延庆区高三模拟考试试卷

数学

2020. 3

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 $z=a^2\mathrm{i}-2a-\mathrm{i}$ 是正实数，则实数 a 的值为

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）±1

（2）已知向量 $\vec{a}=(1,k)$，$\vec{b}=(k,2)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同，则 k 等于

（A）1　　（B）$\pm\sqrt{2}$　　（C）$-\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{2}$

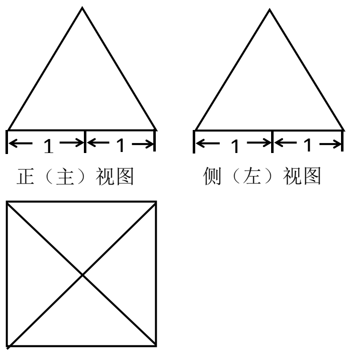
（3）下列函数中最小正周期为 π 的函数是

（A）$y=\sin x$　　（B）$y=\cos\frac{1}{2}x$　　（C）$y=\tan 2x$　　（D）$y=|\sin x|$

（4）下列函数中，是奇函数且在其定义域上是增函数的是

（A）$y=\frac{1}{x}$　　（B）$y=\tan x$　　（C）$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$　　（D）$y=\begin{cases}x+2, x\geq 0\\ x-2, x<0\end{cases}$

（5）某四棱锥的三视图所示，已知该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则它的表面积为



正（主）视图　侧（左）视图

俯视图

（A）8　　（B）12

（C）$4+4\sqrt{3}$　　（D）20

（6）$(2x^2+\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^4 的系数是

（A）160　　（B）80　　（C）50　　（D）10

（7）在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $A(1,2)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $90°$ 到点 B，设直线 OB 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 α，则 $\cos\alpha$ 等于

（A）$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$-\frac{2}{5}$

（8）已知直线 a,b，平面 α,β，$\alpha\cap\beta=b$，$a//\alpha$，$a\perp b$，那么“$a\perp\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9） 某企业生产 A,B 两种型号的产品，每年的产量分别为10万支和40万支，为了扩大再生产，决定对两种产品的生产线进行升级改造，预计改造后的 A,B 两种产品的年产量的增长率分别为 50% 和 20%，那么至少经过多少年后，A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量（取 $\lg 2=0.3010$）

（A）6 年　　（B）7 年　　（C）8 年　　（D）9 年

（10）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点为 F，过原点 O 的直线与双曲线 C 交于 A,B 两点，且 $\angle AFB=60°$，则 ΔBOF 的面积为

（A）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）$\frac{9}{2}$

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知集合 $M=\{x\mid\frac{k}{x}>-1\}$，且 $-3\in M$，则 k 的取值范围是__________.

（12）经过点 $M(-2,0)$ 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的直线 l 的方程是__________.

（13）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sin 2x-\cos^2 x$，则 $f(\frac{\pi}{12})=$__________.

（14）某网店统计连续三天出售商品的种类情况：第一天售出19种商品，第二天售出13种商品，第三天售出18种商品；前两天都售出的商品有3种，后两天都售出的商

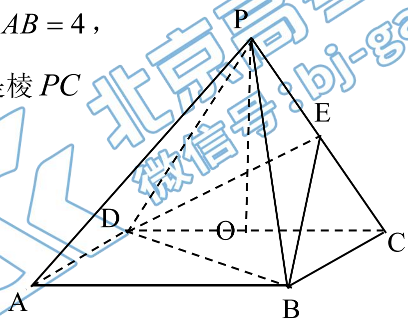
品有 4 种，则该网店第一天售出但第二天未售出的商品有__________种；这三天售出的商品至少有_________种.

（15）在 ΔABC 中，$AB=10$，D 是 BC 边的中点. 若 $AC=6$，$\angle A=60^\circ$，则 AD 的长等于_____；若 $\angle CAD=45^\circ$，$AC=6\sqrt{2}$，则 ΔABC 的面积等于_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，$AB=4$，$PD\perp PC$，O 是 CD 的中点，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，E 是棱 PC 上的一点，$PA//$ 平面 BDE.



