2024年新高考改革适应性练习（3）（九省联考题型）

数学参考答案

一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	A	D	D	B	C

二、多项选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，有选错的得0分，若只有2个正确选项，每选对一个得3分；若只有3个正确选项，每选对一个得2分．具体得分如【附】评分表.）

题号	9	10	11
答案	BC	ABD	BCD

【附】评分表

<table>
<tr><td colspan="2">9-11题（每题满分6分）</td><td colspan="2">得分情况</td></tr>
<tr><td rowspan="5">正确选项个数</td><td rowspan="2">2个
（如BC）</td><td>选对1个（选B或C）</td><td>3分</td></tr>
<tr><td>选对2个（选BC）</td><td>6分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3个
（如ABD）</td><td>选对1个（选A或B或D）</td><td>2分</td></tr>
<tr><td>选对2个（选AB或BD或AD）</td><td>4分</td></tr>
<tr><td>选对3个（选ABD）</td><td>6分</td></tr>
</table>

三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分.）

题号	12	13	14
答案	$\frac{1}{3}$	$2023\times2024+4\times2024$ （或2027×2024）	$3+3\sqrt{10}$

四、解答题（本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.（13 分）

以点 A_1 为坐标原点，$\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{A_1D_1}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{A_1A}$ 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，并令正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1.

（1）则 $A_1(0,0,0)$，$C(1,-1,1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,-1,1)$；

$A(0,0,1)$，$D_1(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,-1,-1)$.

所以 $\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0+1+(-1)=0$，即 $\overrightarrow{AD_1}\perp\overrightarrow{A_1C}$. 故 $AD_1\perp A_1C$ 得证.

（2）$B(1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,1)$，由（1）得 $\overrightarrow{A_1C}=(1,-1,1)$，

设平面 A_1BC 的一个法向量 $\boldsymbol{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0$，即

$$\begin{cases} x_1+z_1=0 \\ x_1-y_1+z_1=0 \end{cases}$$

令 $x_1=1$，则 $\begin{cases} y_1=0 \\ z_1=-1 \end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n_1}=(1,0,-1)$ 是平面 A_1BC 的一个法向量.

同理可求得平面 A_1CD 的一个法向量 $\boldsymbol{n_2}=(0,1,1)$，

$$\cos<\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}>=\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_1}|\cdot|\boldsymbol{n_2}|}=-\frac{1}{2}$$

又 $<\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}>\in(0,\pi)$，所以 $<\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}>=\frac{2\pi}{3}$，即平面 A_1BC 与平面 A_1CD 的所成角为 $\frac{2\pi}{3}$.

故二面角 $B-A_1C-D$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$.

16.（15 分）

（1）$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$，$f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，

由题意，原点是 $f(x)$ 的一个极值点，即 $f'(0)=0$，代入得 $d=0$，

所以 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2=x^2(ax^2+bx+c)$，$f'(x)=ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)$，

所以 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点（0 除外）都是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

即 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 有共同零点，故 $f(x)$ 的所有零点也是其所有极值点.

（2）设 $f(x)$ 的四个零点分别为 $m-3$，$m-1$，$m+1$，$m+3$，则可以设

$$f(x)=k(x-m+3)(x-m+1)(x-m-1)(x-m-3)$$

其中 $k\neq 0$，令 $t=x-m$，则

$$f(x)=k(t+3)(t+1)(t-1)(t-3)=k\left(t^4-10t+9\right)=g(t)$$

$$g'(t)=k(4t^3-20t)=4k(t^3-5t)$$

令 $g'(t)=0$ 得 $t_1=-\sqrt{5}$，$t=0$，$t=\sqrt{5}$，

所以 $f'(x)=0$ 的所有根为 $x_1=m-\sqrt{5}$，$x_2=m$，$x_3=m+\sqrt{5}$，

所以 $f'(x)$ 的最大零点与最小零点之差为 $|x_3-x_1|=2\sqrt{5}$.

17.（15 分）

（1）因为点 $S(1,1)$ 在 C 内，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}<1$，即 $a^2+b^2-a^2b^2<0$.

联立 l 与 C 的方程，得 $b^2(a^2+b^2)x^2-2a^2b^4x+a^4b^2(b^2-1)=0$.

判别式 $\Delta=4a^4b^8-4a^4b^4(a^2+b^2)(b^2-1)=4a^4b^4(a^2+b^2-a^2b^2)<0$，

故该二次方程无解，即 l 与 C 交点个数为 0.

（2）可选择命题②或命题③（命题①无法证伪），证明其为假命题.

记点 P,M,N 的横坐标分别为 x_P,x_M,x_N，不妨设 P,M,S,N 顺次排列.

选择命题②的证明：

当直线 MN 的斜率不存在时，$MN:x=1$，分别与 l,C 的方程联立可得 $P\left(1,b^2-\frac{b^2}{a^2}\right)$，$M\left(1,b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right),N\left(1,-b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)$.

若 $|PM|,|PS|,|PN|$ 依次成等差数列，则 $b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\left(-b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)=2$，显然矛盾，不满足题意.

当直线 MN 的斜率存在时，设其斜率为 k，则 $MN:y=k(x-1)+1$，与 l 的方程联立可得 $x_P=\frac{a^2(b^2+k-1)}{a^2k+b^2}$；

与 C 的方程联立，得 $(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k(k-1)x+a^2[(k-1)^2-b^2]=0$，由韦达定理

$$\begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{2a^2k(k-1)}{a^2k^2+b^2}\\ x_Mx_N=\dfrac{a^2[(k-1)^2-b^2]}{a^2k^2+b^2}\end{cases}$$

则 $2|PS|-(|PM|+|PN|)=\sqrt{1+k^2}(2|x_P-1|-|x_M-x_P|-|x_N-x_P|)$.

