2024 北京丰台高一（上）期末

数　学

2024.01

考生须知：

1.答题前，考生务必先将答题卡上的学校、班级、姓名、教育 ID 号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的教育 ID 号、姓名。在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2.本次练习所有答题均在答题卡上完成，选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3.请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效。在练习卷、草稿纸上答题无效。

4.本练习卷满分共 150 分，作答时长 120 分钟。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|-1\le x<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A.$\{x|-2<x<2\}$　　B.$\{x|-1\le x<1\}$　　C.$\{x|-1\le x\le 1\}$　　D.$\{x|-1\le x<2\}$

2.下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $y=\ln x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=e^x$　　D. $y=-|x|$

3.若 $a>b>0$，$c>d$，则下列结论一定成立的是（　）

A. $a-b<0$　　B. $a+c>b+c$　　C. $ac>bc$　　D. $ac>bd$

4.已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\tan\alpha=$（　）

A. -3　　B. -1　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D.1

5. $\lg 2+\lg 5-8^{-\frac{1}{3}}+\sqrt{(1-\pi)^2}=$（　）

A. $\pi-\dfrac{1}{2}$　　B. $\pi-2$　　C. $4-\pi$　　D. $\dfrac{3}{2}-\pi$

6.函数 $f(x)=\sin x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，则（　）

A. $f(x)$是最小正周期为2π的奇函数　　B. $f(x)$是最小正周期为2π的偶函数

C. $f(x)$是最小正周期为π的奇函数　　D. $f(x)$是最小正周期为π的偶函数

7.函数 $f(x)=2^x+x$，$g(x)=\log_2 x+x$，$h(x)=\sqrt{x}+x$ 的零点分别为 a，b，c，则 a，b，c 的大小顺序为（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

8.若 α，β 都是第一象限角，则“$\sin\alpha>\sin\beta$”是“$\tan\alpha>\tan\beta$”成立的（　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

9.荀子《劝学》中说：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海.”学习是日积月累的过程，每天进步一点点，前进不止一小点.若甲、乙两同学当下的知识储备量均为 a，甲同学每天的“进步”率和乙同学每天的“退步”率均为 2%.n 天后，甲同学的知识储备量为$(1+2\%)^n a$，乙同学的知识储备量为$(1-2\%)^n a$，则甲、乙的知识储备量之比为 2 时需要经过的天数约为（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 102\approx 2.0086$，$\lg 98\approx 1.9912$）

A.15　　B.18　　C.30　　D.35

10.记 $R(A)$ 为非空集合 A 中的元素个数，定义 $A*B=\begin{cases}R(A)-R(B),R(A)\geq R(B)\\R(B)-R(A),R(A)<R(B)\end{cases}$.若 $A=\{1,2\}$，$B=\{x|(x^2+ax)(x^2+ax+5)=0\}$，且 $A*B=1$，设实数 a 的所有可能取值组成的集合是 S，则 $R(S)$ 等于（　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.函数 $f(x)=\lg x+\sqrt{4-x}$ 的定义域为__________.

12.能说明“关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立”为假命题的实数 a 的一个取值为________.

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0\\x^3+1,x\leq 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是________.

14.已知 $f(x)=2\cos^2 x-\sin x$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________，$f(x)$ 的最小值为________.

15.双曲函数是一类与三角函数类似的函数，基本的双曲函数有：双曲正弦函数 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正切函数 $\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.给出下列四个结论：

①函数 $y=\cosh(x)$ 是偶函数，且最小值为 2；

②函数 $y=\sinh(x)$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

③函数 $y=\tanh(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且值域为 $(-1,1)$；

④若直线 $y=t$ 与函数 $y=\cosh(x)$ 和 $y=\sinh(x)$ 的图象共有三个交点，这三个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，则 $x_1+x_2+x_3>\ln(1+\sqrt{2})$.

其中所有正确结论的序号是_______________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

16.（本小题 13 分）

已知集合 $A=\{x|a-1\le x\le a+10\}$，$B=\{x|x^2-4x-21\le 0\}$.

