高三数学参考答案

1. A　$(3-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})=6-2\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3=9+7\mathrm{i}$，所以该复数在复平面内对应的点为$(9,7)$，该点在第一象限.

2. B　依题意得 $A=\{x\mid y=\sqrt{1-x}\}=(-\infty,1]$，$B=\{x\mid x(x-3)<0\}=(0,3)$，则 $A\cap B=(0,1]$.

3. A　设圆锥的母线长为 l，底面半径为 r，由圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，得$\frac{\pi l}{2}=2\pi r$，解得 $r=\frac{1}{2}$.

4. C　因为 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$，所以 $f'(x)=\frac{2x^2-2x(2x-1)}{x^4}=\frac{-2x+2}{x^3}$，则 $f(2)=\frac{3}{4}$，$f'(2)=-\frac{1}{4}$，因此所求切线方程为 $y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}(x-2)$，即 $x+4y-5=0$.

5. C　由 $5\times40\%=2$，将成绩从小到大排列，得第 40 百分位数是第二个成绩和第三个成绩的平均数，所以$\frac{m+8}{2}=8$，解得 $m=8$.

6. A　由题可知 $\theta=108^\circ$，所以$\frac{\sin\theta}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}=\frac{1}{2\sin 18^\circ}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

7. B　圆 M 的方程可化为$(x+2)^2+(y-3)^2=1$，所以 x 轴与圆 M 相离. 当 PM 垂直于 x 轴时，四边形 $PAMB$ 面积取得最小值，最小值为$\sqrt{3^2-1^2}\times1=2\sqrt{2}$.

8. D　设 $t>0$，$4a^2+b^2+2ab=4a^2+b^2+2\cdot\frac{a}{t}\cdot tb\leqslant4a^2+b^2+\frac{a^2}{t^2}+t^2b^2=(4+\frac{1}{t^2})a^2+(1+t^2)b^2$，令$\frac{4+\frac{1}{t^2}}{1+t^2}=\frac{3}{2}$，解得 $t=\sqrt{2}$，所以$\frac{9}{2}a^2+3b^2\geqslant6$，即 $3a^2+2b^2\geqslant4$，当且仅当 $a^2=\frac{8}{7}$，$b^2=\frac{2}{7}$时，等号成立.

9. AD　易得 $f(x)=\mathrm{e}^x+2x-3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，因为 $f(0)=-2<0$，$f(1)=\mathrm{e}-1>0$，所以 $a\in(0,1)$，则 $\mathrm{e}^a-1>0$，$a^2-a=a(a-1)<0$，$\ln a<0$，$a^2-a^3=a^2(1-a)>0$，故选 AD.

10. BD　设点 $C(x,y)$，因为 CA，CB 所在直线的斜率之积是 m，所以 $k_{BC}\cdot k_{AC}=\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=m(x\neq\pm1)$. 整理可得 $x^2-\frac{y^2}{m}=1(x\neq\pm1)$. 当 $m=-1$ 时，顶点 C 的轨迹是圆(除去与 x 轴的交点)；当 $m<0$ 且 $m\neq-1$ 时，顶点 C 的轨迹是椭圆(除去与 x 轴的交点)；当 $m>0$ 时，顶点 C 的轨迹是双曲线(除去与 x 轴的交点). 故选 BD.

11. BCD　因为 $f(x)\leqslant|f(\frac{7\pi}{12})|$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$对称，则 $f(0)=f(\frac{7\pi}{6})$，即 $a=\sin\frac{7\pi}{3}+a\cos\frac{7\pi}{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$.

$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$f(-\frac{\pi}{6})=2\sin 0=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 对称. 当 $x\in(0,m)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3})$，因为 $f(x)=\sqrt{3}$ 在 $(0,m)$ 上有 2 个实数解，所以 $\frac{7\pi}{3}<2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{3}$，解得 $\pi<m\leqslant\frac{7\pi}{6}$. 直线 $24x-9\pi y-8\pi=0$ 经过点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 与 $(\frac{13\pi}{12},2)$，易知 $(\frac{\pi}{3},0)$ 与 $(\frac{13\pi}{12},2)$ 分别是函数 $f(x)$ 的零点与其图象的最高点，结合图象(图略)可知 $f(x)$ 的图象与直线 $24x-9\pi y-8\pi=0$ 恰有 5 个交点. 故选 BCD.

