数学

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学

滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $A=\{x||x-1|\geqslant 2\}$, $B=\{x|x<4,x\in \mathbf{N}\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ (　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 设 $\mathrm{i}^{2023}\cdot z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$（i为虚数单位），则 $|z-\mathrm{i}|=$ (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长是短轴长的2倍，则 E 的离心率为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 一个盒子中装有5个黑球和4个白球，现从中先后无放回的取2个球，记“第一次取得黑球”为事件 A，“第二次取得白球”为事件 B，则 $P(AB)+P(B|A)=$ (　　)

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{8}{9}$

5. 19世纪美国天文学家西蒙·纽康在翻阅对数表时，偶然发现表中以1开头的数出现的频率更高. 约半个世纪后，物理学家本·福特又重新发现这个现象，从实际生活得出的大量数据中，以1开头的数出现的频数约为总数的三成，并提出本·福特定律，即在大量 b 进制随机数据中，以 n 开头的数出现的概率为 $P_b(n)=\log_b\frac{n+1}{n}$，如斐波那契数、阶乘数、素数等都比较符合该定律. 后来常有数学爱好者用此定律来检验某些经济数据、选举数据等大数据的真

实性．若$\sum_{n=k}^{20}P_{10}(n)=\frac{\log_2 21-\log_2 3}{1+\log_2 5}$（$k\in \mathbf{N}^*$，$k\leqslant 20$），则$k$的值为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

6．已知某圆锥的母线长为3，则当该圆锥的体积最大时，其侧面展开图的圆心角的弧度数为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

7．某市教育局为了给高考生减压，将师范大学6名心理学教授全部分配到市属四所重点高中进行心理辅导，若A高中恰好需要1名心理学教授，B，C，D三所高中各至少需要1名心理学教授，则不同的分配方案有（　　）

A．150种　　B．540种　　C．900种　　D．1440种

8．已知实数$a,b,c\in(0,1)$，且$a=2022e^{a-2022}$，$b=2023e^{b-2023}$，$c=2024e^{c-2024}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<c<a$　　D．$c<b<a$

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．）

9．已知直线l与曲线$f(x)=\ln x+x^2$相切，则下列直线中可能与l垂直的是（　　）

A．$x+4y=0$　　B．$\sqrt{2}x+5y=0$

C．$\sqrt{2}x+3y=0$　　D．$\sqrt{2}x-y=0$

10．已知$\odot P:x^2+(y+3)^2=9$，$\odot Q:x^2+2x+y^2+8y+m=0$，点$A,B$分别在$\odot P,\odot Q$上，则（　　）

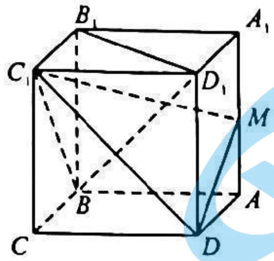
A．若$\odot Q$的半径为1，则$m=16$

B．若$m=13$，则$\odot P$与$\odot Q$相交弦所在的直线为$2x+2y-13=0$

C．直线$l:ax-y-a-2=0$截$\odot P$所得的最短弦长为$2\sqrt{7}$

D．若$|AB|$的最小值为$2-\sqrt{2}$，则$|AB|$的最大值为$2+\sqrt{2}$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AA_1 上的动点（不含端点），下列选项正确的是（　　）



A. 当 $AM=\frac{1}{2}AA_1$ 时，$BD_1\perp$ 平面 DMC_1

B. 平面 DMC_1 与平面 AA_1B_1B 的交线垂直于 BD_1

C. 直线 BC_1，B_1D_1 与平面 DMC_1 所成角相等

D. 点 A_1 在平面 DMC_1 内的射影在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内部

12. 已知函数 $f(x)=2|\sin x+\cos x|-\sin 2x$，则（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 的最小值为 1

D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，当 $x\in(-1,0]$ 时，$f(x)=x^3$，则 $f\left(\frac{21}{2}\right)=$________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ________；$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的坐标为________.

