梅州市高三第一次质检（2024.2）

数学参考答案与评分意见

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	C	B	A	D	A	C

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9	10	11
BCD	BCD	ABC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\sqrt{7}$ 13. $\frac{1}{27}\times 10^{n+1}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}$ 14. $[\frac{\sqrt{105}}{3},2\sqrt{5})$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

解：（1）因为$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为d；$\{b_n\}$为等比数列，设其公比为q，

依题意有：$\begin{cases} b_1=a_1=4 \\ b_1q=a_1+d+1 \\ b_1q^2=2(a_1+2d)-4 \end{cases}$ ……………………2 分

得到：$\begin{cases} 4q=5+d \\ q^2=1+d \end{cases}$， ……………………3 分

解得：$\begin{cases} q=2 \\ d=3 \end{cases}$， ……………………4 分

因此 $a_n=4+3(n-1)=3n+1$， ……………………5 分

$b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$. ……………………6 分

(2) 因为 $a_{44}=3\times44+1=133$，又 $b_6=2^7=128<a_{44}$，$b_7=256>a_{44}$，　……8分

且等差数列 $\{a_n=3n+1\}$ 和等比数列 $\{b_n=2^{n+1}\}$ 均为单调递增数列，　……9分

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项包含 $\{a_n\}$ 的前 44 项和 $\{b_n\}$ 的前 6 项，　……10分

数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项和 $S_{50}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{44}+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$　……11分

$$=\frac{44\times(4+133)}{2}+\frac{4(1-2^6)}{1-2}$$　……12分

$$=3266.$$　……13分

16.（本小题满分 15 分）

解：（1）由已知可得，甲赢得比赛的情况有以下三种：

① 情况一：比赛三局且甲均获胜，其概率为 $P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，　……2分

② 情况二：比赛四局，甲前三局胜两局，输一局，第四局甲获胜，

其的概率为：$P_2=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，　……4分

③ 情况三：比赛五局，甲前四局胜两局，输两局，第五局甲获胜，

其概率为 $P_3=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$，　……6分

综上，甲获胜的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$.　……8分

（2）设两人比赛局数为 X，则随机变量 X 的可能取值为 $3,4,5$，　……9分

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$，　……10分

$P(X=4)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\frac{10}{27}$，　……11分

