2023年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理科)

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

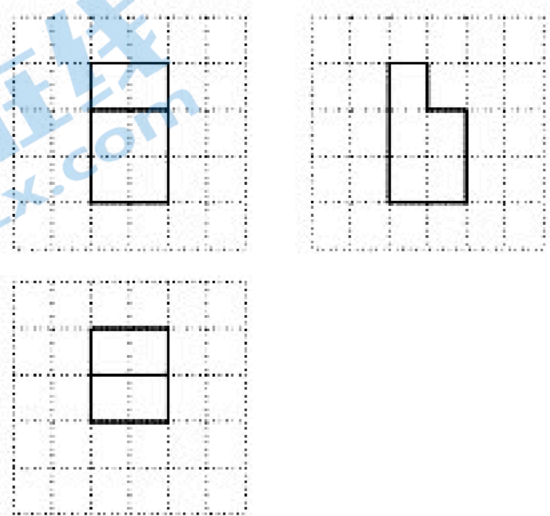
1. 设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\bar{z}=$ ( )

A. $1-2\mathrm{i}$　B. $1+2\mathrm{i}$　C. $2-\mathrm{i}$　D. $2+\mathrm{i}$

2. 设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，则 $\{x|x\geqslant 2\}=$ ( )

A. $\complement_U(M\cup N)$　B. $N\cup\complement_U M$　C. $\complement_U(M\cap N)$　D. $M\cup\complement_U N$

3. 如图，网格纸上绘制的一个零件的三视图，网格小正方形的边长为1，则该零件的表面积为 ( )



A. 24　B. 26　C. 28　D. 30

4. 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$ ( )

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

5. 设 O 为平面坐标系的坐标原点，在区域 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 内随机取一点，记该点为 A，则直线 OA 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为 ( )

A. $\dfrac{1}{8}$　B. $\dfrac{1}{6}$　C. $\dfrac{1}{4}$　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$ 单调递增，直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像的两条对称轴，则 $f(-\dfrac{5\pi}{12})=$ ( )

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 甲乙两位同学从6种课外读物中各自选读2种，则这两人选读的课外读物中恰有1种相同的选法共有 ( )

A. 30种　B. 60种　C. 120种　D. 240种

8. 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^\circ$，若 ΔPAB 的面积等于 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为 ( )

A. π　B. $\sqrt{6}\pi$　C. 3π　D. $3\sqrt{6}\pi$

9. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，AB 为斜边，$\triangle ABD$ 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为 ( )

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\frac{2\pi}{3}$，集合$S=\{\cos a_n|n\in \mathbf{N}^*\}$，若$S=\{a,b\}$，则$ab=$ (　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

11. 设A，B为双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$上两点，下列四个点中，可为线段AB中点的是 (　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(1,3)$　　D. $(-1,-4)$

12. 已知$\odot O$的半径为1，直线PA与$\odot O$相切于点A，直线PB与$\odot O$交于B，C两点，D为BC的中点，若$|PO|=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值为 (　　)

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知点$A(1,\sqrt{5})$在抛物线$C:y^2=2px$上，则A到C的准线的距离为______.

14. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y\leqslant -1\\ x+2y\leqslant 9\\ 3x+y\geqslant 7\end{cases}$，则$z=2x-y$的最大值为______.

15. 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_8$，$a_9a_{10}=-8$，则$a_7=$______.

16. 设$a\in(0,1)$，若函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，则a的取值范围是______.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第1721题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22、23题为选考题，考生根据要求作答。(一)必考题：60分.

17. (12分)

某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行10次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率，甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为x_i，$y_i(i=1,2,\cdots 10)$，试验结果如下：

试验序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记$z_i=x_i-y_i(i=1,2,\cdots,10)$，记$z_1$，$z_2$，$\cdots$，$z_{10}$的样本平均数为$\bar{z}$，样本方差为$s^2$.

(1) 求$\bar{z}$，s^2；

(2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高(如果$\bar{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高).

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$.

(1) 求 $\sin\angle ABC$

(2) 若 D 为 BC 上一点，且 $\angle BAD=90^\circ$，求 $\triangle ADC$ 的面积.

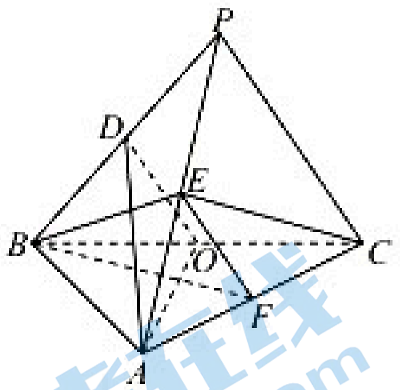
19. (12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.