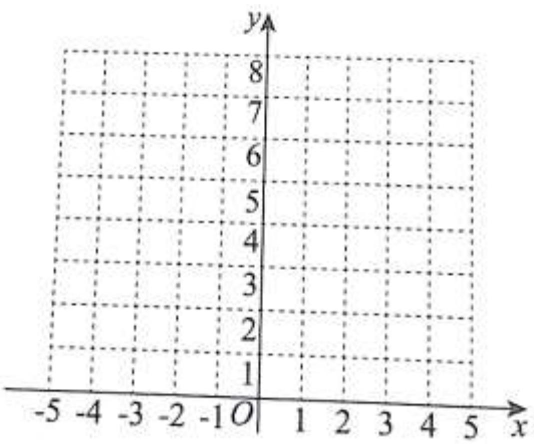
（I）若 $a=0$，求 $\complement_{\mathrm{R}}A$，$A\cup B$；

（II）若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

17.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2^{|x|}$.

（I）画出函数 $f(x)$ 的图象，并写出函数 $f(x)$ 的值域及单调区间；



（II）解不等式 $f(x)\ge 16$；

（III）若 $f(x)\ge a^2-a+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和角 β 的顶点均与坐标原点 O 重合，始边均为 x 轴的非负半轴，终边分别与单位圆交于 P，Q 两点，若 P，Q 两点关于 y 轴对称，点 P 位于第一象限，横坐标为 $\frac{3}{5}$.

（I）求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

（II）求 $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(-\alpha)+\cos(\pi-\beta)}$ 的值.

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\dfrac{1}{2}$，其中 $0<\omega<2$.从条件①、条件②、条件③中选择一个条件，解决下列问题.

（I）求 ω 的值；

（II）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（III）若存在 $x_0\in[0,m]$，使得 $f(x_0)=-1$，求实数 m 的取值范围.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$；

条件②：$f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=0$；

条件③：$f(x+\pi)=f(x)$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（本小题 15 分）

2023 年 9 月 23 日第十九届亚运会在杭州开幕，本届亚运会吉祥物是“琮琮”、“莲莲”、“宸宸”.某商家成套出售吉祥物挂件，通过对销售情况统计发现：在某个月内（按 30 天计），每套吉祥物挂件的日销售价格 $f(x)$（单位：元）与第 x 天 $(1\le x\le 30, x\in\mathrm{N})$ 的函数关系满足 $f(x)=30+\dfrac{k}{x}$（k 为常数，且 $k>0$），日销售量 $g(x)$（单位：套）与第 x 天的部分数据如下表所示：

x	15	20	25	30
$g(x)$	650	645	650	655

设该月吉祥物挂件的日销售收入为 $M(x)$（单位：元），已知第 15 天的日销售价格为 32 元.

（I）求 k 的值；

（II）根据上表中的数据，若用函数模型 $g(x)=a|x-m|+b$ 来描述该月日销售量 $g(x)$ 与第 x 天的变化关系，求函数 $g(x)$ 的解析式；

（III）利用（II）中的结论，求 $M(x)$ 的最小值.

21.（本小题共 14 分）

设 $n\in\mathrm{N}^*$，若非空集合 A，B，C 同时满足以下 4 个条件，则称 A，B，C 是“$n-$无和划分”：

① $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$；

②$A\cap B=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$；

③$1\in A$，且 C 中的最小元素大于 B 中的最小元素；

④$\forall x\in A$，$y\in B$，$z\in C$，必有 $x+y\notin C$，$y+z\notin A$，$z+x\notin B$.

（I）若 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,4\}$，$C=\{5,6\}$，判断 A，B，C 是否是"$6-$无和划分"，并说明理由.

（II）已知 A，B，C 是"$n-$无和划分"（$n\geq 4$）.

（i）证明：对于任意 m，$k\in C\left(m<k\right)$，都有 $k-m\neq 1$；

（ii）若存在 i，$j\in C$，使得 $j=i+2$，记 $\Omega=A\cup B\cup C$.证明：Ω 中的所有奇数都属于 A.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号12345678910

答案BDBAADCCB C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.$\{x|0<x\le 4\}$　　12.0（答案不唯一，只要满足“$a\le 0$或$a\ge 8$”即可）

13.$(-\infty,1]$　　14.1；-1　　15.②③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

16.（本小题 13 分）

解：（I）当$a=0$时，$A=\{x|-1\le x\le 10\}$，所以$\complement_{R}A=\{x|x<-1或x>10\}$，

因为$x^2-4x-21\le 0$，所以$(x-7)(x+3)\le 0$，

所以$B=\{x|-3\le x\le 7\}$，所以$A\cup B=\{x|-3\le x\le 10\}$.

