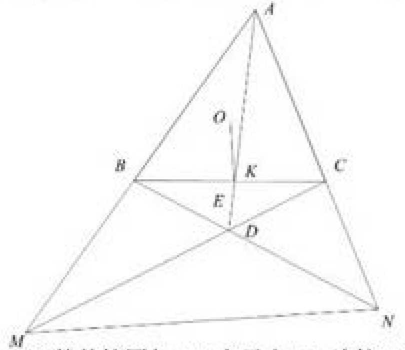
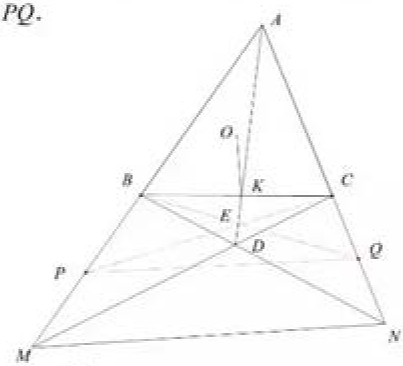
加　试

1. （40分）如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M．求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆．



证明： 用反证法．若 A，B，D，C 不四点共圆，设三角形 ABC 的外接圆与 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接 CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ．



因为 $PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）

$$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

同理

$$QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

所以
$$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故 $OK\perp PQ$．　由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ/\!/MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \qquad ①$$

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \qquad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \qquad ③$$

由①，②，③可得 $\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD}$，所以 $\frac{ND}{BD}=\frac{MD}{DC}$，故 $\triangle DMN\backsim\triangle DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC/\!/MN$，故 $OK\perp BC$，即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A,B,D,C 四点共圆．

注 1："$PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）"的证明：延长 PK 至点 F，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \qquad ④$$

则 P，E，F，A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

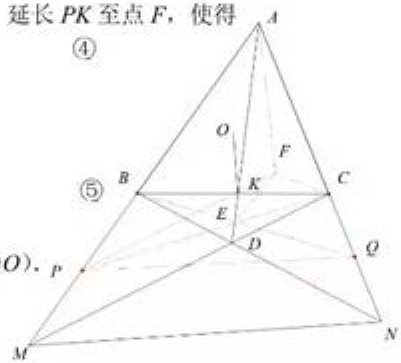
从而 E，C，F，K 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC, \qquad ⑤$$

⑤-④，得

$PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）.

注 2：若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.



2. （40 分）设 k 是给定的正整数，$r=k+\frac{1}{2}$．记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f\left(f^{(l-1)}(r)\right)$，$l\geq 2$．证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数．这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$．

证明：记 $v_2(n)$ 表示正整数 n 所含的 2 的幂次．则当 $m=v_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数．

下面我们对 $v_2(k)=v$ 用数学归纳法．

当 $v=0$ 时，k 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时

$$f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$

为整数．

假设命题对 $v-1(v\geq 1)$ 成立．

对于 $v\geq 1$，设 k 的二进制表示具有形式

$$k=2^v+\alpha_{v+1}\cdot 2^{v+1}+\alpha_{v+2}\cdot 2^{v+2}+\cdots,$$

这里，$\alpha_i=0$ 或者 1，$i=v+1,\ v+2,\cdots$．

于是

$$\begin{aligned}f(r)&=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)\\&=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+k^2+k\\&=\frac{1}{2}+2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots\\&=k'+\frac{1}{2}, \qquad ①\end{aligned}$$

这里 $\qquad k'=2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^v+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$．

显然 k' 中所含的 2 的幂次为 $v-1$．故由归纳假设知，$r'=k'+\frac{1}{2}$ 经过 f 的 v 次迭代得到整数，由①知，$f^{(v+1)}(r)$ 是一个整数，这就完成了归纳证明．

3. （50 分）给定整数$n>2$，设正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_k\le 1,k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},k=1,2,\cdots,n.$$

求证：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}$.

证明：由$0<a_k\le 1$知，对$1\le k\le n-1$，有$0<\sum_{i=1}^{k}a_i\le k$，　$0<\sum_{i=k+1}^{n}a_i\le n-k$．

注意到当$x,y>0$时，有$|x-y|<\max\{x,y\}$，于是对$1\le k\le n-1$，有

$$|A_n-A_k|=\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

$$<\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i,\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right\}\le\max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}=1-\frac{k}{n},$$

故$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n-1}(A_n-A_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k|<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}$.

证明二：

记$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，由阿贝尔变换，$\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}S_k\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}S_i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

则$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|\left(S_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}S_i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right|$

注意到$S_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k>0$，$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}S_i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)>0$，

故$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\max\left\{S_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k,\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}S_i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$

而$S_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_n-S_k\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{n-1}{2}$，$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}S_i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{n-1}{2}$

故原式成立

4. （50 分）一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

解： 对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上 a，如果颜色不同，则标上 b，如果数字和颜色都相同，则标上 c．于是对于给定的点 A_1 上的设置（共有 4 种），按照边上的字母可以依次确定点 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 上的设置．为了使得最终回到 A_1 时的设置与初始时相同，标有 a 和 b 的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记 a，b，c，使得标有 a 和 b 的边都是偶数条的方法数的 4 倍．

设标有 a 的边有 $2i$ 条，$0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$，标有 b 的边有 $2j$ 条，$0\le j\le\left[\frac{n-2i}{2}\right]$．选取 $2i$ 条边标记 a 的有 C_n^{2i} 种方法，在余下的边中取出 $2j$ 条边标记 b 的有 C_{n-2i}^{2j} 种方法，其余的边标记 c．由乘法原理，此时共有 $C_n^{2i}\,C_{n-2i}^{2j}$ 种标记方法．对 i，j 求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right). \qquad ①$$

这里我们约定 $C_0^0=1$．

当 n 为奇数时，$n-2i>0$，此时

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}=2^{n-2i-1}. \qquad ②$$

代入①式中，得

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right)=4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}(-1)^k=(2+1)^n+(2-1)^n$$

$$=3^n+1.$$

当 n 为偶数时，若 $i<\frac{n}{2}$，则②式仍然成立；若 $i=\frac{n}{2}$，则正 n 边形的所有边都标记 a，此时只有一种标记方法．于是，当 n 为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right)=4\times\left(1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)\right)=2+4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=3^n+3.$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当 n 为奇数时有 3^n+1 种；当 n 为偶数时有 3^n+3 种．