（Ⅰ）求证：E 是 PC 的中点；

（Ⅱ）求证：PD 和 BE 所成角等于 90°.

（17）（本小题 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{10}=16$，__________.

（Ⅰ）判断 2024 是否是数列 $\{a_n\}$ 中的项，并说明理由；　（Ⅱ）求 S_n 的最值.

从 ①$a_8=10$，②$a_8=8$，③$a_8=20$ 中任选一个，补充在上面的问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

（18）（本小题 14 分）

A，B，C 三个班共有 120 名学生，为调查他们的上网情况，通过分层抽样获得了部分学生一周的上网时长，数据如下表（单位：小时）：

A 班	12	13	13	18	20	21	
B 班	11	11.5	12	13	13	17.5	20
C 班	11	13.5	15	16	16.5	19	21

（Ⅰ）试估计 A 班的学生人数；

（Ⅱ）从这 120 名学生中任选 1 名学生，估计这名学生一周上网时长超过 15 小时的概率；

（Ⅲ）从 A 班抽出的 6 名学生中随机选取 2 人，从 B 班抽出的 7 名学生中随机选取 1 人，求这 3 人中恰有 2 人一周上网时长超过 15 小时的概率.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2ax+a^2-1}{x^2+1}$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最大值和最小值，求 a 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-\sqrt{2},0)$，且经过点 $C\,(-\sqrt{2},1)$，$A,\ B$ 分别是 G 的右顶点和上顶点，过原点 O 的直线 l 与 G 交于 P,Q 两点（点 Q 在第一象限），且与线段 AB 交于点 M.

（Ⅰ）求椭圆 G 的标准方程；

（Ⅱ）若 $|PQ|=3$，求直线 l 的方程；

（Ⅲ）若 ΔBOP 的面积是 ΔBMQ 的面积的 4 倍，求直线 l 的方程.

（21）（本小题 14 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{是偶数},\\ a_n+3, & a_n\text{是奇数}\end{cases}$（$n=1,2,3,\cdots$），则称 $\{a_n\}$ 为“J 数列”. 设 $\{a_n\}$ 为“J 数列”，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

（Ⅰ）若 $a_1=10$，求 S_{3n} 的值；

（Ⅱ）若 $S_3=17$，求 a_1 的值；

（Ⅲ）证明：$\{a_n\}$ 中总有一项为 1 或 3.

延庆区 2019-2020 学年度高三数学试卷评分参考

一、选择题：（每小题 4 分，共 10 小题，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. C　　2．D.　　3．D　　4．C　　5. B

6．B　　7．A　　8．C　　9．B　　10. A

二、填空题：（每小题 5 分，共 5 小题，共 25 分）

11．$(-\infty,3)$；　　12．$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$；　　13．$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$；

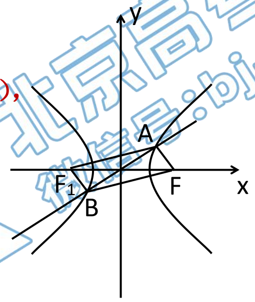
14．16，29；　　15．7，42．

10. 考察知识：双曲线的定义和性质（对称性、渐近线、离心率），

平行四边形的定义和性质（相邻内角互补），

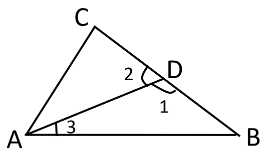
三角形的性质（余弦定理、面积公式）．

正切两角和公式



15. 在 ΔACD 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle 2}=\dfrac{CD}{\sin 45^\circ}$，在 ΔABD 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle 1}=\dfrac{BD}{\sin\angle 3}$，

相除得： $\sin\angle 3=\dfrac{3}{5}$，

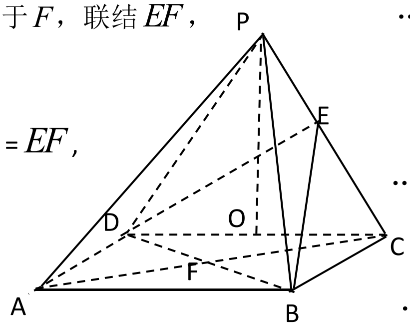


所以 $\sin\angle A=\sin(45^\circ+\angle 3)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=42$．

