布列为：

Y	0	100	200	300
P	0.343	0.441	0.189	0.027

P的值错一个或两个扣1分……11 分

所以 Y 的数学期望为 $EY=0\times0.343+100\times0.441+200\times0.189+300\times0.027=90$.

……………………………………………………12 分

19. （12 分）

（1）解：在△ ACD 中，$\angle D=60^\circ$，$AC=6$，$CD=3\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\angle D$，……………………………1 分

即 $36=AD^2+27-2\cdot AD\times3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}$，

整理得 $AD^2-3\sqrt{3}AD-9=0$，……………………………2 分

解得 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$ 或 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{2}$（舍去），……………………………3 分

所以 $AD=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$.……………………………4 分

所以△ ACD 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin60^\circ=\dfrac{27\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{8}$. 只看结论……5 分

（2）解法 1：在△ ACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle D}$，

得 $\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$.……………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAD=90^\circ-\angle CAD$，

则 $\sin\angle BAC=\cos\angle CAD=\sqrt{1-\sin^2\angle CAD}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，正弦值或余弦值有一个正确就给分……7 分

$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$.

因为 $\cos\angle ACB=\dfrac{9}{16}$，则 $\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$. 只看结果…………8 分

因为 $\angle BAC+\angle ACB+\angle B=\pi$，

则 $\sin\angle B=\sin\left(\angle BAC+\angle ACB\right)=\sin\angle BAC\cos\angle ACB+\cos\angle BAC\sin\angle ACB$

$=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$. 只看结果……………………9 分

在△ ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

得 $AB=5$，$BC=4$. 一个值1分……………11 分

所以 $AB+\dfrac{3}{4}BC=8$.……………………………12 分

解法 2：在△ ACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle D}$，

得 $\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$. ……………………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAD=90^\circ-\angle CAD$，

则 $\cos\angle BAC=\cos\left(90^\circ-\angle CAD\right)=\sin\angle CAD=\dfrac{3}{4}$. 有正弦等于余弦给1分………8 分

在△ ABC 中，$\cos\angle ACB=\dfrac{9}{16}$，由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$，

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

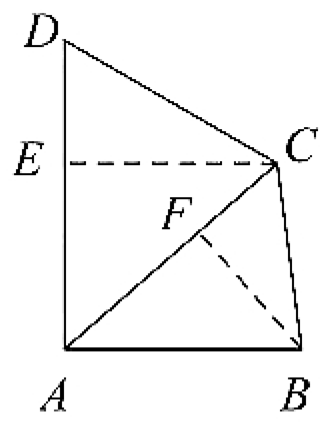
即 $AB^2=36+BC^2-\dfrac{27}{4}BC$，① ……………………………………9 分

$BC^2=AB^2+36-9AB$，② ……………………………………10 分

①＋②得 $AB+\dfrac{3}{4}BC=8$. ……………………………………12 分

[另法]

（1）解：如图，作 $CE\perp AD$ 于 E，



在 Rt△ CED 中，$\angle D=60^\circ$，$CD=3\sqrt{3}$，

则 $CE=CD\cdot\sin 60^\circ=3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{2}$，…………………1 分

$DE=CD\cdot\cos 60^\circ=3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. …………………2 分

在 Rt△ AEC 中，$AC=6$，则 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. …………………3 分

故 $AD=AE+DE=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{2}$. ……………………………4 分

所以△ ACD 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot CE=\dfrac{27\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{8}$. …………………5 分

（2）解：在 Rt△ AEC 中，得 $\sin\angle CAE=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{3}{4}$. ……………………………6 分

因为 $\angle BAC=\angle A-\angle CAE=90^\circ-\angle CAE$，

则 $\cos\angle BAC=\cos\left(90^\circ-\angle CAE\right)=\sin\angle CAE=\dfrac{3}{4}$. 有正弦等于余弦给1分………8 分

在△ ABC 中，作 $BF\perp AC$ 于 F，则 $AC=AF+CF$，……………………………9 分

得 $6=AB\cdot\cos\angle BAC+BC\cdot\cos\angle ACB$. ……………………………10 分

因为 $\cos\angle ACB=\dfrac{9}{16}$，

所以 $6=\dfrac{3}{4}AB+\dfrac{9}{16}BC$ 得 $AB+\dfrac{3}{4}BC=8$ ……………………~~一个等式1分~~…… 12 分