(1) 证明：EF // 平面 ADO；

(2) 证明：平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

(3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 C：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A(-2,0)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 点 $(-2,3)$ 的直线交 C 于点 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴的交点分别为 M，N，证明：线段 MN 的中点为定点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}+a)\ln(1+x)$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 是否存在 a, b，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称，若存在，求 a, b 的值，若不存在，说明理由；

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值，求 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22. **[选修 4－4：坐标系与参数方程] (10 分)**

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为板点，x 轴正半轴为板轴建立枝坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，曲线 C_2: $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$).

(1) 写出 C_1 的直角坐标方程；来源：高三答案公众号

(2) 若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点，也与 C_2 没有公共点，求 m 的取值范围.

23. **[选修 4－5：不等式选讲] (10 分)**

已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集；

(2) 在直角坐标系 xOy 中，求不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y\\x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.

2023 年全国统一高考数学试卷

（乙卷理科）

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用 0．5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一.选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^5}$，则 $\bar{z}=($　　$)$

A. $1-2\mathrm{i}$　　B. $1+2\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】由题设，易知 $z=\dfrac{2+i}{1+i^2+i^5}=\dfrac{2+i}{1-1+i}=\dfrac{-2i^2+i}{i}=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$，选 B.

2.设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\,|\,x<1\},N=\{x\,|-1<x<2\}$，则 $\{x\,|\,x\geq 2\}=($　　$)$

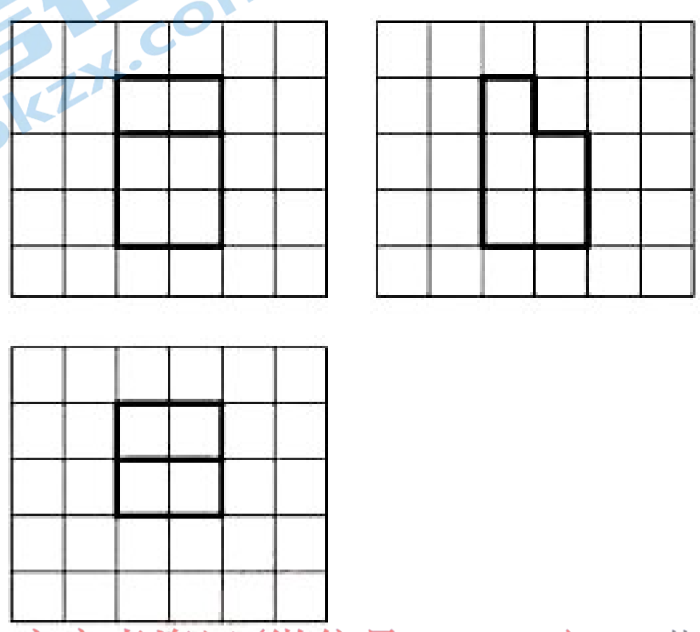
A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$　　C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

【答案】A

【解析】由题设，易知 $M\cup N=\{x|x<2\}$，所以 $C_U(M\cup N)=\{x|x\geqslant 2\}$，选 A.

3.如图，网格纸上绘制的一个零件的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该零件的表面积为(　　)

A.24　　B.26　　C.28　　D.30



【答案】D

【解析】由题设，可知该几何体由一个正方体和一个平躺的正四棱柱拼接而成，其表面积为 $S=6\times2\times2+2\times(2+1)\times1=24+6=30$，选 D.

4.已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$(　　)

A. -2　　B.-1　　C.1　　D.2

【答案】D

【解析】由题设，可知 $f(x)=x\cdot\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$，且 $y=x$ 为奇函数，则 $g(x)=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$ 为奇函数，令 $g(x)+g(-x)=0$，

得 $a=2$，选 D.

5.设 O 为平面坐标系的坐标原点，在区域 $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le4\}$ 内随机取一点，记该点为 A，则直线 OA 的倾斜角不大于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为(　　)

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

【答案】C

【解析】由题设，可知符合条件的点 A 在 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant4\}$ 内，同时夹在直线 $y=0$ 和 $y=x$ 之间，易知其面积占圆环区域面积 $\dfrac{1}{4}$，故选 C.