三、解答题：（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤．）

16.（Ⅰ）联结 AC，设 AC 与 BD 交于 F，联结 EF，　　…………1 分



因为 $PA//$ 平面 BDE，

平面 $PAC\cap$ 平面 $BDE=EF$，

所以 $PA//EF$　　…………4 分

因为 $ABCD$ 是正方形，

所以 F 是 AC 的中点

所以 E 是 PC 的中点　　…………6 分

（Ⅱ）（法一）因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp BC$ …………7 分

因为 $ABCD$ 是正方形，

所以 $BC \perp CD$

因为 $PO \cap CD = O$

所以 $BC \perp$ 平面 PDC …………10 分

所以 $BC \perp PD$

因为 $PD \perp PC$

因为 $BC \cap PC = C$

所以 $PD \perp$ 平面 PBC …………13 分

因为 $BE \subset$ 平面 PBC

所以 $PD \perp BE$

所以 PD 与 BE 成 90° 角. …………14 分

（法二）连接 OF，

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp CD$， $PO \perp OF$. ………7 分

因为 $ABCD$ 是正方形，

所以 $OF \perp CD$.

所以 OF, OC, OP 两两垂直.

以 OF, OC, OP 分别为 x、y、z 建立空间直角坐标系 $O-xyz$.………8 分

则 $P(0,0,2)$，$D(0,-2,0)$，$B(4,2,0)$，$E(0,1,1)$， ………9 分

$\overline{PD} = (0,-2,-2)$，$\overline{BE} = (-4,-1,1)$， ………10 分

$\overline{PD} \cdot \overline{BE} = 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) + (-2) \times 1$ （………1 分）

$= 0$ ………13 分

所以所以 PD 与 BE 成 90° 角. ………14 分

17. 解：选① （Ⅰ）因为 $a_{10} = 16,\ a_8 = 10$，

所以 $d = 3$ …………2 分

所以 $a_1 = a_8 - 7d = 10 - 21 = -11$ …………4 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = -11 + (n-1) \times 3$

$=3n-14$ ············6 分

令 $3n-14=2024$，则 $3n=2038$

此方程无正整数解

所以 2024 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项. ············8 分

不能只看结果；
某一步骤出错，即使后面步骤都对，给分不能超过全部分数的一半；
只有结果，正确给 1 分.

（Ⅱ）（法一）令 $a_n>0$， 即 $3n-14>0$，解得：$n>\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

$\therefore$ 当 $n\ge 5$ 时， $a_n>0$， 当 $n\le 4$ 时， $a_n<0$， ············11 分

$\therefore$ 当 $n=4$ 时，S_n 的最小值为 $S_4=-11-8-5-2=-26$ ····13 分

S_n 无最大值 ············14 分

只给出最小值-26，未说明 n=4 扣 1 分.

S_n 无最大值 ···1 分

（Ⅱ）（法二）$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{25}{2}n$，

$-\frac{b}{2a}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$ ············11 分

$\therefore$ 当 $n=4$ 时，S_n 的最小值为 $S_4=\frac{3}{2}\times 16-\frac{25}{2}\times 4=-26$ ····13 分

S_n 无最大值 ············14 分

选② （Ⅰ）$\because$ $a_{10}=16,\ a_8=8$，

$\therefore$ $d=4$ ············2 分

$\therefore$ $a_1=a_8-7d=8-28=-20$ ············4 分

$\therefore$ $a_n=a_1+(n-1)d=-20+(n-1)\times 4$

$=4n-24$ ············6 分

令 $4n-24=2024$，则 $4n=2048$

解得 $n=512$

$\therefore$ 2024 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 512 项. …………8 分

