高三数学参考答案及评分标准

2023.3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）D　（3）B　（4）C　（5）A

（6）D　（7）B　（8）A　（9）C　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-10　（12）-9

（13）3　（14）$[0,+\infty)$　$a<-1$　（15）①④

注：（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；

（15）题选①④得 5 分；只选出其中 1 个得 3 分；其余情况不给分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\tan B=2b\sin A$．

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）若 $BC=4$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，求△ABC 的面积.

解：（Ⅰ）由 $a\tan B=2b\sin A$，

得 $\dfrac{\sin B}{\cos B}=2\dfrac{b}{a}\cdot\sin A$．

由正弦定理得 $\dfrac{\sin B}{\cos B}=2\dfrac{\sin B}{\sin A}\cdot\sin A$．

$A,B\in(0,\pi)$，$\sin A\neq 0$，$\sin B\neq 0$

所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$．　因为 $B\in(0,\pi)$，　所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$．

………………6 分

（Ⅱ）解法一：因为 $A=\dfrac{\pi}{4}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，

根据正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

所以 $AC=\dfrac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=2\sqrt{6}$．

因为 $C=\pi-A-B=\dfrac{5\pi}{12}$，

所以 $\sin C=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=6+2\sqrt{3}$.

解法二：因为 $A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

根据正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，

所以 $AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=2\sqrt{6}$.

根据余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

化简为 $AB^2-2AB-2=0$，解得 $AB=2+2\sqrt{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=6+2\sqrt{3}$. ……………………13 分

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E，G 分别为 AA_1，AC，BB_1 的中点，A_1C_1 与平面 EBB_1 交于点 F，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$，$C_1C\perp BE$.

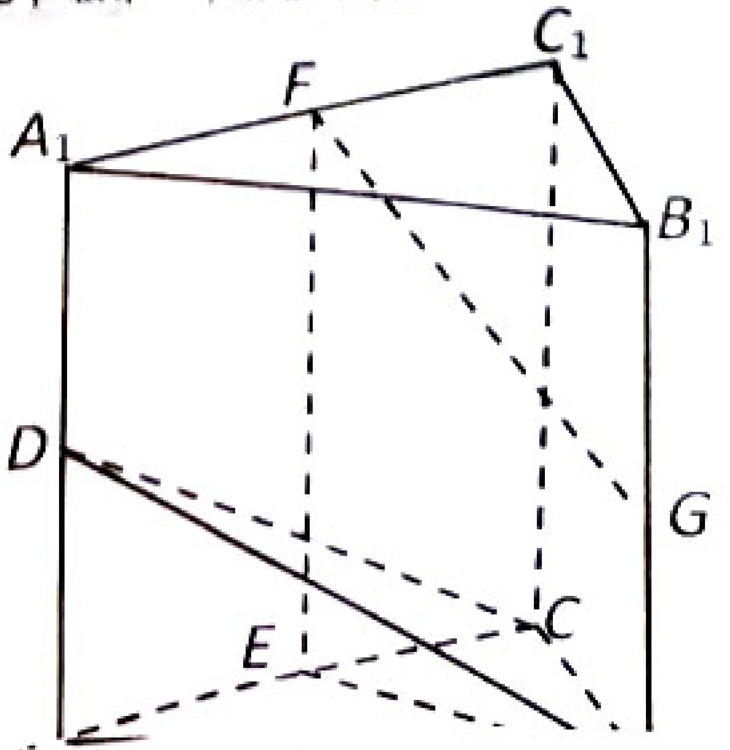
（Ⅰ）求证：F 为 A_1C_1 的中点；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值.

条件①：平面 $ABC\perp$ 平面 EBB_1；$CC_1\perp BE$

条件②：，$BC_1=3$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。



解：

（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $CC_1 // BB_1$，且 $CC_1 \not\subset$ 平面 EBB_1，$BB_1 \subset$ 平面 EBB_1，所以 $CC_1 //$ 平面 EBB_1.

因为 $CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C，平面 $EBB_1 \cap$ 平面 $AA_1C_1C = EF$，所以 $C_1C // EF$.

在平行四边形 AA_1C_1C 中．因为 E 为 AC 的中点，所以 F 为 A_1C_1 的中点.

