

A. $a = 2b$

B. $b = 2a$

C. $a = 4b$

D. $b = 4a$

8. 若 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x - 1$, 则 $f(x - 1) < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x | -1 < x < 0\}$

B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

C. $\{x | 0 < x < 2\}$

D. $\{x | 1 < x < 2\}$

9. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则“ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数”是“任意 $a > 0$, $y = f(x + a) - f(x)$ 无零点”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 某企业生产 A, B 两种型号的产品, 每年的产量分别为 10 万支和 40 万支, 为了扩大再生产, 决定对两种产品的生产线进行升级改造, 预计改造后的 A, B 两种产品的年产量的增长率分别为 50% 和 20%, 那么至少经过多少年后, A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量 (取 $\lg 2 = 0.3010$)

A. 6 年

B. 7 年

C. 8 年

D. 9 年

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 函数 $f(x) = \lg(x-1) + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为_____.

12. 已知方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两根为 x_1 和 x_2 , 则 $x_1^2 + x_2^2 =$ _____; $|x_1 - x_2| =$ _____.

13. 设函数 $f(x)$ 同时满足以下条件:

① 定义域为 \mathbf{R} ; ② $f(0) = 1$; ③ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$;

试写出一个函数解析式 $f(x) =$ _____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq a \\ \log_3 x, & x > a \end{cases}$, 其中 $a > 0$.

① 若 $a = 5$, 则 $f[f(81)] =$ _____;

② 若函数 $y = f(x) - 3$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

15. 给定函数 $y = f(x)$, 设集合 $A = \{x | y = f(x)\}$, $B = \{y | y = f(x)\}$. 若对于 $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, 使得 $x + y = 0$ 成立,

则称函数 $f(x)$ 具有性质 P . 给出下列三个函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; ③ $y = \lg x$. 其中, 具有性质 P 的函数的序号是_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85 分.)

16. 某校高一新生共有 320 人, 其中男生 192 人, 女生 128 人. 为了解高一新生对数学选修课程的看法, 采用分层抽样的方法从高一新生中抽取 5 人进行访谈.

(I) 这 5 人中男生、女生各多少名？

(II) 从这 5 人中随即抽取 2 人完成访谈问卷，求 2 人中恰有 1 名女生的概率。

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

(1) 证明： $f(x)$ 为偶函数；

(2) 用定义证明： $f(x)$ 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数；

(3) 直接写出 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 的值域.

18. 甲和乙分别记录了从初中一年级（2017 年）到高中三年级（2022 年）每年的视力值，如下表所示

	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年
甲	4.94	4.90	4.95	4.82	4.80	4.79
乙	4.86	4.90	4.86	4.84	4.74	4.72

(1) 计算乙从 2017 年到 2022 年这 6 年的视力平均值；

(2) 从 2017 年到 2022 年这 6 年中随机选取 2 年，求这两年甲的视力值都比乙高 0.05 以上的概率；

(3) 甲和乙的视力平均值从哪年开始连续三年的方差最小？（结论不要求证明）

19. 某厂将“冰墩墩”的运动造型徽章纪念品定价为 50 元一个，该厂租用生产这种纪念品的厂房，租金为每年 20 万元，该纪念品年产量为 x 万个 $(0 < x \leq 20)$ ，每年需投入的其它成本为

$$C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 5x, & 0 < x \leq 10 \\ 60x + \frac{2560}{x} - 756, & 10 < x \leq 20 \end{cases} \quad (\text{单位：万元}), \text{ 且该纪念品每年都能买光.}$$

(1) 求年利润 $f(x)$ （单位：万元）关于 x 的函数关系式；

(2) 当年产量 x 为何值时，该厂的年利润最大？求出此时的年利润.

20. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) - mx$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(0)$ ；

(2) 若函数 $f(x)$ 是偶函数，求 m 的值；

(3) 当 $m = -1$ 时，当函数 $y = f(x)$ 的图象在直线 $y = -2$ 的上方时，求 x 的取值范围.

21. 设 A 是实数集的非空子集，称集合 $B = \{uv \mid u, v \in A \text{ 且 } u \neq v\}$ 为集合 A 的生成集.

(1) 当 $A = \{2, 3, 5\}$ 时，写出集合 A 的生成集 B ；

(2) 若 A 是由 5 个正实数构成的集合，求其生成集 B 中元素个数的最小值；

(3) 判断是否存在 4 个正实数构成的集合 A ，使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$ ，并说明理由.