（Ⅱ）令 $a_n \geq 0$， 即 $4n-24 \geq 0$，解得：$n \geq 6$

$\therefore$ 当 $n=6$ 时， $a_n=0,$

$\therefore$ 当 $n>6$ 时， $a_n>0,$ 当 $n<6$ 时， $a_n<0,$ …………11 分

$\therefore$ 当 $n=5$ 或 $n=6$ 时， S_n 的最小值为

$S_5=S_6=-20-16-12-8-4=-60$. …………13 分

S_n 无最大值 …………14 分

选③ （Ⅰ）$\because$ $a_{10}=16,\ a_8=20$，

$\therefore$ $d=-2$ …………2 分

$\therefore$ $a_1=a_8-7d=20+14=34$ …………4 分

$\therefore$ $a_n=a_1+(n-1)d=34+(n-1)\times(-2)$

$=-2n+36$ …………6 分

令 $-2n+36=2024$，则 $n=-994$（舍去）

$\therefore$ 2024 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项. …………8 分

（在 a_1,d 的基础上利用单调性作出正确判定给满分）

（Ⅱ）令 $a_n \geq 0$， 即 $-2n+36 \geq 0$，解得：$n \leq 18$

$\therefore$ 当 $n=18$ 时， $a_n=0,$

$\therefore$ 当 $n>18$ 时， $a_n<0,$ 当 $n<18$ 时， $a_n>0,$ …………11 分

$\therefore$ 当 $n=17$ 或 $n=18$ 时， S_n 的最大值为

$$S_{17} = S_{18} = \frac{18\times(34+0)}{2} = 306.$$ …………13 分

S_n 无最小值. …………14 分

18．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，抽出的 20 名学生中，来自 A 班的学生有 6 名．根据分层抽样方法，A 班的学生人数估计为 $120\times\frac{6}{20}=36$． …………3 分

只有结果 36 扣 1 分

（Ⅱ）设从选出的 20 名学生中任选 1 人，共有 20 种选法， …………4 分

设此人一周上网时长超过 15 小时为事件 D,

其中 D 包含的选法有 3+2+4=9 种， …………6 分

$\therefore\ P(D)=\frac{9}{20}$． …………7 分

由此估计从 120 名学生中任选 1 名，该生一周上网时长超过 15 小时的概率为 $\frac{9}{20}$． ……………8 分

只有结果 $\frac{9}{20}$ 而无必要的文字说明和运算步骤，扣 2 分.

（Ⅲ）设从 A 班抽出的 6 名学生中随机选取 2 人，其中恰有 $i\ (1\le i\le 2)$ 人一周上网超过 15 小时为事件 E_i，从 B 班抽出的 7 名学生中随机选取 1 人，此人一周上网超过 15 小时为事件 F

则所求事件的概率为：

$$P(E_2\overline{F}\cup E_1F)=\frac{C_3^2C_5^1+C_3^1C_3^1C_2^1}{C_6^2C_7^1}=\frac{15+18}{15\times 7}=\frac{11}{35}.$$ ……………14 分

（Ⅲ）另解：从 A 班的 6 人中随机选 2 人，有 C_6^2 种选法，从 B 班的 7 人中随机选 1 人，有 C_7^1 种选法，

故选法总数为：$C_6^2\cdot C_7^1=15\times 7=105$ 种 ……………10 分

设事件“此 3 人中恰有 2 人一周上网时长超过 15 小时”为 E，

则 E 中包含以下情况：

（1）从 A 班选出的 2 人超 15 小时，而 B 班选出的 1 人不超 15 小时，

（2）从 A 班选出的 2 人中恰有 1 人超 15 小时，而 B 班选出的 1 人超 15 小时，……………11 分

所以 $P(E)=\dfrac{C_3^2C_5^1+C_3^1C_3^1C_2^1}{C_6^2C_7^1}=\dfrac{15+18}{15\times 7}=\dfrac{11}{35}$. ……………14 分

只有 $P(E)=\dfrac{C_3^2C_5^1+C_3^1C_3^1C_2^1}{C_6^2C_7^1}=\dfrac{15+18}{15\times 7}=\dfrac{11}{35}$，而无文字说明，扣 1 分