20.（12 分）

（1）证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$. ……………………………1 分

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $AEFC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $AEFC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，

所以 $BD\perp$ 平面 $AEFC$. ……………………………………………………2 分

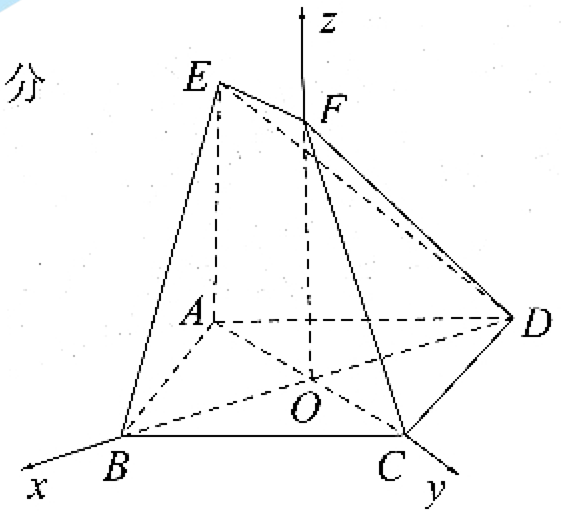
因为 $BD\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BED\perp$ 平面 $AEFC$. ……………………………3 分

（2）解法 1：设 $AC\cap BD=O$，连接 OF，

由 $BD\perp$ 平面 $AEFC$， $AE\subset$ 平面 $AEFC$，得 $AE\perp BD$. ………………………4 分

因为 $AE\perp AC$， $AC\subset$ 平面 $ABCD$， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………5 分



因为 $EF\parallel AC$， $AO=\frac{1}{2}AC=EF$，

所以四边形 $AEFO$ 是平行四边形.

所以 $AE\parallel OF$.

所以 $OF\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………6 分

以 OB， OC， OF 分别为 x， y， z 轴建立如图所示空间坐标系 $O-xyz$，

由于 $AE=AB=2$，则 $B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),D(-\sqrt{3},0,0),F(0,0,2)$， ……………7 分

则 $\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},-1,0)$， $\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$， $\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{3},0,0\right)$. ……………………8 分

设平面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(x,y,z\right)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ -y+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，解得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， ……9 分

由于 $BD\perp$ 平面 $AEFC$，则 $\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{3},0,0\right)$ 是平面 $AEFC$ 的法向量. ………10 分

则 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}=-\frac{2\sqrt{19}}{19}$， ……………………………………11 分

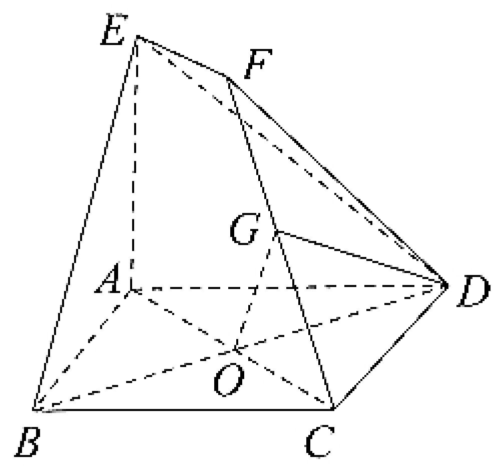
所以二面角 $A-CF-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………………………12 分

解法 2：过 O 作 $OG\perp FC$，垂足为 G，连接 DG，………4 分

由 $BD\perp$ 平面 $AEFC$，得 $OD\perp FC$， ……………………………5 分

又 $OD\cap OG=O$， $OD\subset$ 平面 DOG， $OG\subset$ 平面 DOG，

则 $FC\perp$ 平面 DOG. ……………………………6 分



因为 $DG\subset$ 平面 DOG，则 $FC\perp DG$. ……………………………7 分

故 $\angle DGO$ 为二面角 $A-CF-D$ 的平面角. ……………………………………8 分

因为 $AE\perp AC$， $EF\parallel AC$， $AC=2EF$，则平面四边形 $AEFC$ 为直角梯形.