6.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增，直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像的两条对称轴，则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=$(　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】设 $\omega>0$，由题意：$\omega\dfrac{\pi}{6}+\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$\omega\dfrac{2}{3}\pi+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，相减有 $\omega\dfrac{\pi}{2}=\pi$，故 $\omega=2$，代入上式，$\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，取 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}$，$f(x)=\sin(2x-\dfrac{5\pi}{6})$，则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin(-\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，选 D.

7.甲乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 2 种，则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有(　　)

A.30 种　　B.60 种　　C.120 种　　D.240 种

【答案】C

【解析】从 6 种课外读物中选出一种让两人共同选择有 C_6^1 种，然后甲有 5 种选择，乙有 4 种选择，由乘法原理共有：$C_6^1\times5\times4=120$ 种选法，选 C.

8.已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$, O 为底面圆心，PA,PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^\circ$，若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为(　　)

A. π　　　　B. $\sqrt{6}\pi$　　　　C. 3π　　　　D. $3\sqrt{6}\pi$

【答案】B

【解析】在 $\triangle AOB$ 中，$OA=OB=\sqrt{3}$，$\angle AOB=120^\circ$，由余弦定理可知 $AB=3$，在 $\triangle PAB$ 中，作 $PC\perp AB$ 于 C，则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times PC\times AB$，则 $PC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，由 $PA^2=PC^2+AC^2$，则有 $PA=3$，由 $PA^2=PO^2+AO^2$，$PO=\sqrt{6}$，体积为 $V=\frac{1}{3}\times S\times PO=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times PO=\sqrt{6}\pi$.

选 B.

9.已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，AB 为斜边，$\triangle ABD$ 为等边三角形，若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　　　D. $\frac{2}{5}$

【答案】C

【解析】取 AB 中点记为 E，等腰三角形三线合一，$AB\perp CE$、$AB\perp DE$，$AB\perp$ 面CDE，$\angle CED=150^\circ$，且面$CDE\perp$面ABC，在平面 CDE 中，作 $DF\perp CE$ 的延长线于 F，故 $\angle DCF$ 为所求的线面角，$DF=DE\times\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$CF=CE+EF=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，

$\tan\angle DCF=\frac{DF}{CF}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，选 C.

10.已知 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等差数列，若 $\{\cos a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}=\{a,b\}$，则 $ab=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　C. 0　　　　D. 1

【答案】B

11.已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{9}=1$，则以下可能为双曲线 C 的弦的中点的是(　　)

A. $(1,1)$　　　　B. $(-1,2)$　　　　C. $(1,3)$　　　　D. $(-1,-4)$

【答案】D

12.已知圆 O 半径为1，PA 与圆 O 相切，切点为 A，$|OP|=\sqrt{2}$，过点 P 的直线与圆 O 交于 B，C 两点，D 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的最大值为(　　) 来源：高三答案公众号

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

【答案】A

二.填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.

13.已知点 $A\left(1,\sqrt{5}\right)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则 A 到 C 的准线的距离为________

【答案】$\frac{9}{4}$

【解析】因为点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则 $5=2p$，所以 $p=\frac{5}{2}$，所以抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-\frac{5}{4}$，所以点 A 到 C 的准线的距离为 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

14.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y\le -1\\ x+2y\le 9\\ 3x+y\ge 7\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为________.

【答案】8

【解析】由可行域得三个顶点坐标 $A(5,2)$，$B(2,1)$，$C(1,4)$，所以 $z_A=2\times5-2=8$，$z_B=2\times2-1=3$，$z_C=2\times1-4=-2$，比较得 $z_{\max}=8$.

15.已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6,a_9a_{10}=-8$，则 $a_7=$________.

【答案】-2

【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，所以 $a_2=1$，又 $a_9a_{10}=a_2a_{17}=-8$，所以 $a_{17}=-8$，所以 $\frac{a_{17}}{a_2}=q^{15}=(q^5)^3-8$，$q^5=-2$，所以 $a_7=a_2q^5=-2$.

16.已知 $a\in(0,1)$，函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，a 的取值范围是________.

【答案】$[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$

【解析】因为 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geqslant0$ 恒成立，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=a^x(\ln a)^2+(1+a)^x(\ln(1+a))^2>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故只需 $f'(0)\geqslant0$ 即可，所以 $\ln a+\ln(1+a)\geqslant0$，即 $a^2+a-1\geqslant0$，

又 $a\in(0,1)$，解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le a<1$，故 $a\in[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$.