15. 已知函数 $f(x)=e^x+2x$，$g(x)=4x$，且 $f(m)=g(n)$，则 $|n-m|$ 的最小值为________.

16. 已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 和直线 $l:x=\lambda(\lambda>0)$，点 H 是直线 l 上的动点（不在 x 轴上），以点 H 为圆心且过原点 O 的圆与直线 l 交于 M,N 两点，若直线 OM,ON 与 E 的另一个交点

分别为P,Q，记直线PQ,OH的斜率分别为k_1,k_2，则$k_1\cdot k_2=$ ________.

四、解答题（本题共6小题，第17题10分，第18~22题每题12分，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分10分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3,a_2=6,a_3=11$，从第二项开始，每一项与前一项的差构成等差数列.

（1）求a_n；

（2）设$b_n=\dfrac{a_n}{3^{\sqrt{a_n-2}}}$，若$b_n\le m$恒成立，求$m$的取值范围.

18.（本小题满分12分）

从条件①$b-c\cos A=a\left(\sqrt{3}\sin C-1\right)$；

②$\sin(A+B)\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，________.

（1）求角C的大小；

（2）设D为边AB的中点，求$\dfrac{CD^2}{a^2+b^2}$的最大值.

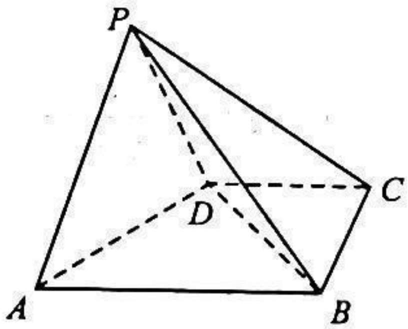
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$AB=4$，$BC=DC=2$，$PA=PD$，二面角 $P-AD-B$ 为直二面角.

（1）求证：$PA\perp BD$；

（2）若直线 PB 与平面 PAD 所成角的正切值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

纯电动汽车、混合电动汽车及燃料电池电动汽车均为新能源汽车，近几年某地区新能源汽车保有量呈快速增长的态势，下表为 $2018\sim2022$ 年该地区新能源汽车及纯电动汽车的保有量（单位：万辆），其中 $2018\sim2022$ 年对应的年份编号依次为 $1\sim5$：

年份编号 x	1	2	3	4	5
该地区新能源汽车保有量 y	1.5	2.6	3.4	4.9	7.8
该地区纯电动汽车保有量 z	1.3	2.1	2.8	4.0	6.4

（1）由上表数据可知，可用指数函数模型 $y=a\cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的回归方程（a,b 的值精确到 0.1），并预测 2023 年该地区新能源汽车保有量能否超过 10 万辆；

（2）从表中数据可以看出 $2018\sim2022$ 年，该地区新能源汽车保有量中纯电动汽车保有量占比均超过 80%，说明纯电动汽车一直是新能源汽车的主流产品. 若甲、乙、丙 3 人从 $2018\sim2022$ 年中各随机选取 1 个年份（可以重复选取），记取到满足 $y-z>0.8$ 的年份的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

参考数据：

$\bar{v}$	$\sum_{i=1}^{5}x_iv_i$	$e^{0.089}$	$e^{0.387}$	1.5^6
1.25	22.62	1.1	1.5	11.4

其中 $v_i=\ln y_i,\bar{v}=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}v_i$.

参考公式：对一组数据 $(u_1,v_1$ … $u_n,v_n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{a}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的 … 计公式分别为

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2},\quad \hat{a}=\bar{v}-$$

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过 $\left(3,4\sqrt{2}\right)$ 和 $\left(\sqrt{2},2\right)$ 两点，点 A 为 C 的右顶点.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P\left(\sqrt{5},0\right)$ 作斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于点 M,N，直线 $x=\sqrt{5}$ 分别交直线 AM,AN 于 E,F. 试探究以 EF 为直径的圆是否经过定点，若过定点，请求出所有定点坐标；若不过定点，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+ax+2$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）求证：对一切的 $n\in\mathbf{N}^*$，$\ln\sqrt{n+1}>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$.