参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 【答案】C

【分析】

解不等式 $-3 < 2k < 3 (k \in \mathbf{Z})$ ，求得整数 k 的取值，由此可求得 $A \cap B$ 。

【详解】解不等式 $-3 < 2k < 3$ ，得 $-\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}$ ， $\because k \in \mathbf{Z}$ ，所以，整数 k 的可能取值有 $-1, 0, 1$ ，

因此， $A \cap B = \{-2, 0, 2\}$ 。

故选：C。

【点睛】本题考查交集的计算，考查计算能力，属于基础题。

2. 【答案】A

【分析】利用代入消元法，求解方程组的解集即可。

【详解】因为 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ，所以 $y = -2x$ 代入 $x^2 + y^2 = 5$ ，

即 $x^2 + (-2x)^2 = 5$ ，解得 $x = \pm 1$ 。

当 $x = -1$ 时， $y = -2 \times (-1) = 2$ ；

当 $x = 1$ 时， $y = -2 \times 1 = -2$ 。

故 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 的解集是 $\{(1, -2), (-1, 2)\}$ 。

故选：A。

3. 【答案】D

【分析】直接根据特称命题的否定是全称命题来得答案。

【详解】根据特称命题的否定是全称命题可得

命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 3 < 0$ ”的否定形式是 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 。

故选：D。

4. 【答案】C

【分析】由函数的奇偶性和单调性的定义对选项一一判断即可得出答案。

【详解】对于 A， $y = \ln x$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$ ，不关于原点对称，

所以 $y = \ln x$ 是非奇非偶函数，故 A 不正确；

对于 B， $y = 2^x$ 的定义域为 \mathbf{R} ，关于原点对称，

而 $f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} \neq -f(x)$ ，所以 $y = 2^x$ 不是奇函数，故 B 不正确；

对于 C, $y = x^3$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称,

而 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 所以 $y = x^3$ 是奇函数且在 \mathbf{R} 上是增函数, 故 C 正确;

对于 D, $y = -\frac{1}{x}$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称,

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, 所以 $y = -\frac{1}{x}$ 是奇函数,

$y = -\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不能说成在定义域上单调递增,

因为不满足增函数的定义, 故 D 不正确.

故选: C.

5. 【答案】C

【详解】试题分析: 由题意得, 自习时间不少于 22.5 小时的频率为 $(0.16 + 0.08 + 0.04) \times 2.5 = 0.7$, 故自习时间不少于 22.5 小时的人数为 $0.7 \times 200 = 140$, 故选 C.

考点: 频率分布直方图及其应用.

6. 【答案】C

【分析】借助中间量 0, 1 可确定大小.

【详解】对于 $a = \lg 2$, 由 $\lg 2 > \lg 1 = 0, \lg 2 < \lg 10 = 1$ 得 $0 < a < 1$,

对于 $b = \log_{\frac{1}{2}} 3$, 由 $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$ 得 $b < 0$,

对于 $c = 2^{0.2}$, 由 $2^{0.2} > 2^0 = 1$ 得 $c > 1$,

所以 $b < a < c$.

故选: C.

7. 【答案】C

【分析】由对数的运算可得 $\log_2 a + \log_{\frac{1}{2}} b = \log_2 \frac{a}{b} = 2$, 再求解即可.

【详解】解: 因为 $\log_2 a + \log_{\frac{1}{2}} b = \log_2 a - \log_2 b = \log_2 \frac{a}{b} = 2$,

所以 $\frac{a}{b} = 2^2 = 4$,

即 $a = 4b$,

故选: C.

【点睛】本题考查了对数的运算, 属基础题.

8. 【答案】C

【分析】

根据 $f(x)$ 是偶函数, 先得到 $f(x) < 0$ 的解集, 再由 $f(x-1) < 0$, 将 $x-1$ 代入求解.

【详解】因为 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x - 1$,

所以由 $f(x) < 0$, 解得 $0 \leq x < 1$,

又因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(x) < 0$ 的解集是 $-1 < x < 1$,

所以 $f(x-1) < 0$, 得 $-1 < x-1 < 1$,

解得 $0 < x < 2$

所以 $f(x-1) < 0$ 的解集是 $\{x | 0 < x < 2\}$,

故选: C

9. 【答案】A

【分析】由 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数得 $f(x+a) > f(x)$, 即 $y = f(x+a) - f(x) > 0$ 无零点, 满足充分性; 反之若对任意 $a > 0$, $f(x+a) < f(x)$, 满足 $y = f(x+a) - f(x)$ 无零点, 但不满足 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 不满足必要性, 即可判断.