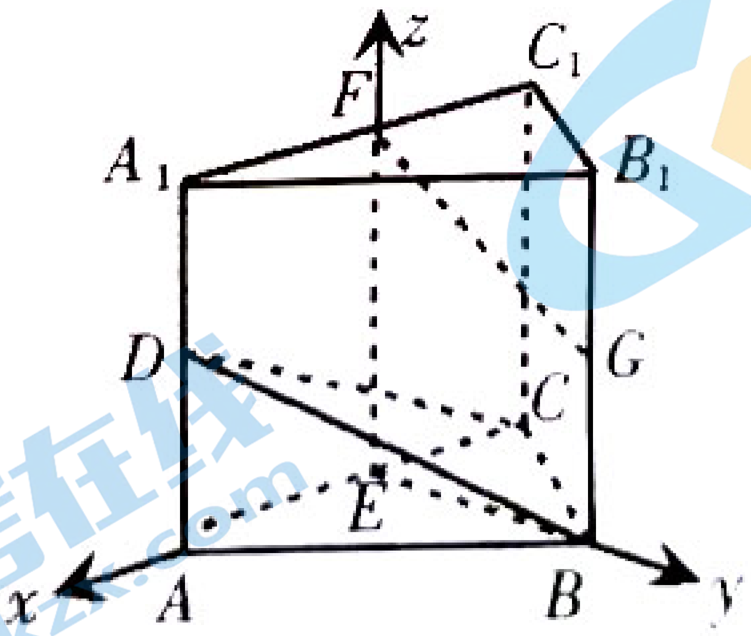
………………6 分

（Ⅱ）选择条件①

因为 $AB=BC$，E 为 AC 的中点，所以 $AC \perp BE$，又因为平面 $ABC \perp$ 平面 EBB_1，

平面 $ABC \cap$ 平面 $EBB_1 = BE$，$AC \subset$ 平面 ABC，所以 $AC \perp$ 平面 EBB_1，$AC \perp EF$，

又因为 $C_1C \perp BE$，$EF \perp BE$，如图建立空间直角坐称系 $E-xyz$.



则 $E(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(1,0,1)$，$F(0,0,2)$，．$G(0,2,1)$

所以 $\overrightarrow{CD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$，．

设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

$\therefore \begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CD}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{CB}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 2a+c=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$，

令 $a=a=2$，则 $b=-1b=-1$，$c=-4$，

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $n=(2,-1,-4)$，

设直线 FG 与平面 BCD 所成角为 α，则

$$\sin\alpha=|\cos\langle n,\overrightarrow{FG}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{FG}|}{|n||\overrightarrow{FG}|}=\frac{2\sqrt{105}}{105}.$$

所以直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{105}}{105}$． ………………8 分

选择条件②

$BC_1=3$，$BC=\sqrt{5}$，$CC_1=2$，所以 $CC_1\perp BC$，又 $C_1C\perp BE$，$BC\cap BE=B$，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC，又因为 $C_1C//EF$，所以 $EF\perp$ 平面 ABC，$BE\subset$ 平面 ABC，$EF\perp BE$，$AC\subset$ 平面 ABC，$EF\perp AC$，又因为 E 为 AC 的中点，$AB=BC$，所以 $AC\perp BE$，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$．

以下同选条件①.

（18）（本小题 13 分）

"绿水青山就是金山银山"，某地区甲乙丙三个林场开展植树工程，2011—2020 年的植树成活率（%）统计如下：

	11 年	12 年	13 年	14 年	15 年	16 年	17 年	18 年	19 年	20 年
甲	95.5	92	96.5	91.6	96.3	94.6	—	—	—	—
乙	95.1	91.6	93.2	97.8	95.6	92.3	96.6	—	—	—
丙	97.0	95.4	98.2	93.5	94.8	95.5	94.0	93.5	98.0	92.5

规定：若当年植树成活率大于 95%，则认定该年为优质工程。

（Ⅰ）从乙林场任抽取两年，求这两年都是优质工程的概率；

（Ⅱ）从甲、乙、丙三个林场各抽取一年，以 X 表示这 3 年中优质工程的个数，求 X 的分布列；

（Ⅲ）若[illegible]个林场每年植树的棵数不变，能否根据两个林场优质工程概率的大小，推断出那个林场植树成活率平均数的大小？（结论不要求证明）

解：（Ⅰ）由题意知，乙林场共植树 7 年，被评为优质工程的有 5 年，设从乙林场任抽取两

年都是优质工程的的事件为A，则$P(A)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$，因此从乙林场任抽取两年都是优质工程的概率为$\dfrac{2}{7}$. ………………3 分