一号卷·A10联盟2023届高考最后一卷

数学参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	B	A	C	D

1. B　由题意得，$A=\{x|x-1\geqslant 2或x-1\leqslant -2\}=\{x|x\geqslant 3或x\leqslant -1\}$，$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=\{x|-1<x<3\}$，又 $B=\{0,1,2,3\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{0,1,2\}$，故选 B.

2. C　$z=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\mathrm{i}^{2023}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，$\therefore z-\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，$\therefore |z-\mathrm{i}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

3. D　由题意得，$a=2b$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

4. A　$\because P(AB)=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{18}$，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore P(AB)+P(B|A)=\dfrac{7}{9}$. 故选 A.

5. B　$\sum\limits_{n=k}^{20}P_{10}(n)=P_{10}(k)+P_{10}(k+1)+\cdots+P_{10}(20)=\lg\dfrac{k+1}{k}+\lg\dfrac{k+2}{k+1}+\cdots+\lg\dfrac{21}{20}=\lg\dfrac{21}{k}$，

又 $\dfrac{\log_2 21-\log_2 3}{1+\log_2 5}=\dfrac{\log_2 7}{\log_2 10}=\lg 7$，故 $k=3$. 故选 B.

6. A　设圆锥的底面半径为 r，高为 h，则 $r^2+h^2=9$，$0<h<3$，体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(9h-h^3\right)$，

则 $V'=\pi\left(3-h^2\right)=\pi\left(\sqrt{3}-h\right)\left(\sqrt{3}+h\right)$，故当 $h\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ 时，V 单调递增，当 $h\in\left(\sqrt{3},3\right)$ 时，V 单调递减，$\therefore$ 当 $h=\sqrt{3}$ 时，V 取得最大值，此时 $r=\sqrt{6}$，侧面展开图的圆心角 $\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

故选 A.

7. C　先从 6 名教授中任选 1 名教授到 A 高中，有 $C_6^1=6$ 种不同的方法，再将其余 5 名教授分配到 B，C，D 三所高中，可分两类：①B，C，D 三所高中有一所高中分 1 名教授，另外两所高中各分 2 名教授，有 $\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$ 种方法；②B，C，D 三所高中有一个高中分 3 名教授，另两个高中各分 1 名教授，有 $\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=60$ 种不同的方法，$\therefore$ 不同的分配方案共有 $6\times(90+60)=900$ 种. 故选 C.

8. D　由 $a=2022\mathrm{e}^{a-2022}$，$b=2023\mathrm{e}^{b-2023}$，$c=2024\mathrm{e}^{c-2024}$，可得 $\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}=\dfrac{\mathrm{e}^{2022}}{2022}$，$\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}=\dfrac{\mathrm{e}^{2023}}{2023}$，

$\dfrac{\mathrm{e}^c}{c}=\dfrac{\mathrm{e}^{2024}}{2024}$. 令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore \dfrac{\mathrm{e}^{2022}}{2022}<\dfrac{\mathrm{e}^{2023}}{2023}<\dfrac{\mathrm{e}^{2024}}{2024}$，$\therefore \dfrac{\mathrm{e}^a}{a}<\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}<\dfrac{\mathrm{e}^c}{c}$，又 $\because a,b,c\in(0,1)$，$\therefore c<b<a$. 故选 D.

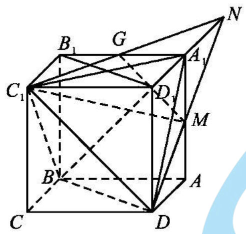
二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题号	9	10	11	12
答案	AB	AC	BC	BCD

9. AB　$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{2}$，即直线 l 的斜率 $k\geqslant 2\sqrt{2}$，设与 l 垂直的直线的斜率为 m，则 $km=-1$，$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqslant m<0$. 故选 AB.