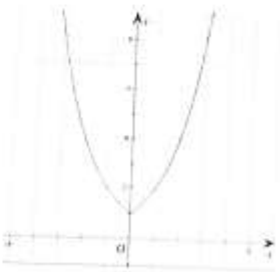
（II）由（I）知$B=\{x|-3\le x\le 7\}$，又$A\subseteq B$，

所以$\begin{cases}a-1\le -3\\ a+10\ge 7\end{cases}$，解得：$-3\le a\le -2$.

所以实数 a 的取值范围为$[-3,-2]$.

17.（本小题 14 分）

解：（I）函数$f(x)$的图象如下：



$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,0]$，单调递增区间为$[0,+\infty)$.

（II）$2^{|x|}\ge 16$，即$2^{|x|}\ge 2^4$，

可得$|x|\ge 4$，即$x\ge 4$，或$x\le -4$.

所以该不等式的解集为$\{x|x\le -4或x\ge 4\}$.

（III）由$f(x)\ge a^2-a+1$可得，$f(x)_{\min}\ge a^2-a+1$，

又$f(x)_{\min}=1$，所以$a^2-a+1\le 1$，解得$0\le a\le 1$.

18.（本小题 14 分）

解：（I）依题意知，点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，

所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{25}$.

（II）$\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(-\alpha)+\cos(\pi-\beta)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\beta}{-\sin\alpha-\cos\beta}=\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}=-7$.

19.（本小题 15 分）

解：$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

选条件①，有 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，所以 $\omega=1+6k\,(k\in\mathrm{Z})$.

（I）因为 $0<\omega<2$，所以 $\omega=1$.

（II）由（I）得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k_1\pi\,(k_1\in\mathrm{Z})$ 得，$-\frac{\pi}{3}+k_1\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k_1\pi$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{3}+k_1\pi,\frac{\pi}{6}+k_1\pi\right](k_1\in\mathrm{Z})$.

（III）当 $x\in[0,m]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，

因为 $f(x_0)=-1$ 时，$2x_0+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k_2\pi\,(k_2\in\mathrm{Z})$，

所以 $\exists x_0\in[0,m]$，$f(x_0)=-1$ 时，$2m+\frac{\pi}{6}\ge\frac{3\pi}{2}$，所以 $m\ge\frac{2\pi}{3}$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{2\pi}{3},+\infty\right)$.

选条件②，有 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi\,(k\in\mathrm{Z})$，

所以 $\omega=-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}k$，以下同条件①.

选条件③，有 π 是 $f\left(x\right)$ 的周期，设 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 T，则 $\pi=kT\left(k\in \mathrm{Z}\right)$，

所以 $\pi=k\frac{2\pi}{2\omega}$，所以 $\omega=k$，以下同条件①.

20.（本小题 15 分）

解：(I) 由题意得 $f\left(15\right)=32$，所以 $30+\frac{k}{15}=32$，解得 $k=30$.

(II) 根据表中数据可得 $m=20$，

由 $g\left(20\right)=645$，$g\left(25\right)=650$ 得，$a=1$，$b=645$，

所以 $g\left(x\right)=\left|x-20\right|+645$，其中 $1\le x\le 30$，$x\in \mathrm{N}$.