不妨设 $x_P>1$，则 $x_P>x_M>1>x_N$，

所以原式=

$$\sqrt{1+k^2}[2(x_P-1)-(x_P-x_M)-(x_P-x_N)]$$

$$=\sqrt{1+k^2}(x_M+x_N-2)$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{-2a^2k-2b^2}{a^2k^2+b^2}<0$$

因此 $|PM|,|PS|,|PN|$ 不能成等差数列，从而②是假命题.

选择命题③的证明：

当直线 MN 的斜率不存在时，$MN: x=1$，分别与 l,C 的方程联立可得 $P\left(1,b^2-\frac{b^2}{a^2}\right)$，$M\left(1,b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)$，$N\left(1,-b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right)$.

若$|PM|,|PS|,|PN|$成等比数列，则

$$\left[\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}\right)-b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right]\times\left[\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}\right)+b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right]=\left[\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}\right)-1\right]^2$$

即 $a^2+a^2b^2-b^2=0$，但 $a^2b^2>a^2+b^2$，因此 $a^2+a^2b^2-b^2>2a^2>0$，矛盾，不满足题意.

当直线 MN 的斜率存在时，设其斜率为 k，则 $MN: y=k(x-1)+1$，与 l 的方程联立可得 $x_P=\frac{a^2(b^2+k-1)}{a^2k+b^2}$；

与 C 的方程联立，得 $(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k(k-1)x+a^2[(k-1)^2-b^2]=0$，由韦达定理，

$$\begin{cases} x_M+x_N=\dfrac{2a^2k(k-1)}{a^2k^2+b^2} \\ x_Mx_N=\dfrac{a^2[(k-1)^2-b^2]}{a^2k^2+b^2} \end{cases}$$

则

$$|PS|^2-|PM|\cdot|PN|=\sqrt{1+k^2}[(x_P-1)^2-(x_P-x_M)(x_P-x_N)]$$

$$=\sqrt{1+k^2}[(x_M+x_N-2)x_P+1-x_Mx_N]$$

$$=\sqrt{1+k^2}\left\{\left[\frac{2a^2k(k-1)}{a^2k^2+b^2}-1\right]\cdot\frac{a^2(b^2+k-1)}{a^2k+b^2}+1-\frac{a^2[(k-1)^2-b^2]}{a^2k^2+b^2}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{a^2k^2+b^2}(a^2+b^2-a^2b^2)<0$$

因此 $|PM|,|PS|,|PN|$ 不能成等比数列，故③是假命题.

18.（17 分）

（1）由题意，对于单选题，小周每个单选题做对的概率为 $\frac{1}{4}$，

对于多选题，小周每个多选题做对的概率为 $\frac{1}{2}$，

设小周做对单选题的个数为 X_1，做对多选题的个数为 X_2，

则$X_1 \sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$，$X_2 \sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $E(X_1)=8\times\frac{1}{4}=2$，$E(X_1)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

而小周选择题最终得分为 $X=5X_1+3X_2$，

所以 $E(X)=5E(X_1)+3E(X_2)=5\times 2+3\times\frac{3}{2}=\frac{29}{2}$.

（2）由题意他能判断一个选项正确，先把这个正确选项选上，

如果他不继续选其他选项肯定能得三分，

如果他继续选其它选项的话，设此时他的最终得分为 X_3，则 X_3 的所有可能取值为 0，6，

则 X_3 的分布列为：

X_3	0	6
$P(X_3)$	$1-p_0$	p_0

那么这个题的得分期望是

$$E(X_3)=0\times(1-p_0)+6p_0=6p_0,\left(p_0\geq\frac{1}{3}\right)$$

所以我们只需要比较 3 和 $6p_0$ 的大小关系即可，

令 $6p_0\geq 3$，解得 $\frac{1}{2}\leq p_0<1$，此时四个多选题全部选两个选项得分要高，

反之，若 $\frac{1}{3}\leq p_0<\frac{1}{2}$，此时四个多选只选他确定的那个选项得分最高.

19.（17 分）

（1）若 $n=1$，则 $i=1$，$P_1=1$，因此 $H(x)=-(1\times\log_2 1)=0$.

（2）$H(X)$ 与 P_1 正相关，理由如下：

当 $n=2$ 时，$P_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

$$H(x)=-P_1\log_2 P_1-(1-P_1)\log_2(1-P_1)$$

令 $f(t)=-t\log_2 t-(1-t)\log_2(1-t)$，其中 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

则

$$f'(t)=-\log_2 t+\log_2(1-t)=\log_2\left(\frac{1}{t}-1\right)>0$$

所以函数 $f(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $H(x)$ 与 P_1 正相关.

（3）因为 $P_1=P_2=\frac{1}{2^{n-1}}$，$P_{k+1}=2P_k\ (k=2,3,\cdots,n)$，

所以

$$P_k=P_2\cdot 2^{k-2}=\frac{2^{k-2}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-k+1}}\ (k=2,3,\cdots,n)$$

故

$$P_k\log_2 P_k=\frac{1}{2^{n-k+1}}\log_2\frac{1}{2^{n-k+1}}=-\frac{n-k+1}{2^{n-k+1}}$$

而

$$P_1\log_2 P_1=\frac{1}{2^{n-1}}\log_2\frac{1}{2^{n-1}}=-\frac{n-1}{2^{n-1}}$$

于是

$$H(X)=\frac{n-1}{2^{n-1}}+\sum_{k=2}^{n}P_k\log_2 P_k=\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2}$$

整理得

$$H(X)=\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2^n}+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2}$$

令

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$$

因此 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，

所以 $H(X)=\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}+S_n=\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}+2-\frac{n+2}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-2}}$.