10. AC　由题意得，$\odot P: x^2+(y+3)^2=9$ 的圆心为 $P(0,-3)$，半径 $r_1=3$，$\odot Q:(x+1)^2+(y+4)^2=17-m$. 若 $\odot Q$ 的半径为 1，则 $17-m=1^2$，解得 $m=16$，故 A 正确；若 $m=13$，则 $\odot Q: x^2+2x+y^2+8y+13=0$，两式相减，得 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 相交弦所在的直线为 $2x+2y+13=0$，故 B 错误；易得直线 $l: ax-y-a-2=0$ 过定点 $(1,-2)$，且点 $(1,-2)$ 在 $\odot P$ 内，则圆心 $P(0,-3)$ 与点 $(1,-2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则直线 $l: ax-y-a-2=0$ 被 $\odot P$ 所截的最短弦长为 $2\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$，故 C 正确；若 $|AB|$ 的最小值为 $2-\sqrt{2}$，则 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 内含或外离，由点 $Q(-1,-4)$ 在 $\odot P$ 内，得 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 内含，则 $|PQ|=\sqrt{2}<3-\sqrt{17-m}$，$|AB|$ 的最小值为 $3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{17-m}\right)=2-\sqrt{2}$，解得 $m=16$，$\therefore |AB|$ 的最大值为 $6-\left(2-\sqrt{2}\right)=4+\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 AC.

11. BC　对于 A，连接 A_1C_1，A_1D，易知 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，而 M 为 AA_1 中点时，平面 A_1C_1D 与平面 DMC_1 不重合，故 A 错误；对于 B，延长 D_1A_1, DM 交于 N，连接 C_1N 交 A_1B_1 于 G，连接 GM，则 GM 为平面 DMC_1 与平面 AA_1B_1B 的交线，易知 $GM\,//\,C_1D$，而 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，$\therefore BD_1\perp C_1D$，$\therefore BD_1\perp GM$，故 B 正确；对于 C，连接 BD，则 $BD\,//\,B_1D_1$，由对称关系可知直线 BC_1, BD 与平面 DMC_1 所成角相等，$\therefore$ 直线 BC_1, B_1D_1 与平面 DMC_1 所成角也相等，故 C 正确；对于 D，易知二面角 A_1-GM-N 为锐二面角，$\therefore$ 点 A_1 在平面 DMC_1 内的射影在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外部，故 D 错误. 故选 BC.



12. BCD　$\because f(x)=2|\sin x+\cos x|-\sin 2x$，$\therefore f(x+\pi)=2|\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)|-\sin 2(x+\pi)=2|\sin x+\cos x|-\sin 2x=f(x)$，$\therefore \pi$ 是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；

$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right|-\sin 2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2|\sin x+\cos x|-\sin 2x=f(x)$，

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故 B 正确；令 $|\sin x+\cos x|=t\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，则有 $\sin 2x=t^2-1$，则 $y=-t^2+2t+1$，在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上单调递减，当 $t=0$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 1，故 C 正确；函数 $f(x)$ 由 $y=-t^2+2t+1$ 和 $t=|\sin x+\cos x|$ 复合而成，

当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，函数$t=|\sin x+\cos x|=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$\because x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$，

$\therefore$函数$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，且$t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，函数$y=-t^2+2t+1$在$\left[1,\sqrt{2}\right]$上单调递减，$\therefore f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，故D正确．故选BCD．

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分．）

13. -256

由题意得，$f\left(\frac{21}{2}\right)=-\frac{1}{8}\times 2^{11}=-2^{8}=-256$．

14. $\frac{1}{2}$；$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$

$\because|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$\therefore\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，其坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$．

15. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

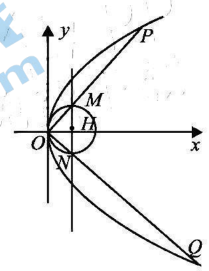
由$f(m)=g(n)$，得$\mathrm{e}^m+2m=4n$，化简整理得$4n-4m=\mathrm{e}^m-2m$．令$h(m)=\mathrm{e}^m-2m\ (m\in\mathbf{R})$，则$h'(m)=\mathrm{e}^m-2$，令$\mathrm{e}^m-2=0$，解得$m=\ln 2$．当$m\in(-\infty,\ln 2)$时，$h'(m)<0$，即$h(m)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减；当$m\in(\ln 2,+\infty)$时，$h'(m)>0$，即$h(m)$在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(m)_{\min}=h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，$\therefore|n-m|_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$．