有设或答，有 $P(E)=\dfrac{11}{35}$，给 3 分

19．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：当$a=1$时，$f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

$\therefore$切线的斜率 $k=f'(0)=2$；

$f(0)=0$

$\therefore$曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为：$y=2x$. ……………5 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{2a(x^2+1)-(2ax+a^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2ax^2+(2-2a^2)x+2a}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(ax-1)(x+a)}{(x^2+1)^2}$ ……………7 分

（1）当 $a>0$时，$f'(x)=0\Rightarrow x_1=-a<0$；$x_2=\dfrac{1}{a}>0$

则 $f(x)$、$f'(x)$随x的变化情况如下表：

$\therefore f(x)$在（$0,\dfrac{1}{a}$）上单调递增，在（$\dfrac{1}{a},+\infty$）上单调递减， ……………9 分

x	0	（0，$\dfrac{1}{a}$）	$\dfrac{1}{a}$	（$\dfrac{1}{a},+\infty$）
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	a^2-1	递增	$f(\dfrac{1}{a})$	递减

法 1：$\therefore f(x)$的最大值为$f(\dfrac{1}{a})=a^2$ ……………10 分

若$f(x)$存在最小值，则 $x\in$（$0,+\infty$）时，$f(x)\geq f(0)=a^2-1$恒成立，

即：$\dfrac{2ax+a^2-1}{x^2+1}\geq a^2-1$

$\therefore 2ax\geq$（a^2-1）$x^2\Leftrightarrow\dfrac{a^2-1}{2a}\leq\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore\dfrac{a^2-1}{2a}\leq 0$.

$\because a>0,\therefore a^2-1\leq 0,\therefore 0<a\leq 1$ ……………13 分

所以 a 的取值范围为 $(0,1]$. ……………14 分

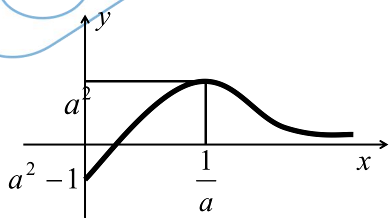
法 2： $\therefore f(x)$的最大值为$f(\dfrac{1}{a})=a^2$； ……………10 分

当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$2ax>2$，$2ax+a^2-1>a^2+1>0$，

$\therefore\ x\to+\infty$时$,f(x)\to 0$；

即 $x\in[0,\dfrac{1}{a}]$时，$f(x)\in[a^2-1,a^2]$；

$x\in[\dfrac{1}{a},+\infty)$时，$f(x)\in$（$0$，$a^2$]

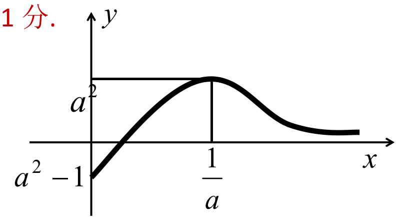


若$f(x)$存在最小值，则 $f(0)=a^2-1\leq 0$，

$\therefore\ 0<a\leq 1$

所以 a 的取值范围为 $(0,1]$. ……………14 分

用趋近说：$\therefore\ x\to+\infty$时$,f(x)\to 0$，论述不严谨，扣 1 分.



（2）当 $a<0$时，$f'(x)=0\Rightarrow x_1=-a>0$; $x_2=\dfrac{1}{a}<0$.

则 $f(x)$、$f'(x)$随x的变化情况如下表：

x	0	（0，$-a$）	$-a$	（$-a,+\infty$）
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	a^2-1	递减	$f(-a)$	递增

$\therefore f(x)$在（$0,-a$）上单调递减，在（$-a,+\infty$）上单调递增，

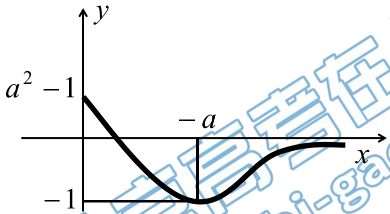
法 1： $\therefore f(x)$的最小值为$f(-a)=-1$.