(III) 由 (I)(II) 可知 $M\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)=\left(30+\frac{30}{x}\right)\left(\left|x-20\right|+645\right)$，$1\le x\le 30$，$x\in \mathrm{N}$，

当 $1\le x\le 20$ 时，$M\left(x\right)=30\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-x+665\right)=30\left(\frac{665}{x}-x+664\right)$，

可知 $M\left(x\right)$ 在区间 $\left\{x\left|1\le x\le 20,x\in \mathrm{N}\right.\right\}$ 上单调递减，

所以当 $1\le x\le 20$ 时 $M\left(x\right)$ 的最小值为 $M\left(20\right)=20317.5$；

当 $20<x\le 30$ 时，$M\left(x\right)=30\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x+625\right)=30\left(\frac{625}{x}+x+626\right)$，

因为 $\frac{625}{x}+x\ge 2\sqrt{\frac{625}{x}\cdot x}=50$，当且仅当 $x=25$ 时，等号成立，

所以当 $20<x\le 30$ 时 $M\left(x\right)$ 的最小值为 $M\left(25\right)=20280$，

综上所述，当 $x=25$ 时，该月日销售收入的最小值为 20280 元.

21.（本小题 14 分）

解：(I) 不是.

取 $1\in A$，$4\in B$，则 $1+4=5\in C$，说明 A，B，C 不是“$6-$无和划分”.

(II)(i) 假设存在 m，$k\in C\left(m<k\right)$，使得 $k-m=1$，记 m 的最小值为 m_0，

则 m_0，$m_0+1\in C$；

设 B 中最小的元素为 b，则 $b\ge 2$，所以 $i\in A\left(i=1,2,3,\cdots,b-1\right)$，

所以 $m_0-b\notin A$，$m_0+1-b\notin A$（否则与 $b\in B$，m_0，$m_0+1\in C$ 矛盾），

$m_0+1-b\notin B$（否则与 $b-1\in A$，$m_0\in C$ 矛盾），所以 $m_0+1-b\in C$，

因为 $m_0-b<m_0$，所以 m_0-b，m_0+1-b 不同属于 C.

所以$\begin{cases}m_0-b\in B\\m_0+1-b\in C\end{cases}$，这与$1\in A$矛盾.

所以假设不成立.

（ii）因为 A，B，C 是“$n-$无和划分”，且存在 i，$j\in C$，使得 $j=i+2$，记 i 的最小值为i_0，所以方

i_0，$i_0+2\in C$；

由（i）知i_0-2，i_0-1，i_0+1，$i_0+3\notin C$，

因为$1\in A$，所以i_0-1，$i_0+1\in A$，所以$3\notin B$，

设 B 中最小的元素为 b，若$b\neq 2$，则$b\geq 4$，所以$i_1\in A\left(i_1=1,2,\cdots,b-1\right)$，

所以$i_0-b\notin A$，$i_0+2-b\notin A$（否则与$b\in B$，i_0，$i_0+2\in C$矛盾），

所以$i_0+2-b\notin B$（否则$i_0+2-b\in B$与$b-2\in A$，$i_0\in C$矛盾），

所以$i_0+2-b\in C$，又因为i_0-b和i_0+2-b不同属于 C，所以$i_0-b\in B$，

这与$2\in A$，$i_0+2-b\in C$矛盾，所以$b=2$，即$2\in B$.

所以$3\notin C$，所以$3\in A$.

所以$5\notin C$，$i_0-3\notin B$，所以$i_0-3\notin C$（否则与$i_0-1\in A$，$2\in B$矛盾），所以$i_0-3\in A$.

若$5\in B$，则与$i_0-3\in A$和$i_0+2\in C$矛盾，所以$5\in A$，所以$7\notin C$，

$i_0-5\notin B$（否则与$5\in A$，$i_0\in C$矛盾），

$i_0-5\notin C$（否则与$i_0-3\in A$，$2\in B$矛盾），所以$i_0-5\in A$.

以此类推，对于任意奇数$t<i_0$，都有$t\in A$，$i_0-t\in A$.

所以i_0为偶数（否则，$i_0-2\in A$，与$2\in B$和$i_0\in C$矛盾），

所以i_0-t，i_0+1均为奇数.

因为$i_0+3\notin C$，所以$i_0+3\notin B$（否则与$3\in A$，$i_0\in C$矛盾），所以$i_0+3\in A$，

所以$i_0+5\notin C$，所以$i_0+5\notin B$（否则与$5\in A$，$i_0\in C$矛盾），所以$i_0+5\in A$，

以此类推，对于任意大于i_0，小于或等于 n 的奇数都属于集合 A.

综上所述，Ω中的所有奇数都属于集合 A.