【详解】若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则对任意 $a > 0$, 显然 $x+a > x$, 故 $f(x+a) > f(x)$, 即 $y = f(x+a) - f(x) > 0$ 无零点, 满足充分性;

反之, 若对任意 $a > 0$, $f(x+a) < f(x)$, 即 $f(x+a) - f(x) < 0$, 满足 $y = f(x+a) - f(x)$ 无零点, 但 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 不满足必要性,

故“ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数”是“任意 $a > 0$, $y = f(x+a) - f(x)$ 无零点”的充分而不必要条件.

故选: A.

10. 【答案】B

【分析】

依题求出经过 x 年后, A 产品和 B 产品的年产量分别为 $10(\frac{3}{2})^x$, $40(\frac{6}{5})^x$, 根据题意列出不等式, 求出 x 的范围即可得到答案.

【详解】依题经过 x 年后, A 产品的年产量为 $10(1 + \frac{1}{2})^x = 10(\frac{3}{2})^x$

B 产品的年产量为 $40(1 + \frac{1}{5})^x = 40(\frac{6}{5})^x$,

依题意若 A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量,

则 $10(\frac{3}{2})^x > 40(\frac{6}{5})^x$ 化简得 $5^x > 4^{x+1}$, 即 $x \lg 5 > (x+1) \lg 4$,

所以 $x > \frac{2 \lg 2}{1 - 3 \lg 2}$, 又 $\lg 2 = 0.3010$, 则 $\frac{2 \lg 2}{1 - 3 \lg 2} \approx 6.2062$

所以至少经过7年A产品的年产量会超过B产品的年产量.

故选: B

【点睛】本题主要考查指数函数模型, 解指数型不等式, 属于基础题.

二、填空题(本大题共5小题, 每小题5分, 共25分.)

11. 【答案】 $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

【分析】根据函数的解析式, 列出函数有意义时满足的不等式, 求得答案.

【详解】函数 $f(x) = \lg(x-1) + \frac{1}{x-2}$ 需满足 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $x > 1$ 且 $x \neq 2$,

故函数 $f(x) = \lg(x-1) + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为 $(1, 2) \cup (2, +\infty)$,

故答案为: $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

12. 【答案】 ①. 14 ②. $2\sqrt{3}$

【分析】利用韦达定理可得 $x_1^2 + x_2^2$ 、 $|x_1 - x_2|$ 的值.

【详解】因为方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两根为 x_1 和 x_2 , 由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 = 1$,

所以, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \times 1 = 14$,

$|x_1 - x_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{14 - 2} = 2\sqrt{3}$.

故答案为: 14; $2\sqrt{3}$.

13. 【答案】 $-x+1$ (答案不唯一)

【分析】由题意首先由③得到函数的单调性, 再结合函数定义域, 特殊点的函数值, 容易联想到一次函数, 由此即可得解.

【详解】由③, 不妨设 $\forall x_1 < x_2$, 即 $x_2 - x_1 > 0$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 即 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即

$f(x_2) < f(x_1)$,

所以由题意可知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的减函数且满足 $f(0) = 1$,

不妨设一次函数 $y = -x + b$ 满足题意, 则 $1 = -0 + b$, 即 $b = 1$.

故答案为: $-x+1$.

14. 【答案】 ①. 2 ②. $[9, 27)$

【分析】①代值计算即可;

②分别画出 $y = f(x)$ 与 $y = 3$ 的图象, 函数有两个零点, 结合图象可得答案.

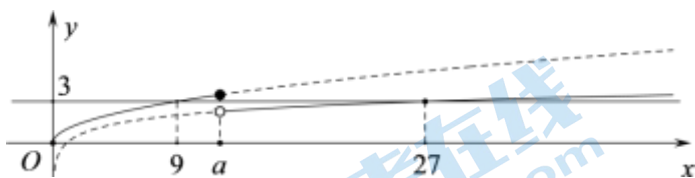
【详解】①当 $a=5$ 时, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 5 \\ \log_3 x, x > 5 \end{cases}$

因为 $81 > 5$, 所以 $f(81) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 < 5$,

所以 $f[f(81)] = f(4) = \sqrt{4} = 2$.

②因为函数 $y = f(x) - 3$ 有两个零点, 所以 $f(x) = 3$, 即 $y = f(x)$ 与 $y = 3$ 的图象有两个交点.

由 $\sqrt{x} = 3$ 得 $x = 9$, $\log_3 x = 3$ 得 $x = 27$.



结合图象可得 $9 \leq a < 27$, 即 $a \in [9, 27)$.

所以 a 的取值范围是 $[9, 27)$.