（Ⅱ）设从甲、乙、丙三个林场各抽取一年为优质工程的事件分别为B、C、D，

根据题中数据，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{4}{7}$，$P(D)=\dfrac{1}{2}$，

根据题意，随机变量X的所有可能取值为0，1，2，3.

$$P(X=0)=P(\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})=P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{D})=\frac{3}{28};$$

$$P(X=1)=P(B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}C\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}D)=P(B\overline{C}\,\overline{D})+P(\overline{B}C\overline{D})+P(\overline{B}\,\overline{C}D)=\frac{5}{14};$$

$$P(X=2)=P(\overline{B}CD+B\overline{C}D+BC\overline{D})=P(\overline{B}CD)+P(B\overline{C}D)+P(BC\overline{D})=\frac{11}{28};$$

$$P(X=3)=P(BCD)=P(B)P(C)P(D)=\frac{4}{28}.$$

所以随机变量X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{11}{28}$	$\dfrac{4}{28}$

………………10 分

（Ⅲ）不能. ………13 分

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$经过$A(-2,0)$，$B(-1,\dfrac{3}{2})$两点，设过点$P(-2,1)$的直线椭圆交$E$于$M,N$两点，过$M$且平行于$y$轴的直线与线段$AB$交于点$T$，点$H$满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）证明：直线HN过定点.

解：（Ⅰ）椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$经过$A(-2,0)$，所以$a=2$，

又因为椭圆经过$B(-1,\dfrac{3}{2})$，所以$\dfrac{1}{4}+\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1$，解得$b=\sqrt{3}$，

所以椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………5 分

（Ⅱ）由题意可知，过点P的直线斜率一定存在.

设过点 $P(-2,1)$ 的直线方程为 $y=k(x+2)+1$.

$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y-1=k(x+2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k-8=0$，

可得 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-(16k^2-8k)}{3+4k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{16k^2+16k-8}{3+4k^2} \end{cases}$，

因为 $A(-2,0)$，$B(-1,\dfrac{3}{2})$，所以线段 AB 所在的直线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x+2$，

因此 $T(x_1,\dfrac{3}{2}x_1+2)$，

因为 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，所以点 T 为点 M 和 H 的中点，因此 $H(x_1,3x_1+6-y_1)$

直线 NH 的方程为 $y=\dfrac{3x_1+6-y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)+y_2$，

$$y=\frac{[3x_1+6-(y_1+y_2)](x-x_2)+y_2(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{[3x_1+6-(y_1+y_2)][(x-x_2)+\dfrac{y_2(x_1-x_2)}{3x_1+6-(y_1+y_2)}]}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{[3x_1+6-(y_1+y_2)][(x+\dfrac{-3x_1x_2-6x_2+x_2(y_1+y_2)+y_2(x_1-x_2)}{3x_1+6-(y_1+y_2)}]}{x_1-x_2}$$

令 $t=\dfrac{-3x_1x_2-6x_2+x_2(y_1+y_2)+y_2(x_1-x_2)}{3x_1+6-(y_1+y_2)}$，

所以 $t=\dfrac{-3x_1x_2-6x_2+x_2y_1+x_2y_2+y_2x_1-y_2x_2}{3x_1+6-(y_1+y_2)}$；

因为 $-3x_1x_2-6x_2+x_2y_1+y_2x_1-y_2x_2=\dfrac{-48k^2-72k+24}{3+4k^2}-6x_2$，

又因为 $3x_1+6-(y_1+y_2)=3x_1+6-k(x_1+x_2+4)-2=3x_1+6-\dfrac{12k+6}{3+4k^2}$，

$=3(\frac{-16k^2-8k}{3+4k^2}-x_2)+\frac{18+24k^2-12k-6}{3+4k^2}=\frac{-24k^2-36k+12}{3+4k^2}-3x_2$.

所以$t=2$，因此直线HN过定点$(-2,0)$． ………………15 分

（20）（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$，$(a>0)$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）设$a>0$，讨论$y=f(x)$的单调性；

（Ⅲ）若对任意$x\in(0,1)$恒有$f(x)>1$，求a的最大值.