12. AC　如图 1，连接 A_1B，A_1D，BD，由 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+(1-x-y)\overrightarrow{AA_1}(x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1)$，点 M 的轨迹在 $\triangle A_1BD$ 内(包括边界)，因为平面 A_1BD // 平面 CB_1D_1，所以 $V_{M-B_1D_1C}=V_{A_1-B_1D_1C}=V_{C-A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{6}$，故 A 正确.

易知 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD，设 AC_1 与平面 A_1BD 相交于点 P，由于 $V_{A-A_1BD}=V_{B-A_1D_1B_1}=V_{C-A_1D_1B_1}=\frac{1}{6}$，则点 A 到平面 A_1BD 的距离为 $AP=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

若 $AM=\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $MP=\frac{\sqrt{2}}{3}$，即点 M 的轨迹在以 P 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{3}$ 为半径的圆上，如图 2，在三角形 A_1EP 中，$A_1P=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$PE=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\angle EA_1P=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理解得 $A_1E=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\angle A_1PE=\frac{\pi}{6}$，所以 M 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{6}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$，故 B 错误.

因为 D_1C_1 // AB，所以 $\angle ABM$ 为异面直线 BM 与 D_1C_1 所成的角，则 $\sin\angle ABM\geqslant\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\angle ABM\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 正确.

由三垂线定理可知，又 $AP\perp$ 平面 A_1BD，要使得 $A_1M\perp AM$，则 $A_1M\perp MP$，所以点 M 在以 A_1P 为直径的圆上，则存在无数个点，使得 $A_1M\perp AM$，故 D 错误.

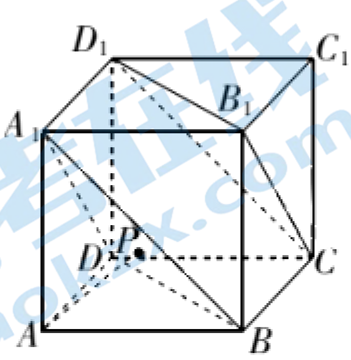


图 1

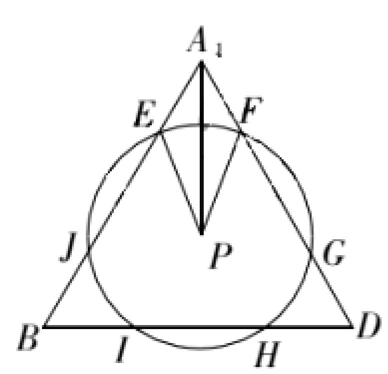
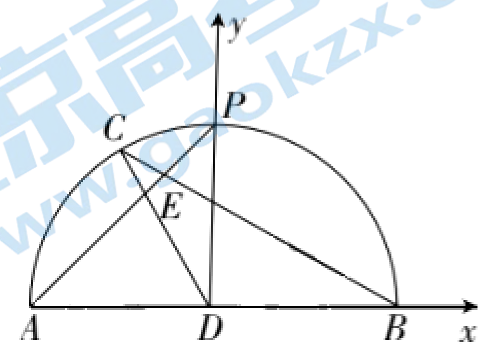


图 2

13. 4　双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$，故 $b=4$，所以右焦点 F 的坐标为 $(2\sqrt{5},0)$，F 到直线 $y=2x$ 的距离 $d=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2^2+1^2}}=4$.

14. -1　由 $f(4-x)=f(x)$ 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(5)=f(-1)=-f(1)=-1$.

15. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　以 D 为坐标原点，DB，DP 所在直线分别为 x，y 轴，建立直角坐标系，则 $A(-5,0)$，$B(5,0)$，$P(0,5)$，$C(-3,4)$，



则 $\overrightarrow{AP}=(5,5)$，$\overrightarrow{BC}=(-8,4)$，所以 $\cos\angle PEC=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-40+20}{5\sqrt{2}\times4\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. 32；$\frac{(n+1)!}{2^n}-1$　因为 $2=2\times1\times\cdots\times1$，所以 $n\times n$ 的宫格中 2 的放置有 A_n^n 种方法，又 2 的正负号和 1 的正负号共有 2^{n^2} 种情况，所以 $a_n=2^{n^2}\mathrm{A}_n^n$，即 $a_2=2^4\mathrm{A}_2^2=32$. $\frac{(n-1)a_n}{2^{n^2+n}}=\frac{(n-1)\cdot n!}{2^n}=\frac{(n+1)!}{2^n}-\frac{n!}{2^{n-1}}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(i-1)a_i}{2^{i^2+i}}=(\frac{2!}{2^1}-\frac{1!}{2^0})+(\frac{3!}{2^2}-\frac{2!}{2^1})+\cdots+[\frac{(n+1)!}{2^n}-\frac{n!}{2^{n-1}}]=\frac{(n+1)!}{2^n}-1$.