故答案为: ①2; ② $[9, 27)$.

15. 【答案】①③

【分析】

A 即为函数的定义域, B 即为函数的值域, 求出每个函数的定义域及值域, 直接判断即可.

【详解】对①, $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 显然对于 $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, 使得 $x+y=0$ 成立, 即具有性质 P ;

对②, $A = \mathbb{R}$, $B = (0, +\infty)$, 当 $x > 0$ 时, 不存在 $y \in B$, 使得 $x+y=0$ 成立, 即不具有性质 P ;

对③, $A = (0, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$, 显然对于 $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, 使得 $x+y=0$ 成立, 即具有性质 P ;

故答案为: ①③.

【点睛】本题以新定义为载体, 旨在考查函数的定义域及值域, 属于基础题.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85 分.)

16. 【答案】(I) 男生 3 人, 女生 2 人; (II) $\frac{3}{5}$

【分析】

(I) 利用分层抽样按比例计算出这 5 人中男生人数和女生人数.

(II) 记这 5 人中的 3 名男生为 B_1, B_2, B_3 , 2 名女生为 G_1, G_2 , 利用列举法能求出抽取的 2 人中恰有 1 名女生的概率.

【详解】(I) 这 5 人中男生人数为 $\frac{192}{320} \times 5 = 3$, 女生人数为 $\frac{128}{320} \times 5 = 2$.

(II) 记这 5 人中的 3 名男生为 B_1, B_2, B_3 , 2 名女生为 G_1, G_2 ,

则样本空间为:

$\Omega = \{(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_2, B_3), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_3, G_1), (B_3, G_2)\}$,

$(G_1, G_2)\}$,

样本空间中, 共包含 10 个样本点.

设事件 A 为“抽取的 2 人中恰有 1 名女生”,

则 $A = \{(B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_3, G_1), (B_3, G_2)\}$,

事件 A 共包含 6 个样本点. 从而 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

所以抽取的 2 人中恰有 1 名女生的概率为 $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题考查古典概型概率, 考查分层抽样、列举法等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

17. **【答案】** (1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $(0, +\infty)$

【分析】 (1) 根据奇偶性的定义证明即可;

(2) 利用单调性定义证明即可;

(3) 根据单调性直接求得即可.

【小问 1 详解】

由函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ 可知 $x^2 - 1 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x | x \neq \pm 1\}$,

所以 $\forall x \in D, f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$,

故 $f(x)$ 为偶函数.

【小问 2 详解】

假设 $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2 - 1} - \frac{1}{x_2^2 - 1} = \frac{x_2^2 - 1 - (x_1^2 - 1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)},$$

由 $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2$ 知 $x_2 - x_1 > 0, x_2 + x_1 > 0, (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) > 0$,

从而 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数.

【小问 3 详解】

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上减函数, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 的值域为 $(0, +\infty)$.

18. **【答案】** (1) 4.82

(2) $\frac{2}{5}$

(3) 甲的视力平均值从 2020 年开始连续三年的方差最小,

乙的视力平均值从 2017 年开始连续三年的方差最小.

- 【分析】(1) 利用平均数公式计算即可;
(2) 列表分析, 利用古典概型概率公式计算即可
(3) 由表中数据分析波动性即可得结论.

【小问 1 详解】

乙从 2017 年到 2022 年这 6 年的视力平均值为:

$$\frac{4.86 + 4.90 + 4.86 + 4.84 + 4.74 + 4.72}{6} = 4.82.$$

【小问 2 详解】

列表:

	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年
甲	4.94	4.90	4.95	4.82	4.80	4.79
乙	4.86	4.90	4.86	4.84	4.74	4.72
甲与乙视 力值的差	0.08	0	0.09	-0.02	0.06	0.07

由表格可知: 2017 年到 2022 年这 6 年中随机选取 2 年,

这两年甲的视力值都比乙高 0.05 上的年份由有 4 年,

$$\text{故所求概率为: } P = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

【小问 3 详解】

从表格数据分析可得:

甲的视力平均值从 2020 年开始连续三年的方差最小,

乙的视力平均值从 2017 年开始连续三年的方差最小.

$$19. \text{【答案】(1) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 45x - 20, & 0 < x \leq 10 \\ -\left(10x + \frac{2560}{x}\right) + 736, & 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

(2) 当年产量 x 为 16 万个时, 该厂的年利润最大, 为 416 万元

【分析】(1) 根据利润等于销售总额减去总成本即可得出答案.

(2) 求出分段函数每一段的最大值, 进行比较即可得出答案.

