

数学试卷

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 3\}$, $N = \{x | x^2 \leq 4\}$, 那么 $A \cap B =$

- A. $[-2, -1) \cup [2, 3)$ B. $(-1, 2]$ C. $[2, 3)$ D. $[-2, 3)$

2. 复数 $\frac{2+i}{4-3i} =$

- A. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ B. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ C. $\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$ D. $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

3. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $S_3 = 3a_1 + 3$, 则 $d =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-2, k)$, 且 $\vec{a} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则实数 $k =$

- A. 14 B. -6 C. 6 D. -14

5. 设 a, b 是实数, 则“ $a > b$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 将函数 $y = 2 \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 再将所得图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到的函数解析式为

- A. $y = 2 \cos 2x$ B. $y = -2 \cos 2x$
C. $y = -2 \sin 2x$ D. $y = 2 \sin 2x$

7. 设函数 $f(x) = xe^x$, 则

- A. $x = -1$ 为 $f(x)$ 的极大值点且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 1;
B. $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 $2e$;
C. $x = -1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 1;
D. $x = -1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 $2e$.

8. 若函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x - a$, 当 $x \geq \frac{1}{3}$ 时, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 3]$ B. $[3, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{25}{3}]$ D. $[\frac{25}{3}, +\infty)$

9. 若双曲线的实轴长与虚轴长之和等于其焦距的 $\sqrt{2}$ 倍, 且一个顶点的坐标为 $(2, 0)$, 则双曲线的标准方程为

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

10. 过点 $P(\frac{1}{2}, 1)$ 的直线 l 与圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, C 为圆心, 当 $\angle ACB$ 最小时, 直线 l 的方程为

- A. $2x + y + 2 = 0$ B. $2x + y - 2 = 0$ C. $2x - 4y + 3 = 0$ D. $2x + 4y - 3 = 0$

二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 分别是三边 a, b, c 所对的角, $a = 15, b = 10, A = \frac{\pi}{3}$,

$\sin B =$ _____.

12. 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_1, a_3, a_4 成等比数列,

则 $a_1 =$ _____; $S_n =$ _____.

13. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx + 4$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线与直线 $y = -\frac{1}{5}x$ 互相垂直, 则函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最大值为 _____.

14. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是单位向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ 的最小值为 _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < a, \\ 4(x^2 - 3x + 2), & x \geq a. \end{cases}$, 则当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值为 _____; 若 $f(x)$

恰有 2 个零点, 求实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题（本题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1$ ，再从条件①、②、③这三个条件中选择一个作为已知，求：

(I) $f(x)$ 的最小正周期；

(II) $f(x)$ 的单调递增区间.

条件①: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; 条件②: $a = \sqrt{3}$; 条件③: $f(x)$ 图像的对称轴为 $x = \frac{\pi}{8}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题满分 14 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 2$ ， $S_3 = 14$. 数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_1 = 5$ ， $b_3 = 3$ ，且 $\{b_n - a_n\}$ 为等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18.（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a, b, c ，且 A ， B ， C 成等差数列.

(I) 若 $b = \sqrt{13}$ ， $a = 3$ ，求 c 的值；

(II) 设 $t = \sin A \sin C$ ，求 t 的最大值.

19. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (m-2)x - 2m \ln x (m < 0)$.

(I) 当 $m = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(II) 当 $m \leq -\frac{1}{2}$ 时, 求证: $f(x) - mx$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(III) 求证: 当 $-1 < m < 0$ 时, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 2m(1 - \ln 2) - 2$.

20. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 且离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设过点 $F(1, 0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 D , 求证: $\frac{|AB|}{|DF|}$ 为定值.

21. (本小题满分 14 分)

已知 $\{a_n\}$ 是由正整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 最小值记为 B_n ,

令 $b_n = \frac{A_n}{B_n}$.

(I) 若 $a_n = 2n (n = 1, 2, 3, \dots)$, 写出 b_1, b_2, b_3 的值;

(II) 证明: $b_{n+1} \geq b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$;

(III) 若 $\{b_n\}$ 是等比数列, 证明: 存在正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 是等比数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