16. $-\frac{1}{2}$

如图，设直线OM,ON的方程分别为$y=kx,y=mx$，则$M(\lambda,k\lambda)$，$N(\lambda,m\lambda)$，$H\left(\lambda,\frac{\lambda(k+m)}{2}\right)$，$\because\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，$\therefore\lambda^2+km\lambda^2=0$，即$km=-1$．联立$\begin{cases}y=kx\\y^2=2px\end{cases}$，消去$y$得$k^2x^2-2px=0$，$\therefore x_P=\frac{2p}{k^2}$，$y_P=kx_P=\frac{2p}{k}$，同理可得$x_Q=\frac{2p}{m^2}$，$y_Q=\frac{2p}{m}$，

$\therefore k_1=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{\frac{2p}{k}-\frac{2p}{m}}{\frac{2p}{k^2}-\frac{2p}{m^2}}=\frac{km(m-k)}{m^2-k^2}=-\frac{1}{k+m}$，$\because k_2=\frac{k+m}{2}$，$\therefore k_1\cdot k_2=-\frac{1}{2}$．



四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17.（本小题满分 10 分）

（1）由题意得，$a_2-a_1=3,a_3-a_2=5,\cdots$，

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=3$ 为首项，公差 $d=2$ 的等差数列，…………………1 分

$\therefore a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1$，…………………2 分

$\therefore a_2-a_1=3,a_3-a_2=5,a_4-a_3=7,\cdots,a_n-a_{n-1}=2n-1(n\geqslant 2)$，

将所有上式累加可得 $a_n-a_1=3+5+7+\cdots+2n-1=n^2-1$，…………………3 分

$\therefore a_n=n^2+2(n\geqslant 2)$．…………………4 分

又 $a_1=3$ 也满足上式，$\therefore a_n=n^2+2$．…………………5 分

（2）由（1）得，$b_n=\dfrac{n^2+2}{3^n}$，…………………6 分

则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}}-\dfrac{n^2+2}{3^n}=\dfrac{\left[(n+1)^2+2\right]-3\left(n^2+2\right)}{3^{n+1}}$

$=\dfrac{-2n^2+2n-3}{3^{n+1}}=\dfrac{-2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}}{3^{n+1}}<0$，…………………8 分

$\therefore b_{n+1}-b_n<0$ 恒成立，$\therefore b_n\leqslant b_1=1$，…………………9 分

$\because b_n\leqslant m$ 恒成立，$\therefore m\geqslant 1$，即 m 的取值范围是 $[1,+\infty)$．…………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

（1）选择条件①：由正弦定理得 $\sin B-\sin C\cos A=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A$，…………………1 分

即 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)-\sin C\cos A+\sin A=\sin A\cos C+\sin A$，…………………2 分

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sqrt{3}\sin C-\cos C=1$，即 $\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，…………………4 分

又 $0<C<\pi$，$\therefore C-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $C=\dfrac{\pi}{3}$．…………………6 分

选择条件②：由 $\sin(A+B)\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$，得 $\sin C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C\right)=\dfrac{3}{4}$，…………………1 分

则 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\cos C+\dfrac{1}{2}\sin^2 C=\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2C+\dfrac{1}{4}(1-\cos 2C)=\dfrac{3}{4}$，…………………3分

化简得，$\sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，…………………4 分

$\because 2C-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$，$\therefore 2C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $C=\dfrac{\pi}{3}$．…………………6 分

（2）$\because \overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{4}\left(b^2+a^2+2ab\cos C\right)=\dfrac{1}{4}\left(b^2+a^2+ab\right)$，…………………8 分