【小问 1 详解】

由题意得: $f(x) = 50x - 20 - C(x)$, ($0 < x \leq 20$).

$$\text{因为 } C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 5x, & 0 < x \leq 10 \\ 60x + \frac{2560}{x} - 756, & 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 50x - 20 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x\right), & 0 < x \leq 10 \\ 50x - 20 - \left(60x + \frac{2560}{x} - 756\right), & 10 < x \leq 20 \end{cases},$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 45x - 20, & 0 < x \leq 10 \\ -\left(10x + \frac{2560}{x}\right) + 736, & 10 < x \leq 20 \end{cases}.$$

【小问 2 详解】

当 $0 < x \leq 10$ 时, 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 45x - 20$ 在 $(0, 10]$ 单调递增, 此时

$$f(x)_{\max} = f(10) = -\frac{1}{2} \times 10^2 + 45 \times 10 - 20 = 380.$$

当 $10 < x \leq 20$ 时, 函数 $f(x) = -\left(10x + \frac{2560}{x}\right) + 736$ 在 $(10, 16)$ 上单调递增, 在 $(16, 20)$ 上单调递减,

$$\text{此时 } f(x)_{\max} = f(16) = -\left(10 \times 16 + \frac{2560}{16}\right) + 736 = 416 > 380.$$

综上所述: 当年产量 x 为 16 万个时, 该厂的年利润最大, 为 416 万元.

20. 【答案】(1) -1

$$(2) m = -\frac{1}{2}$$

$$(3) x > \log_2 \frac{1}{3}$$

【分析】(1) 直接将 $x=0$ 代入计算;

(2) 通过计算 $f(x) - f(-x) = 0$ 恒成立可得 m 的值;

(3) 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) + x > -2$ 即可.

【小问 1 详解】

$$\text{由已知得 } f(0) = \log_{\frac{1}{2}}(2^0 + 1) = -1;$$

【小问 2 详解】

\therefore 函数 $f(x)$ 是偶函数,

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - f(-x) &= \log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) - mx - \left[\log_{\frac{1}{2}}(2^{-x} + 1) + mx \right] = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2^x + 1}{2^{-x} + 1} - 2mx \\ &= \log_{\frac{1}{2}} 2^x - 2mx = -x - 2mx = -x(2m + 1) = 0, \end{aligned}$$

又 $-x(2m + 1) = 0$ 要恒成立, 故 $2m + 1 = 0$,

解得 $m = -\frac{1}{2}$;

【小问 3 详解】

当 $m = -1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) + x$,

当函数 $y = f(x)$ 的图象在直线 $y = -2$ 的上方时有 $\log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) + x > -2$,

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^x + 1) > -2 - x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2-x} \Rightarrow 2^x + 1 < \left(\frac{1}{2} \right)^{-2-x} = 2^{2+x} = 4 \times 2^x$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^x > 1 \Rightarrow 2^x > \frac{1}{3} = 2^{\log_2 \frac{1}{3}}$$

解得 $x > \log_2 \frac{1}{3}$.

21. **【答案】** (1) $B = \{6, 10, 15\}$

(2) 7 (3) 不存在, 理由见解析

【分析】 (1) 利用集合的生成集定义直接求解.

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 且 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, 利用生成集的定义即可求解;

(3) 不存在, 理由反证法说明.

【小问 1 详解】

$$\because A = \{2, 3, 5\}, \therefore B = \{6, 10, 15\}$$

【小问 2 详解】

设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 不妨设 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$,

因为 $a_1 a_2 < a_1 a_3 < a_1 a_4 < a_1 a_5 < a_2 a_5 < a_3 a_5 < a_4 a_5$, 所以 B 中元素个数大于等于 7 个,

又 $A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\}$, $B = \{2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9\}$, 此时 B 中元素个数等于 7 个,

所以生成集 B 中元素个数的最小值为 7.

【小问 3 详解】

不存在, 理由如下:

假设存在 4 个正实数构成的集合 $A = \{a, b, c, d\}$, 使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$,

不妨设 $0 < a < b < c < d$ ，则集合 A 的生成集 $B = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

则必有 $ab = 2, cd = 16$ ，其 4 个正实数的乘积 $abcd = 32$ ；

也有 $ac = 3, bd = 10$ ，其 4 个正实数的乘积 $abcd = 30$ ，矛盾；

所以假设不成立，故不存在 4 个正实数构成的集合 A ，使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$

【点睛】 关键点点睛：本题考查集合的新定义，解题的关键是理解集合 A 的生成集的定义，考查学生的分析解题能力，属于较难题。



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