三.解答题：共 70 分，解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤.第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22.23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率，甲.乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 $x_i, y_i\left(i=1,2,\cdots 10\right)$，试验结果如下记

实验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率 x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率 y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

$z_i=x_i-y_i\left(i=1,2,\cdots,10\right)$，记 $z_1,z_2,\cdots,z_{10}$ 的样本平均数为 $\bar{z}$，样本方差为 s^2.

(1)求 $\bar{z},s^2$；

(2)判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高(如果 $\bar{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高)

【答案】(1) 11，61；

【解析】(1) $\bar{z}=\frac{1}{10}\left(9+6+8+\left(-8\right)+15+11+19+18+20+12\right)=11$

$$s^2=\frac{1}{10}\times\left[\left(9-11\right)^2+\left(6-11\right)^2+\left(8-11\right)^2+\left(-8-11\right)^2+\left(15-11\right)^2\right)$$

$$+\left(11-11\right)^2+\left(19-11\right)^2+\left(18-11\right)^2+\left(20-11\right)^2+\left(12-11\right)^2\ \ ]$$

$$=\frac{1}{10}\times\left(2^2+5^2+3^2+19^2+4^2+0^2+8^2+7^2+9^2+1^2\right)=\frac{1}{10}\times 610=61$$

(2) $\because \bar{z}^2-4\frac{s^2}{10}=11^2-4\times\frac{61}{10}=121-24.4=96.6$

$\therefore \bar{z}^2>4\times\frac{s^2}{10}$，即 $\bar{z}>2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$ $\therefore \bar{z}\geq 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$ 成立.

∴甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

18.(12 分) $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120^\circ, AB=2, AC=1$.

(1)求 $\sin\angle ABC$；

(2)若 D 为 BC 上的一点，$\angle BAD=90^\circ$，求 $\triangle BAD$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{21}}{14}$；(2) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$；

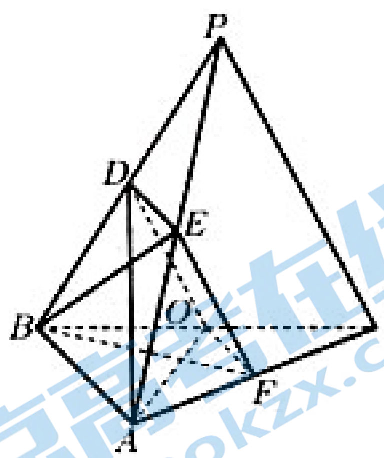
【解析】(1)由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+2^2-a^2}{2\times1\times2}=-\frac{1}{2}$，解得 $a=\sqrt{7}$；由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

即 $\frac{\sqrt{7}}{\sin 120^o}=\frac{1}{\sin\angle ABC}$，解得 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{21}}{14}$；

(2) 在 ΔBAD 中 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\therefore\cos\angle ABC=\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}=\sqrt{1-\frac{21}{196}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，$\because\angle BAD=90^o$，

$\therefore\tan\angle ABC=\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC}=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，即 $AD=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，$\therefore S_{\Delta BAD}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$；

19.(12 分)如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ, AB=2, BC=2\sqrt{2}, PB=PC=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{5}OD$，$BF\perp AO$，$O, D, E$ 分别为 BC, PB, AP 的中点.



(1)证明：EF // 平面 ADO；

(2)平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

(3)求二面角 $D-AO-C$ 的大小.

【答案】(1) 略；(2) 略；(3) $\frac{3}{4}\pi$.

【解析】(1) 由题可知 $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$，设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=4$，则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\frac{\lambda}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\lambda-4=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 $OF // AB$，$OF=\frac{1}{2}AB$，而 $DE // AB$，$DE=\frac{1}{2}AB$，所以 $DE // OF$，$DE=OF$，即四边形 $ODEF$ 为平行四边形，所以 $EF // OD$，又因为 $OD\subseteq$ 平面 ADO，$EF\subsetneq$ 平面 ADO，所以 $EF //$ 平面 ADO；

(2) 因为 $AO=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{6}=PC=2OD$，$AD=\sqrt{5}OD$，所以 $AD^2=AO^2+OD^2$，即 $AO\perp OD$，$AO\perp EF$，又因为 $BF\perp AO$，且 $BF\cap EF=F$，所以 $AO\perp$ 平面 BEF，又因为 $AO\subseteq$ 平面 ADO，所以平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

(3) 设二面角 $D-AO-C$ 的平面角为 θ，因为 $AO\perp OD$，$AO\perp BF$，所以 θ 为 $\overrightarrow{OD}$ 和 $\overrightarrow{BF}$ 的夹角，

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{3}{2}=|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cos\theta$，因为

$\left|\overrightarrow{BF}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\overrightarrow{OD}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PC}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\frac{3}{4}\pi$，故二面角$D-AO-C$的大小为$\frac{3}{4}\pi$．

20.(12 分)已知曲线C的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，曲线过点$A(-2,0)$.