$\therefore \dfrac{CD^2}{a^2+b^2}=\dfrac{b^2+a^2+ab}{4\left(a^2+b^2\right)}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{ab}{4\left(a^2+b^2\right)}$，$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，…………………10 分

$\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{ab}{4(a^2+b^2)}\leqslant\dfrac{1}{4}+\dfrac{a^2+b^2}{8(a^2+b^2)}=\dfrac{3}{8}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，

$\therefore \dfrac{CD^2}{a^2+b^2}$ 的最大值为 $\dfrac{3}{8}$. ………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（1）在 $Rt\triangle BCD$ 中，$\because BC=CD=2$，$\therefore \angle DBC=45°$，$BD=2\sqrt{2}$. ………………1 分

$\because \angle ABC=\angle BCD=90°$，$\therefore AB//CD$，$\angle DBA=45°$，$\therefore AD=2\sqrt{2}$，………………2 分

则 $AD^2+BD^2=AB^2$，$\therefore AD\perp BD$. ………………3 分

又二面角 $P-AD-B$ 为直二面角，即平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because$ 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAD，………………4 分

$\because PA\subset$ 平面 PAD，$\therefore BD\perp PA$. ………………5 分

（2）由（1）知 $BD\perp$ 平面 PAD，则 $\angle BPD$ 是直线 PB 与平面 PAD 所成角.

$\therefore \tan\angle BPD=\dfrac{BD}{PD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{PD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore PD=\sqrt{10}$. ………………7 分

分别取 AD,AB 的中点 O,E，连接 OP,OE，则 $OE//BD$.

$\because PA=PD$，$\therefore PO\perp AD$，$\therefore PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{10-2}=2\sqrt{2}$.

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PO\perp OE$，$\because OE//BD$，$AD\perp BD$，$\therefore OE\perp AD$. ………………8 分

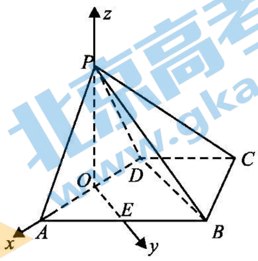
以 O 为坐标原点，OA,OE,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,2\sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，$B(-\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，………………9 分

则 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PB}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ x-2y+2z=0\end{cases}$.

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore \boldsymbol{n}=\left(1,-1,-\dfrac{3}{2}\right)$，………………10 分



显然 $\overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{2},0)$ 为平面 PAD 的一个法向量，………………11 分

则 $|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DB}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{1\times2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，

$\therefore$ 平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$. ………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（1）由 $y=a\cdot b^x$ 得 $\ln y=\ln(ab^x)=\ln a+x\ln b$，

设 $\ln y=v$，$\therefore v=\ln a+x\ln b$，………………1 分

$\because \bar{x}=3,\bar{v}=1.25$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，$\therefore \ln b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5\bar{x}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{22.62-5\times3\times1.25}{55-5\times3^2}=0.387$. ………3 分

又点 $(3,1.25)$ 在 $\hat{v}=\ln a+x\ln b$ 上，$\therefore \ln a=0.089$，故 $\hat{v}=0.089+0.387x$，………………4 分

$\therefore \ln\hat{y}=0.089+0.387x$，则 $\hat{y}=e^{0.089+0.387x}=1.1\times1.5^x$，

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=1.1\times1.5^x$，……………5 分

当 $x=6$ 时，$\hat{y}=1.1\times1.5^6=1.1\times11.4=12.54>10$，

$\therefore$ 预测 2023 年该地区新能源汽车保有量能超过 10 万辆. ………………6 分

（2）X 的所有可能取值为 0，1，2，3，易知 2018 ~ 2022 年中满足 $y-z>0.8$ 的年份有 2 个，

则每人取到满足 $y-z>0.8$ 的年份的概率为 $\frac{2}{5}$，且有 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，………………8 分

$\therefore P(X=0)=\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，………………10 分

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$\therefore E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

（1）由题意得，$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1\\ \frac{2}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\end{cases}$，………………2 分