$P(X=5)=1-P(X=3)-P(X=4)=1-\frac{1}{3}-\frac{10}{27}=\frac{8}{27}$，　……12分

则随机变量 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$.　……15分

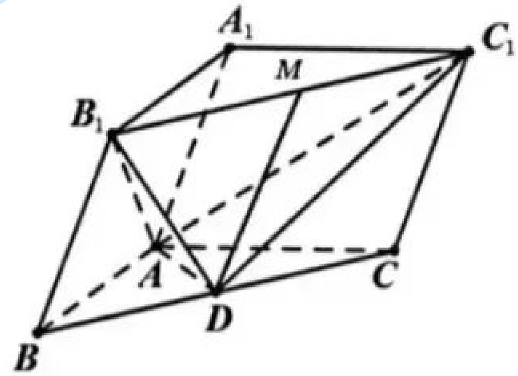
17.（本小题满分 15 分）

解：（1）因为 $AB=AC=2$, D 为的中点，

所以 $AD\perp BC$， ………………1 分

因为侧面 $BCC_1B_1\perp$ 底面 ABC，且侧面 $BCC_1B_1\cap$ 底面 $ABC=BC$，

所以 $AD\perp$ 侧面 BCC_1B_1，



而 $B_1D\subset$ 侧面 BCC_1B_1，所以 $AD\perp B_1D$， ……… 2 分

取 B_1C_1 的中点 M，连结 DM，

易知四边形 $BDMB_1$ 为平行四边形，

$DM=BB_1=\frac{1}{2}B_1C_1$， ………3 分

所以由 ΔB_1DC_1 为直角三角形，$B_1D\perp DC_1$， ………………4 分

又 $AD\subset$ 平面 ADC_1，$DC_1\subset$ 平面 ADC_1，$AD\cap DC_1=D$，

所以 $B_1D\perp$ 平面 ADC_1， ………………5 分

又 $B_1D\subset$ 平面 ADB_1，所以平面 $B_1AD\perp$ 平面 ADC_1 ………………6 分

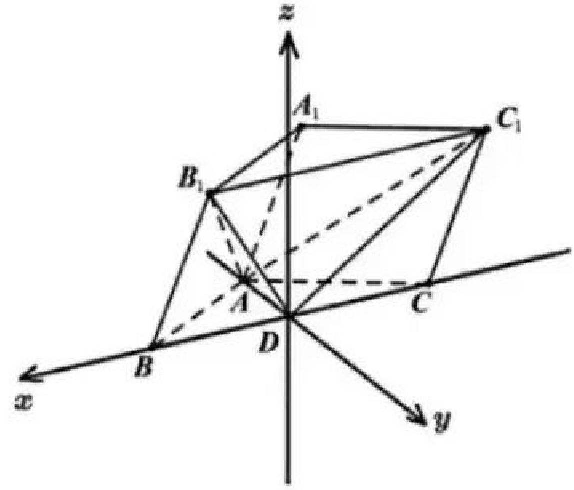
（2）取 BD 的中点为 E，连接 B_1E，则 $B_1E\perp BD$，由（1）得，$B_1E\perp$ 平面ABC

过 D 作直线 l 平行于 B_1E，则以为 D 坐标原点，l 为所在直线为 z 轴，DB 为所在直线为 x 轴，

DA 为所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$， ………………7 分

则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$A(0,-1,0)$， ……………8 分

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$，



所以 $\overrightarrow{AA_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AA_1},\lambda\in[0,1]$，

所以 $Q=(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-1,\frac{3}{2}\lambda)$， …………9 分

所以 $\overrightarrow{BQ}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3},-1,\frac{3}{2}\lambda)$， ………10 分

又设平面ACC_1A_1的法向量为$n=(x,y,z)$，

因为$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{AA_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}z=0\end{cases}$ ……………………11分

令$x=\sqrt{3}$，则$y=3,z=1$，

所以$\vec{n}=(\sqrt{3},3,1)$， ……………………12分

所以$\sin 60^0=\left|\cos\langle\overline{BQ},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}-3+\frac{3}{2}\lambda}{\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3})^2+1+(\frac{3}{2}\lambda)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………13分

整理得：$39\lambda^2+39\lambda+4=0$，

而显然当$0\le\lambda\le1$时，$39\lambda^2+39\lambda+4>0$，

$39\lambda^2+39\lambda+4=0$在区间$[0,1]$上无解， ……………………14分

即在棱AA_1上不存在满足题意的点Q． ……………………15分

18．（本小题满分17分）

解：（1）因为$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}(a>0)$，

所以$f'(x)=\dfrac{x+1-a}{(x+1)^2}\quad(a>0)$， ……………………1分

因为$x=1$是函数$f(x)$的一个极值点，

故$f'(1)=0$，即$a=2$， ……………………2分

当$a=2$时，代入检验，$x=1$确是函数$f(x)$的一个极小值点， ……………………3分

所以$a=2$． ……………………4分

（2）因为$f(x)\ge0$在$[0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)_{min}\ge0$． ……………………5分

当$0<a\le1$时，$f(x)=\dfrac{x+1-a}{(x+1)^2}\ge0$在$[0,+\infty)$上恒成立，

即$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数， ……………………6分

所以$f(x)_{min}=f(0)=0$成立，即$0<a\le1$满足题意． ……………………7分

当$a>1$时，令$f'(x)=\dfrac{x+1-a}{(x+1)^2}>0$，得$x>a-1$，

令 $f'(x)=\dfrac{x+1-a}{(x+1)^2}<0$，得 $0<x<a-1$， ……………………8 分

即 $f(x)$ 在 $(0,a-1)$ 上为减函数，在 $(a-1,+\infty)$ 上为增函数． ……………………9 分

当 $x\in(0,\ a-1)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，这与 $f(x)\geq 0$ 矛盾． ……………………10 分