(1)求曲线C的方程；

(2)过点$(-2,3)$的直线交曲线C于P,Q两点，直线AP,AQ与y轴交于M,N两点，证明:线段MN的中点是定点.

【答案】(1) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$；(2) 定点$(0,3)$

【解析】(1) 由题意$b=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow a=3$，

所以曲线 C 的方程为：$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2) 由题意，直线 PQ 的斜率存在，设直线 PQ 的方程为$y-3=k(x+2)$，即$y=kx+2k+3$

联立$\begin{cases}\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1\\ y=kx+2k+3\end{cases}\Rightarrow(4k^2+9)x^2+8k(2k+3)x+16k(k+3)=0$

由韦达定理，$x_1+x_2=\frac{-8k(2k+3)}{4k^2+9},x_1x_2=\frac{16k(k+3)}{4k^2+9}$

直线AP的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令$x=0$得$y=\frac{2y_1}{x_1+2}$，所以点M的坐标为$(0,\frac{2y_1}{x_1+2})$，

同理点N的坐标为$(0,\frac{2y_2}{x_2+2})$，所以MN中点的坐标为$(0,\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2})$

$$\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{kx_1+2k+3}{x_1+2}+\frac{kx_2+2k+3}{x_2+2}=2k+\frac{3(x_1+x_2)+12}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$=2k+\frac{3(x_1+x_2)+12}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=2k+\frac{\frac{-24k(2k+3)}{4k^2+9}+12}{\frac{16k(k+3)}{4k^2+9}+\frac{-16k(2k+3)}{4k^2+9}+4}=2k+\frac{-72k+108}{36}=3，$$

所以MN的中点为定点$(0,3)$.

21.(12 分)已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(x+1)$.

(1)若$a=-1$，求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)是否存在 a,b 使 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 图象关于直线 $x=b$ 轴对称；

(3)若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$(x-1)\ln 2+y=0$；（2）$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$；（3）$a\in(0,\dfrac{1}{2})$.

【解析】（1）当 $a=-1$ 时，$f(1)=0$.

又 $f(x)=(\dfrac{1}{x}-1)\ln(x+1)$，所以 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(x+1)+(\dfrac{1}{x}-1)\cdot\dfrac{1}{x+1}$，

所以切线的斜率 $k=f'(1)=-\ln 2$，

故曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $(x-1)\ln 2+y=0$.

（2）令 $g(x)=f(\dfrac{1}{x})=(x+a)\ln(\dfrac{1}{x}+1)$，由题意得，

函数 $y=g(x+b)$ 为偶函数，即 $g(x+b)=(x+b+a)\ln\dfrac{x+b+1}{x+b}$ 为偶函数，

所以 $\begin{cases}b+a=0\\b+1+b=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

（3）由题意知 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(x+1)+(\dfrac{1}{x}+a)\cdot\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{x^2}[\ln(x+1)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}]$.

若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值，则方程 $\ln(x+1)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}=0$ 有正根，

即方程 $a=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}$ 有正根.

令 $h(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}$，$x>0$，则 $h'(x)=\dfrac{2x-(x+2)\ln(x+1)}{x^3}$.

令 $\varphi(x)=2x-(x+2)\ln(x+1),x>0$,则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1),x>0$，

又 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi'(x)<\varphi'(0)=0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，即 $h'(x)<0$，故 $h(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

同理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}=0$.

所以 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$.

解法 2：由题意知 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(x+1)+(\dfrac{1}{x}+a)\cdot\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{x^2}[\ln(x+1)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}]$.

令 $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}$，$h(0)=0$，则 $h'(x)=-\dfrac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}$

当 $a \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值；

当 $a \leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a}-2)$ 上单调递增，且 $h(\frac{1}{a}-2)>h(0)=0$，$f'(\frac{1}{a}-2)<0$，

又 $x \to +\infty$ 时，$f'(x)>0$，故满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2})$.