若$f(x)$存在最大值，则$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)\le a^2-1$恒成立，

即：$\dfrac{2ax+a^2-1}{x^2+1}\le a^2-1$

$\therefore 2ax\le(a^2-1)x^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2-1}{2a}\le\dfrac{1}{x}$在$x\in(0,+\infty)$恒成立，

$\therefore \dfrac{a^2-1}{2a}\le 0, \because a<0, \therefore a^2-1\ge 0, \therefore a\le -1$.



综上：a的取值范围是$(-\infty,-1]\cup(0,1]$.

法 2： $\therefore f(x)$的最小值为$f(-a)=-1$；

当$x>-a$时，$2ax<-2a^2$，$2ax+a^2-1<-a^2-1<0$，

$\therefore\ x\to+\infty, f(x)\to 0$；（论述不严谨，扣 1 分）

即$x\in[0,-a]$时，$f(x)\in[-1,a^2-1]$；$x\in[-a,+\infty)$时，$f(x)\in[-1,0)$

若$f(x)$存在最大值，则$f(0)=a^2-1\ge 0$，$a\le -1$.

综上：a的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[0,1]$.

20.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）法一：依题意可得$\begin{cases} c=\sqrt{2}, \\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{2}, \\ c=\sqrt{2}. \end{cases}$ （试根法）

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. …3 分

法二：设椭圆的右焦点为F_1，则$|CF_1|=3$，

$\therefore\ 2a=4,\ a=2$，

$\because c=\sqrt{2}$，　　$\therefore b=\sqrt{2}$，

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　…3 分

（Ⅱ）因为点Q在第一象限，所以直线l的斜率存在，　　…4 分

设直线l的斜率为k，则直线l的方程为$y=kx$，设直线 l与该椭圆的交点

为$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 由$\begin{cases} y=kx \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$可得$(1+2k^2)x^2-4=0$，　　…5 分

易知$\Delta>0$，且$x_1+x_2=0, x_1x_2=\dfrac{-4}{1+2k^2}$，　　…6 分

则$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$　　…7 分

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{0-4\dfrac{-4}{1+2k^2}}=4\sqrt{\dfrac{1+k^2}{1+2k^2}}=3$，

所以$k^2=\dfrac{7}{2}, k=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$（负舍），所以直线$l$的方程为$y=\dfrac{\sqrt{14}}{2}x$．…8 分

用Q到原点距离公式（未用弦长公式）按照相应步骤给分，

设点$Q(x_1,y_1)$，$\because\ |PQ|=3,\quad \therefore\ |OQ|=\dfrac{3}{2},\quad \therefore\ |OQ|^2=\dfrac{9}{4}$,

$\therefore x_1^2+y_1^2=\dfrac{9}{4}$，又$\because x_1^2+2y_1^2=4$，解得：$\therefore x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

所以直线l的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，即$y=\dfrac{\sqrt{14}}{2}x$．

（Ⅲ）设$M(x_m,y_m)$，$Q(x_0,y_0)$，则$P(-x_0,-y_0)$，易知$0<x_0<2$，$0<y_0<1$.

由$A(2,0)$，$B(0,\sqrt{2})$，所以直线AB的方程为$x+\sqrt{2}y-2=0$.　　…9 分

若使ΔBOP的面积是ΔBMQ的面积的 4 倍，只需使得$|OQ|=4|MQ|$，　　…10

分

法一：即 $\frac{x_M}{x_Q}=\frac{3}{4}$ ① . …11 分

设直线 l 的方程为 $y=kx$，由 $\begin{cases} y=kx \\ x+\sqrt{2}y-2=0 \end{cases}$ 得，$M(\frac{2}{1+\sqrt{2}k},\frac{2k}{1+\sqrt{2}k})$ …12 分

由 $\begin{cases} y=kx \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 得，$Q(\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}},\frac{2k}{\sqrt{1+2k^2}})$， …13 分

代入①可得 $14k^2-18\sqrt{2}k+7=0$，即：$7k^2-9\sqrt{2}k+\frac{7}{2}=0$（约分后求解）

解得 $k=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}$，所以 $y=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}x$. …15 分