解：（Ⅰ）因为当$a=1$时，$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-x}$，

所以$f(0)=1$，

$f'(x)=\frac{x^2+1}{(1-x)^2}e^{-x}$，

$f'(0)=1$.

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的方程为$x-y+1=0$. ……………5 分

（Ⅱ）$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{ax^2-a+2}{(1-x)^2}e^{-ax}$.

①当$0<a\le 2$时，在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$上，$f'(x)\ge 0$，所以$f(x)$在$(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$为增函数；

②当$a>2$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=-\sqrt{1-\frac{2}{a}}$，$x_2=\sqrt{1-\frac{2}{a}}$，$0<1-\frac{2}{a}<1$.

当x变化时，$f(x)$和$f'(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,1)$	$(1,+\infty)$

$f'(x)$	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	↗		↘		↗	↗

所以，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-\sqrt{1-\frac{2}{a}})$，$(\sqrt{1-\frac{2}{a}},1)$，$(1,+\infty)$；单调递减区间是 $(-\sqrt{1-\frac{2}{a}},\sqrt{1-\frac{2}{a}})$．……………11 分

（III）①当 $0<a\le 2$ 时，由（II）知：对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>f(0)=1$．

②当 $a>2$ 时，因为 $0<x_2<1$，由（II）知：$f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 为减函数，$f(x_2)<f(0)=1$

所以当 $a>2$ 时，$f(x)>1$ 并非对 $x\in(0,1)$ 恒成立．

综上可知，a 的最大值为 2．……………15 分

（21）（本小题 15 分）

对于每项均是正整数的数列 A：a_1，$a_2,\cdots$，a_n，定义变换 T_1，T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A)$：n，a_1-1，$a_2-1,\cdots$，a_n-1．

对于每项均是非负整数的数列 B：b_1，$b_2,\cdots$，b_m，定义变换 T_2，T_2 将数列 B 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(B)$；

又定义 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$．

设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列，令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$．

（I）如果数列 A_0 为 5，1，3，写出数列 A_1，A_2；

（II）对于每项均是正整数的有穷数列 A，证明 $S(T_1(A))=S(A)$；

（III）证明：对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0，存在正整数 K，当 $k\geq K$ 时，$S(A_{k+1})=S(A_k)$．

解：（I）A_0:5,1,3，

$T_1(A_0)$:3,4,0,2，

$A_1=T_2(T_1(A_0))$:4,3,2；

$T_1(A_1)$:3,3,2,1，

$A_2=T_2(T_1(A_1))$:3,3,2,1．………………4 分

（II）证明：设每项均是正整数的有穷数列 A 为 a_1，a_2，…，a_n，

则 $T_1(A)$ 为 n，a_1-1，a_2-1，…，a_n-1，

从而

$S(T_1(A))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]$

$+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$．

又 $S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

所以 $S(T_1(A))-S(A)$

$=2[n-2-3-\cdots-(n+1)]+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n$

$=-n(n+1)+n^2+n=0$，

故 $S(T_1(A))=S(A)$．………………10 分

（III）证明：设 A 是每项均为非负整数的数列 a_1，a_2，…，a_n．

当存在 $1\leqslant i<j\leqslant n$，使得 $a_i\leqslant a_j$ 时，交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列 B，

则 $S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-ja_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\leqslant 0$．

当存在 $1\leqslant m<n$，使得 $a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$ 时，若记数列 a_1，a_2，…，a_m 为 C，

则 $S(C)=S(A)$．

所以 $S(T_2(A))\leqslant S(A)$．

从而对于任意给定的数列 A_0，由 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$

可知 $S(A_{k+1})\leqslant S(T_1(A_k))$．

又由（II）可知 $S(T_1(A_k))=S(A_k)$，所以 $S(A_{k+1})\leqslant S(A_k)$．

即对于 $k\in\mathbf{N}$，要么有 $S(A_{k+1})=S(A_k)$，要么有 $S(A_{k+1})\leqslant S(A_k)-1$．

因为 $S(A_k)$ 是大于 2 的整数，所以经过有限步后，必有 $S(A_k)=S(A_{k+1})=S(A_{k+2})=\cdots$．

即存在正整数 K，当 $k\geqslant K$ 时，$S(A_{k+1})=S(A_k)$．

……………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。