(二)选考题：共 10 分.请考生在第 22.23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做第一题计分.

22.【选修 4-4】(10 分)在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，曲线 $C_2:\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$)

(1)写出 C_1 的直角坐标方程

(2)若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点，也与 C_2 没有公共点，求 m 的取值范围.

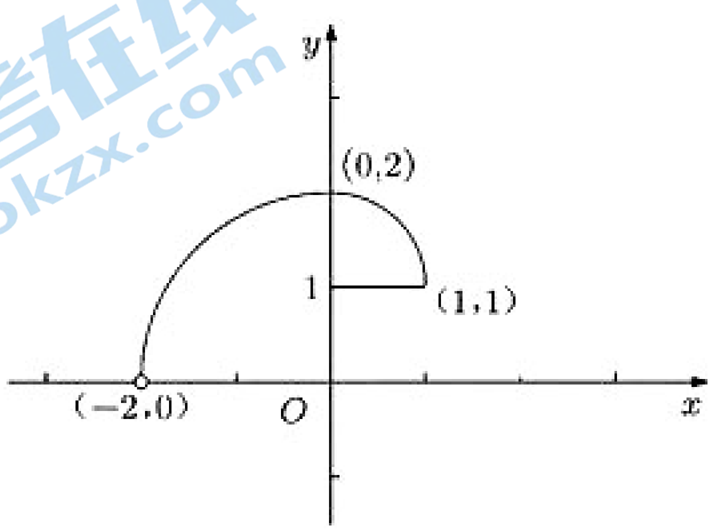
【答案】(1) $x^2+y^2=2y$，其中 $x\ge0,y\ge1$；(2) $m>2\sqrt{2}$ 或 $m<0$

【解析】

(1) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，可变形为 $\rho^2=2\rho\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 知：C_1 的直角坐标方程 $x^2+y^2=2y$，其中 $x\ge0,y\ge1$.

(2) 由题，曲线 C_1 为以 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的四分之一圆，曲线 C_2 左上方是 0,0 为圆心，2 为半径的四分之一圆.



如图，直线 $y=x+m$ 与两个曲线均没交点的两个临界情况为：

临界 1：直线 $y=x+m$ 过 $(1,1)$ 点，此时 $m=0$

临界 2：直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相切于点 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，此时 $m=2\sqrt{2}$

故直线 $y=x+m$ 与 C_1 和 C_2 均没有公共点时，$m>2\sqrt{2}$ 或 $m<0$

23.【选修 4-5】(10 分)已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集

(2)在直角坐标系 xOy 中，求不等式组 $\begin{cases} f(x)\le y \\ x+y-6\le 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.

【答案】（1）$[-2,2]$；（2）8.

【解析】(1) $f(x)=2|x|+|x-2|=\begin{cases} -3x+2, x<0 \\ 2, x=0 \\ x+2, 0<x<2 \\ 4, x=2 \\ 3x-2, x>2 \end{cases}$.

当 $x\le 0$ 时，$f(x)\le 6-x$ 的解为 $-2\le x\le 0$.

当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)\le 6-x$ 的解为 $0\le x\le 2$.

当 $x>2$ 时，$f(x)\le 6-x$ 的解为空集.

综上所述，不等式 $f(x)\le 6-x$ 的解集为 $[-2,2]$.

（2）因为 $x+y-6\le 0$，所以 $y\le 6-x$.

因为 $y=6-x$ 经过点 $(2,4)$，由 $f(x)=2|x|+|x-2|=\begin{cases} -3x+2, x<0 \\ 2, x=0 \\ x+2, 0<x<2 \\ 4, x=2 \\ 3x-2, x>2 \end{cases}$ 知

即求 $y=-3x+2$，$y=6-x$ 和 $y=x+2$ 三条直线所围成的三角形面积,三角形的其中一点为 $(2,4)$.

联立 $y=-3x+2$，$y=6-x$ 得交点为 $(-2,8)$.

联立 $y=-3x+2$，$y=x+2$ 得交点为 $(0,2)$.

由点到点的距离公式得 $(-2,8)$ 和 $(0,2)$ 之间的距离为 $2\sqrt{10}$.

由点到直线的距离公式得 $y=-3x+2$ 和 $(2,4)$ 之间的距离为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

则三角形的面积为 $2\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}\times\frac{1}{2}=8$.

所以不等式组 $\begin{cases} f(x) \le y \\ x+y-6 \le 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域的面积为8.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。