解得 $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$，$\therefore C$ 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ………………4 分

（2）由（1）得，$A(1,0)$，设直线 $l: x=my+\sqrt{5}$，联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1\\ x=my+\sqrt{5}\end{cases}$，

整理得 $(4m^2-1)y^2+8\sqrt{5}my+16=0$，且 $4m^2-1\neq0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{8\sqrt{5}m}{4m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{16}{4m^2-1}$，………………5 分

而直线 $AM: y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，令 $x=\sqrt{5}$，则 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(\sqrt{5}-1)$，

$\therefore E\left(\sqrt{5},\frac{y_1}{x_1-1}(\sqrt{5}-1)\right)$，同理可得 $F\left(\sqrt{5},\frac{y_2}{x_2-1}(\sqrt{5}-1)\right)$. ………………6 分

由对称性可知，若以 EF 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，

设该定点坐标为 $T(t,0)$，则 $\overrightarrow{TE}=\left(\sqrt{5}-t,\frac{y_1}{x_1-1}(\sqrt{5}-1)\right)$，$\overrightarrow{TF}=\left(\sqrt{5}-t,\frac{y_2}{x_2-1}(\sqrt{5}-1)\right)$，8 分

$$\therefore \overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(\sqrt{5}-t)^2+\frac{(\sqrt{5}-1)^2y_1y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=(\sqrt{5}-t)^2+\frac{(\sqrt{5}-1)^2y_1y_2}{(my_1+\sqrt{5}-1)(my_2+\sqrt{5}-1)}$$

$$=\left(\sqrt{5}-t\right)^2+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 y_1y_2}{m^2y_1y_2+\left(\sqrt{5}-1\right)m\left(y_1+y_2\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$=\left(\sqrt{5}-t\right)^2+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2\cdot\frac{16}{4m^2-1}}{m^2\cdot\frac{16}{4m^2-1}-\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot m\cdot\frac{8\sqrt{5}m}{4m^2-1}+\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$=\left(\sqrt{5}-t\right)^2+\frac{16\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2\sqrt{5}-6}=\left(\sqrt{5}-t\right)^2-16=0,$$

解得 $t=\sqrt{5}\pm4$，故以 EF 为直径的圆过定点 $\left(\sqrt{5}\pm4,0\right)$. ………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）由 $f(x)=\left(x-2\right)e^x+ax+2$ 知，$f(0)=0$，$f'(x)=\left(x-1\right)e^x+a$，………………1 分

记 $g(x)=\left(x-1\right)e^x+a$，$x\in\left[0,+\infty\right)$，则 $g'(x)=xe^x\geqslant0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增. ………………2 分

当 $a\geqslant1$ 时，$f'(0)=-1+a\geqslant0$，$\therefore f'(x)\geqslant f'(0)\geqslant0$ 对 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意； ………………3 分

当 $a<1$ 时，$f'(0)=-1+a<0$，$x\to+\infty$，$f'(x)\to+\infty$，

故存在 $x_0>0$，使得 $f'(x_0)=0$，从而 $x\in\left(0,x_0\right)$，$f'(x_0)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x_0)<f(0)=0$，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $\left[1,+\infty\right)$. ………………5 分

（2）当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，由（1）知 $\left(x-2\right)e^x+x+2>0$，

$\therefore x>\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x+1}$ 对一切 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，即 $\ln x>\dfrac{2\left(x-1\right)}{x+1}$ 对一切 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 恒成立，……7 分

令 $x=\dfrac{n+1}{n}>1$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{2\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}{\frac{n+1}{n}+1}=\dfrac{2}{2n+1}$，………………8 分

$\therefore \ln2>\dfrac{2}{3}$，$\ln\dfrac{3}{2}>\dfrac{2}{5}$，…，$\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{2}{2n+1}$，

$\therefore \ln2+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}+\cdots+\dfrac{2}{2n+1}$，………………10 分

即 $\ln\left(n+1\right)>2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}\right)$，$\therefore \ln\sqrt{n+1}>\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$. ………………12 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.