在直角梯形 $AEFC$ 中，求得 $OG=\frac{2}{\sqrt{5}}$， ……………………………………9 分

在 Rt△ DOG 中，$DG=\sqrt{OG^2+OD^2}=\sqrt{\frac{19}{5}}$， ……………………………………10 分

$\cos\angle DGO=\frac{OG}{DG}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{19}{5}}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………………………11 分

所以二面角 $A-CF-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………………………12 分

21.（12 分）

（1）解：由题意得 $2b=4$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………2 分

所以 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$. ……………………………………3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………4 分

（2）解法 1：由题意，直线 l_1 斜率存在且不为 0，设直线 l_1 的方程为 $y=k\left(x+3\right)$，

且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q\left(x_0,y_0\right)$，

将 $y=k(x+3)$ 代入 $x^2+2y^2=8$，整理可得

$\left(1+2k^2\right)x^2+12k^2x+18k^2-8=0$， ……………………………………5 分

$\Delta=144k^4-4(1+2k^2)(18k^2-8)>0$，解得 $-2<k<2$，

由根与系数的关系可得

$x_1+x_2=\frac{-12k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{18k^2-8}{1+2k^2}$， 只要写对一个等式不扣分…………6 分

根据 $\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}$，则 $\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}=\frac{x_1+3}{x_2+3}$， ……………………………………7 分

解得 $x_0=\frac{2x_1x_2+3(x_1+x_2)}{x_1+x_2+6}=\frac{\frac{36k^2-16}{1+2k^2}-\frac{36k^2}{1+2k^2}}{-\frac{12k^2}{1+2k^2}+6}=-\frac{8}{3}$，只看结论……………8 分

又 $l_1 \perp l_2$，则 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+3)$，

令 $x=0$，则 $y=-\frac{3}{k}$，即 $R\left(0,-\frac{3}{k}\right)$.

故 $|PR|=\sqrt{9+\left(-\frac{3}{k}\right)^2}=3\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$.　　　　…………………………………9 分

而 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{8}{3}-(-3)\right|=\frac{1}{3}\sqrt{1+k^2}$，　　　　…………………………………10 分

记△ PQR 面积为 S，

则 $S=\frac{1}{2}|PR|\times|PQ|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left(1+k^2\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}$

$\geq \frac{1}{2}\sqrt{2+2}=1$.　（当且仅当 $k=\pm 1$ 时取等号）　只看结论…………………11 分

所以△ PQR 面积的最小值为 1.　　　　…………………………………12 分

解法 2：由题意，直线 l_1 斜率存在且不为 0，设直线 l_1 的方程为 $x=ty-3$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases} x=ty-3 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2-6ty+1=0$，　　　　……………………………5 分

由 $\Delta=36t^2-4\times(t^2+2)\times 1=32t^2-8>0$，得 $t>\frac{1}{2}$ 或 $t<-\frac{1}{2}$.

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{6t}{t^2+2}, y_1y_2=\frac{1}{t^2+2}$，只要写对一个等式不扣分…………6 分

由 $\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}$ 及 P,A,Q,B 四点共线，知 $\frac{y_0-y_1}{y_2-y_0}=\frac{y_1}{y_2}$，　　　　……………………7 分

得 $y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{\frac{2}{t^2+2}}{\frac{6t}{t^2+2}}=\frac{1}{3t}$.　　　　……………………………8 分

则 $|PQ|=\sqrt{1+t^2}\,|y_0|=\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}$，　　　　…………………………………9 分

因为 $l_1 \perp l_2$，则 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{t}y-3$，令 $x=0$ 得 $y=-3t$，

即 $R(0,-3t)$.

所以 $|PR|=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}|3t|=3\sqrt{1+t^2}$. ……………………………………10 分

所以△PQR 面积 $S=\frac{1}{2}|PR||PQ|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}3\sqrt{1+t^2}=\frac{1+t^2}{2|t|}=\frac{1}{2}\left(|t|+\frac{1}{|t|}\right)$

$\geq\frac{1}{2}\times 2\sqrt{|t|\cdot\frac{1}{|t|}}=1$. 只看结论………………………11 分

当且仅当 $|t|=1>\frac{1}{2}$ 等号成立.

所以△PQR 面积的最小值为 1. ……………………………………12 分

解法 3：由题意，直线 l_1 斜率存在且不为 0，设直线 l_1 的方程为 $x=ty-3$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$

由 $\begin{cases} x=ty-3 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2-6ty+1=0$， ……………………………5 分

由 $\Delta=36t^2-4\times(t^2+2)\times 1=32t^2-8>0$，得 $t>\frac{1}{2}$ 或 $t<-\frac{1}{2}$.