17. 解：(1) 由 $A+B=2C$，可得 $\pi-C=2C$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………… 1 分

由 $a\cos B+b\cos A=abc$ 及正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=ab\sin C$，

则 $\sin C=ab\sin C$，解得 $ab=1$. ……………………………………………………… 3 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………… 5 分

(2) 由余弦定理可知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-1\geqslant2ab-1=1$，即 $c\geqslant1$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. …………………………………………………………………………… 8 分

设 h 为 AB 边上的高，所以 $S=\frac{1}{2}hc$，即 $h=\frac{2S}{c}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 AB 边上的高的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. …
…………………………………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 设 A 事件为甲通过了笔试，B 事件为第三门测试没有通过，

则 $P(A)=\mathrm{C}_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$，……………………………………… 2 分

$P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$. …………………………………………………… 4 分

所以甲通过了笔试的条件下，第三门测试没有通过的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$.
…………………………………………………………………………………………… 6 分

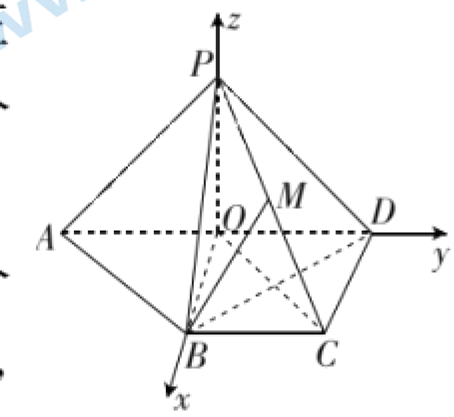
(2) 设某人被录取的概率为 P，则 $P=[\mathrm{C}_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3]\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，………… 8 分

由题可知 $X \sim B(100,\frac{1}{5})$，…………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$. …………………………………………………… 12 分

19.（1）证明：设 AD 的中点为 O，连接 OP，OC，OB，

因为 $BC/\!/AD$，$CD\perp AD$，$BC=CD=OD=2$，所以四边形 $OBCD$ 为正方形，所以 $BD\perp OC$. …………………………………… 1 分



因为△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，所以 $PO\perp AD$. …………………………………………………… 2 分

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 PAD 与平面 $ABCD$ 交于 AD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，…………………………………………………… 3 分

所以 $PO\perp BD$. …………………………………………………… 4 分

又 $PO\cap OC=O$，所以 $BD\perp$ 平面 OPC. …………………………………… 5 分

因为 $PC\subset$ 平面 OPC，所以 $PC\perp BD$. …………………………………… 6 分

（2）解：以 O 为坐标原点，OB，OD，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

易知 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$M(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$. …………………………………… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

可得 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=-2x=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. …………………… 10 分

设直线 BM 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即直线 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 12 分

20. 解：（1）因为 $a_{n+1}+a_n=2n$，所以 $a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2$，…………………………… 1 分

两式相减得 $a_{n+2}-a_n=2$. …………………………………………………… 2 分

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d=1$. …………………………………… 3 分

又 $a_1+a_2=2$，所以 $2a_1+d=2$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$，…………………………………… 4 分

则 $a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=n-\frac{1}{2}$，即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

（2）由（1）得 $S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=2+6+10+\cdots+4n-2=2n^2$，…………………………………………………… 8 分

所以不等式 $(-1)^n\lambda<S_{2n}-8n+9$ 可化为 $(-1)^n\lambda<2n^2-8n+9=2(n-2)^2+1$，

当 n 为奇数时，$-\lambda<2(n-2)^2+1$，则 $-\lambda<2(1-2)^2+1$，即 $\lambda>-3$，…………………… 10 分

当 n 为偶数时，$\lambda<2(n-2)^2+1$，则 $\lambda<1$.