综上所述，a 的取值范围是 $(0,1]$． ……………………11 分

（3）证明：要证 $(\dfrac{2024}{2023})^{2024}>e$，

两边取自然对数得，$2024\cdot\ln\dfrac{2024}{2023}>1$，等价于：$\ln\dfrac{2024}{2023}>\dfrac{1}{2024}$， ……………12 分

只需证：$\ln\dfrac{2024}{2023}-\dfrac{1}{2024}>0$， ……………………13 分

由（2）知，当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增． ……………14 分

$$f(\frac{1}{2023})=\ln(1+\frac{1}{2023})-\frac{\frac{1}{2023}}{1+\frac{1}{2023}}=\ln\frac{2024}{2023}-\frac{1}{2024}>f(0)=0,$$ ……………………16 分

从而原命题成立． ……………………17 分

19.（本小题满分 17 分）

解：（1）因为 $ON=1$，所以点 N 的轨迹是以原点 O 为圆心，半径为1的圆， ……………1 分

于是曲线 C_1 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$． ……………………2 分

设 $M(x,y),N(x_0,y_0),D(t,0),|t|\leq 2$．

由题可知，$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DN}$，$|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{DN}|=1$，

所以 $\begin{cases}(t-x,-y)=(x_0-t,y_0)\\ x_0^2+y_0^2=1\\ (x_0-t)^2+y_0^2=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=2t-x_0\\ y=-y_0\\ t(t-2x_0)=0\end{cases}$ ……………………3 分

由于 t 不恒为0，所以 $t=2x_0$，

故 $\begin{cases}x_0=\dfrac{x}{3}\\ y_0=-y\end{cases}$ ……………………4 分

又 $x_0^2+y_0^2=\dfrac{1}{4}$，所以 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+(-y)^2=1$，即 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$， ……………………5 分

故曲线 C_2 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$． ……………………6 分

（2）易知$E(-1,0)$，$F(1,0)$， ……………………7分

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$，

则点E到直线$l:y=kx+m$的距离为$d_1=\dfrac{|-k+m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

点F到直线$l:y=kx+m$的距离为$d_2=\dfrac{|k+m|}{\sqrt{k^2+1}}$ ……………………8分

因为l与C_1相切，所以$\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即$m^2=k^2+1$， ……………………9分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，

得$(1+9k^2)x^2+18kmx+9(m^2-1)=0$， ……………………10分

所以$\begin{cases}\Delta=36(9k^2-m^2+1)\\ x_1+x_2=-\dfrac{18km}{1+9k^2}\\ x_1x_2=\dfrac{9(m^2-1)}{1+9k^2}\end{cases}$ ……………………11分

故$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{6\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{9k^2-m^2+1}}{1+9k^2}$. ……………………12分

又$m^2=k^2+1$，由$\Delta=36(9k^2-m^2+1)=36\times8k^2>0$，得$k\neq0$， ……13分

所以$S_{\triangle EPQ}\cdot S_{\triangle FPQ}=\dfrac{1}{2}\times|PQ|\times d_1\times\dfrac{1}{2}\times|PQ|\times d_2=\dfrac{9(m^2-k^2)(9k^2-m^2+1)}{(1+9k^2)^2}$.

所以$S_{\triangle EPQ}\cdot S_{\triangle FPQ}=\dfrac{72k^2}{(1+9k^2)^2}=\dfrac{72k^2}{1+18k^2+81k^4}=\dfrac{72}{\dfrac{1}{k^2}+18+81k^2}$， ……14分

而$\dfrac{1}{k^2}+81k^2+18\geq2\sqrt{81}+18=36$， ……………………15分

则$S_{\triangle EPQ}\cdot S_{\triangle FPQ}=\dfrac{72}{\dfrac{1}{k^2}+18+81k^2}\in(0,2]$. ……………………16分

因此$S_{\triangle EPQ}\cdot S_{\triangle FPQ}$的取值范围为$(0,2]$. ……………………17分