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{6t}{t^2+2}, y_1y_2=\frac{1}{t^2+2}$， 只要写对一个等式不扣分…………6 分

设 $\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AP|}{|PB|}=\lambda$，由 P,A,Q,B 四点共线，知 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，

由 $\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，即 $(-3-x_1,-y_1)=-\lambda(x_2-3,y_2)$，得 $y_1=\lambda y_2$. ………………7 分

由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$，即 $(x_0-x_1,y_0-y_1)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)$，得

$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2y_1}{1+\frac{y_1}{y_2}}=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{1}{3t}$. 只看结论………………………8 分

则 $|PQ|=\sqrt{1+t^2}\,|y_0|=\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}$. ……………………………………9 分

因为 $l_1 \perp l_2$，则 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{t}y-3$，令 $x=0$ 得 $y=-3t$，

即 $R(0,-3t)$.

所以 $|PR|=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}|3t|=3\sqrt{1+t^2}$. ……………………………………10 分

所以△PQR 面积 $S=\frac{1}{2}|PR||PQ|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{3|t|}3\sqrt{1+t^2}=\frac{1+t^2}{2|t|}=\frac{1}{2}(|t|+\frac{1}{|t|})$

$\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{|t|\frac{1}{|t|}}=1$， 只看结论……………………………11 分

当且仅当 $|t|=1>\frac{1}{2}$ 等号成立

所以△PQR 面积的最小值为1. ……………………………………12 分

22.（12 分）

（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ……………………………………1 分

由于 $m=0$，则 $f(x)=2x\ln x-x^2+1$.

$f'(x)=2\ln x+2-2x$， ……………………………………2 分

令 $h(x)=f'(x)=2\ln x+2-2x$，

$h'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)=\frac{2(1-x)}{x}>0$，$f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{2(1-x)}{x}<0$，$f'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

则 $f'(x)\leq f'(1)=2\ln1+2-2=0$. ……………………………………3 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$. ……………………………………4 分

（2）证法 1：由（1）得 $f'(x)=2\ln x+2-2x-m$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $m<0$ 时，$f'(1)=-m>0$，$0<e^{\frac{m}{2}-1}<1$， ……………………………………5 分

$f'\left(e^{\frac{m}{2}-1}\right)=2\left(\frac{m}{2}-1\right)+2-2e^{\frac{m}{2}-1}-m=-2e^{\frac{m}{2}-1}<0$， ……………………………6 分

则 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $f'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=2\ln x_0+2-2x_0-m=0$， ……7 分

得 $m=2\ln x_0+2-2x_0$.

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x_0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 上单调递增.

则 $f(x)\ge f(x_0)=2x_0\ln x_0-x_0^2-mx_0+1$ ……………………………………8 分

$$=2x_0\ln x_0-x_0^2-x_0(2\ln x_0+2-2x_0)+1=(x_0-1)^2>0.$$

……………………………………9 分

所以 $2x\ln x-x^2-mx+1>0$. ……………………………………10 分

令 $\dfrac{a-b}{a+b}=x$，由于 $0<b<a$，则 $0<x<1$.

则 $\dfrac{2(a-b)}{a+b}\ln\dfrac{a-b}{a+b}-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2-\dfrac{m(a-b)}{a+b}+1>0$， ……………………………11 分

整理得 $2\ln\dfrac{a+b}{a-b}<\dfrac{4ab}{a^2-b^2}-m$. ……………………………………12 分

证法 2：欲证 $2\ln\dfrac{a+b}{a-b}<\dfrac{4ab}{a^2-b^2}-m$；

只要证 $2\ln\dfrac{a+b}{a-b}<\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}-m$， ……………………………………5 分

即证 $2\ln\dfrac{a+b}{a-b}<\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}-m$. ……………………………………6 分

令 $x=\dfrac{a+b}{a-b}$，由于 $a>b>0$，则 $x>1$. ……………………………………7 分

故只要证 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}-m$，即证 $2x\ln x-x^2+1+mx<0\ (x>1)$.只要有一个等式就给分…8分

由(1)可知，函数 $h(x)=2x\ln x-x^2+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

故 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，即 $2x\ln x-x^2+1<0$. ……………………………9 分

由于 $m<0$，$x>1$，则 $mx<0$. 此处为mx<0 ……………………………10 分

所以 $2x\ln x-x^2+1+mx<0$ 成立. ……………………………………11 分

所以 $2\ln\dfrac{a+b}{a-b}<\dfrac{4ab}{a^2-b^2}-m$. ……………………………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。