综上，实数 λ 的取值范围为 $(-3,1)$. …………………………………………………… 12 分

21. (1)解：当 $AF\perp x$ 轴时，则 $|AF|=p$，…… 1 分

$|AP|=\sqrt{p^2+p^2}=2\sqrt{2}$，解得 $p=2$，…… 3 分

所以抛物线 M 的方程为 $y^2=4x$. …… 4 分

(2)(i)证明：若直线 AB 斜率不存在，则 $A(1,2)$，直线 PA 的方程为 $y=x+1$，与 $y^2=4x$ 联立可得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，即直线 PA 与抛物线有唯一交点，不符合题意，舍去.

故直线 AB 斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，…… 5 分

所以直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}(x-\dfrac{y_1^2}{4})$，即 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$. …… 6 分

又直线 AB 过点 $F(1,0)$，所以 $y_1y_2=-4$. …… 7 分

同理可得直线 AC 的方程为 $4x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$. …… 8 分

又直线 AC 过点 $P(-1,0)$，所以 $y_1y_3=4$，所以 $y_2=-y_3$，即 B,C 两点关于 x 轴对称. …… 9 分

(ii)解：不妨设 $y_2>0$，因为点 A 在 P 与 C 之间，所以 $x_2>1$，$y_2>1$，

$S_1=\dfrac{1}{2}\times 2y_2\times(x_2-1)=(x_2-1)y_2=\dfrac{y_2^3}{4}-y_2$，$S_2=\dfrac{1}{2}\times 2\times y_2=y_2$，…… 10 分

则 $S_2-2S_1=3y_2-\dfrac{y_2^3}{2}$，令 $f(y)=3y-\dfrac{y^3}{2}$，则 $f'(y)=3-\dfrac{3y^2}{2}=\dfrac{3}{2}(2-y^2)$，

则 $f(y)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，故 $f(y)_{\max}=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$，即 S_2-2S_1 的最大值为 $2\sqrt{2}$. …… 12 分

22. (1)解：令 $f(x)=|x\ln x|$，则 $f(x)=\begin{cases}-x\ln x, 0<x<1,\\ x\ln x, x\geqslant 1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-\ln x-1, 0<x<1,\\ \ln x+1, x\geqslant 1,\end{cases}$ …… 1 分

则当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{1}{e},1)$ 时，$f'(x)<0$，…… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 上单调递减.

又 $|x\ln x|\geqslant 0$，所以 $0<a<f(\dfrac{1}{e})$，即 $0<a<\dfrac{1}{e}$，所以 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{e})$. …… 5 分

(2)证明：由(1)可知 $0<x_1<\dfrac{1}{e}<x_2<1<x_3$，

下面证明 $x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$，$x_3<e^{\frac{1}{3}}$.

①证明 $x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$.

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$,因为$-x_1\ln x_1=-x_2\ln x_2$,所以$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\ln x_2}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$.

由$\frac{\ln(tx_1)}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$,得$\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$,故$\ln x_2=\frac{\ln t}{1-t}$,则$x_1=e^{\frac{t\ln t}{1-t}}$,$x_2=e^{\frac{\ln t}{1-t}}$, ······ 6分

所以$x_1x_2=e^{\frac{\ln t}{1-t}+\frac{t\ln t}{1-t}}=e^{\frac{(t+1)\ln t}{1-t}}$. ······ 7分

设$s(t)=\ln t-2\times\frac{t-1}{t+1}$,$t>1$,则$s'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

故$s(t)$在$(1,+\infty)$上为增函数,故$s(t)>s(1)=0$,即$\ln t>2\times\frac{t-1}{t+1}$,$t>1$, ······ 9分

故$\frac{(t+1)\ln t}{1-t}<-2$,则$x_1x_2<\frac{1}{e^2}$. ······ 10分

②证明$x_3<e^{\frac{1}{3}}$.

由题可知$f(x_3)<f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$,$f(e^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{e}=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{3}-\frac{1}{e}=\frac{e\times e^{\frac{1}{3}}-3}{3e}>\frac{2.7\times(\frac{64}{27})^{\frac{1}{3}}-3}{3e}>0$,

因为$y=f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$f(x_3)<f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}<f(e^{\frac{1}{3}})$,所以$x_3<e^{\frac{1}{3}}$成立.

综上,$x_1x_2x_3\leqslant e^{-\frac{5}{3}}$. ······ 12分