法二：所以 $\overline{OQ}=\frac{4}{3}\overline{OM}=(\frac{4}{3}x_m,\frac{4}{3}y_m)$，即 $Q(\frac{4}{3}x_m,\frac{4}{3}y_m)$. …11 分

设直线 l 的方程为 $y=kx$，由 $\begin{cases} y=kx \\ x-\sqrt{2}y-2=0 \end{cases}$ 得，$M(\frac{2}{1+\sqrt{2}k},\frac{2k}{1+\sqrt{2}k})$ …12 分

所以 $Q(\frac{8}{3+3\sqrt{2}k},\frac{8k}{3+3\sqrt{2}k})$，因为点 Q 在椭圆 G 上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$， …13 分

代入可得 $14k^2-18\sqrt{2}k+7=0$，即：$7k^2-9\sqrt{2}k+\frac{7}{2}=0$

解得 $k=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}$，

所以 $y=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}x$. …15 分

法三：所以 $\overline{OM}=\frac{3}{4}\overline{OQ}=(\frac{3}{4}x_0,\frac{3}{4}y_0)$，即 $M(\frac{3}{4}x_0,\frac{3}{4}y_0)$. …11 分

点 M 在线段 AB 上，所以 $\frac{3}{4}x_0+\frac{3\sqrt{2}}{4}y_0-2=0$，整理得 $x_0=\frac{8}{3}-\sqrt{2}y_0$，① …12 分

因为点 Q 在椭圆 G 上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，②

把①式代入②式可得 $9y_0^2-12\sqrt{2}y_0+7=0$，解得 $y_0=\dfrac{2\sqrt{2}\pm1}{3}$. …13 分

于是 $x_0=\dfrac{8}{3}-\sqrt{2}y_0=\dfrac{4\mp\sqrt{2}}{3}$，所以，$k=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{9\sqrt{2}\pm8}{14}$.

所以，所求直线 l 的方程为 $y=\dfrac{9\sqrt{2}\pm8}{14}x$. …15 分

21. 解：（Ⅰ）当 $a_1=10$ 时，$\{a_n\}$ 中的各项依次为 $10,5,8,4,2,1,4,2,1,\cdots$，

所以 $S_{3n}=7n+16$. ……………………………3 分

（Ⅱ）① 若 a_1 是奇数，则 $a_2=a_1+3$ 是偶数，$a_3=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{a_1+3}{2}$，

由 $S_3=17$，得 $a_1+(a_1+3)+\dfrac{a_1+3}{2}=17$，解得 $a_1=5$，适合题意.

② 若 a_1 是偶数，不妨设 $a_1=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_2=\dfrac{a_1}{2}=k$.

若 k 是偶数，则 $a_3=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{k}{2}$，由 $S_3=17$，得 $2k+k+\dfrac{k}{2}=17$，此方程无整数解；

若 k 是奇数，则 $a_3=k+3$，由 $S_3=17$，得 $2k+k+k+3=17$，此方程无整数解.

综上，$a_1=5$. ……………………………8 分

（Ⅲ）首先证明：一定存在某个 a_i，使得 $a_i\leqslant6$ 成立.

否则，对每一个 $i\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_i>6$，则在 a_i 为奇数时，必有 $a_{i+2}=\dfrac{a_i+3}{2}<a_i$；

在 a_i 为偶数时，有 $a_{i+2}=\dfrac{a_i}{2}+3<a_i$，或 $a_{i+2}=\dfrac{a_i}{4}<a_i$.

因此，若对每一个 $i\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_i>6$，则 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 单调递减，

注意到 $a_n\in\mathbf{N}^*$，显然这一过程不可能无限进行下去，

所以必定存在某个 a_i，使得 $a_i\leqslant6$ 成立.

经检验，当 $a_i=2$，或 $a_i=4$，或 $a_i=5$ 时，$\{a_n\}$ 中出现 1；

当 $a_i=6$ 时，$\{a_n\}$ 中出现 3，

综上，$\{a_n\}$ 中总有一项为1或3．　　　　　　　　　　　……………………………14 分