高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 不等式$\frac{3-3x}{3+x}\geqslant 0$的解集为

A. $(-3,1]$　　B. $[-3,1]$

C. $(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

2. 设集合$M=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1\right.\right\}$，$N=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}+\frac{y}{3}=1\right.\right\}$，则集合$M\cap N$的真子集个数为

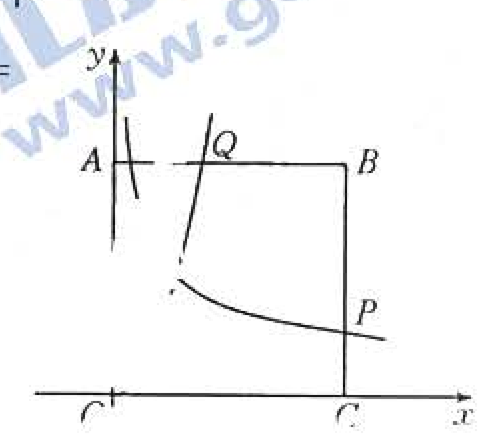
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. “$x\leqslant 8$”是“$\log_2 x\leqslant 3$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图，正方形 $OABC$ 的边长为 $a(a>1)$，函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 与 BC 交于点 P，函数 $y=2x^2$ 与 AB 交于点 Q，当$|AQ|+|CP|$取最小值时，$a=$



A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. $\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ+\tan 26^\circ+\tan 34^\circ=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设 $a=\sqrt[9]{10}$，$b=9\sin\frac{1}{10}$，$c=\sqrt[5]{3}$，则

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

7. 已知函数 $f(x)=-x^3+\frac{2}{1+e^x}$，若 $f(m^2-3)+f(1-m)>2$，则实数 m 的取值范围是

A. $(-1,2)$

B. $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

C. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

D. $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$

8. 对于某一集合 A，若任取 $a,b,c\in A$ 都有“a,b,c 为某一三角形的三边长”，则称集合 A 为“三角集”，下列集合中为三角集的是

A. $\{x|x$ 是$\triangle ABC$ 的高的长度$\}$

B. $\left\{x\left|\frac{x-1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$

C. $\{x||x-1|+|x-3|=2\}$

D. $\{x|y=\log_2(3x-2)\}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 对于实数 a,b，下列说法正确的是

A. 若 $am^2>bm^2$，则 $a>b$

B. 若 $a>b$，则 $a^{-1}<b^{-1}$

C. 若 $a>b>0,m>0$，则$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$

D. 若 $a>b>0$ 且 $|\ln a|=|\ln b|$，则 $3a+b\in(4,+\infty)$

10. 下列说法正确的是

A. 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 都不成立

B. 存在 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立

C. 对任意 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$成立

D. 存在 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$不成立

11. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+a\cos\omega x(a>0,\omega>0)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，且 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则

A. $\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $a=3$

C. $\omega\geqslant 1$

D. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增

12. 已知曲线 $y=ae^x$ 与 $y=\ln x-\ln a$ 的两条公切线 l_1,l_2 的倾斜角分别为 α,β，l_1,l_2 交于点 Q，且 l_1,l_2 的夹角为 $\theta\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则下列说法正确的是

A. $\sin\alpha=\cos\beta$

B. $\tan\alpha+\tan\beta\geqslant 2$

C. 若 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，则 $a^3=\frac{2}{e^3}$

D. 点 Q 可能在第三象限

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 $P(t,\sqrt{5})(t\neq 0)$是角 α 终边上一点，若 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}t$，则 $\sin\alpha=$__________.

14. 已知 p：$\exists m\in\{x|-2<x<3\}$，使关于 x 的方程 $2x^2-m=0$ 有解，则 $\neg p$：__________.

15. 函数 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$的一个单调减区间为____________.(答案不唯一)

16. 已知 $a>3b>0$,则 $3a^2+\frac{1}{ab-3b^2}$的最小值为__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)=2x^2-ax+4(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=9$ 时,求不等式 $f(x)<0$ 的解集;

(2)若不等式 $f(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

18.(本小题满分 12 分)

已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$.

(1)求 $\cos\beta$ 的值;

(2)求$\frac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-1}$的值.

19.(本小题满分 12 分)

已知 p:函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}+1\right)$在区间$[-2,-1]$上单调递增;$q$:函数 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在区间$[3,+\infty)$上单调递减.

(1)若 q 是真命题,求实数 a 的取值范围;

(2)若 p,q 中有一个为真命题,另一个为假命题,求实数 a 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且它的图象关于直线 $x=1$ 对称.

(1)求证：$f(x)$ 是周期为 4 的周期函数；

(2)若 $f(x)=\log_2(x+1)(0<x\leqslant 1)$，求 $x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$.

(1)若 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，是否存在实数 ω，使得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上单调？若存在，求出 ω 的取值集合；若不存在，请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\sin x+\cos x$.

(1)求函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调区间；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)-2-ax\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$，求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　不等式$\frac{3-3x}{3+x}\geqslant 0$等价于$\begin{cases}(3-3x)(3+x)\geqslant 0,\\ 3+x\neq 0,\end{cases}$所以$-3<x\leqslant 1$，所以原不等式的解集为$(-3,1]$. 故选 A.

2. C　联立方程组$\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y}{3}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{9}{4}.\end{cases}$因而集合$M\cap N$含有 2 个元素，其真子集个数为 3. 故选 C.

3. B　由$\log_2 x\leqslant 3$，得$0<x\leqslant 8$，所以“$x\leqslant 8$”是“$\log_2 x\leqslant 3$”的必要不充分条件. 故选 B.

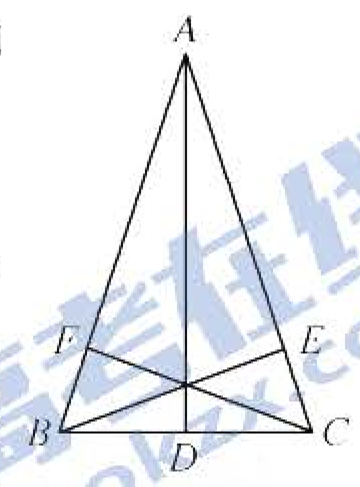
4. B　由题意，得$|CP|=a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$，设$Q(x_Q,y_Q)$，则$2x_Q^2=a$，即$|AQ|=x_Q=\sqrt{\frac{a}{2}}$，因为$a>1$，所以$|AQ|+|CP|=\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a}{2}}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$，当且仅当$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$，即$a=\sqrt{2}$时取等号，所以当$|AQ|+|CP|$取最小值时，$a=\sqrt{2}$. 故选 B.

5. C　$\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ+\tan 26^\circ+\tan 34^\circ=\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ+\tan(26^\circ+34^\circ)(1-\tan 26^\circ\tan 34^\circ)$
$=\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ+\sqrt{3}(1-\tan 26^\circ\tan 34^\circ)=\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ+\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 26^\circ\tan 34^\circ=\sqrt{3}$. 故选 C.

6. D　令$f(x)=\sin x-x$，则$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，所以$f(x)$在定义域上单调递减，所以当$x>0$时，$f(x)<f(0)=0$，即$\sin x<x$，所以$b=9\sin\frac{1}{10}<9\times\frac{1}{10}=\frac{9}{10}<1$，又$a=\sqrt[9]{10}>\sqrt[9]{1}=1$，$c=\sqrt[5]{3}>\sqrt[5]{1}=1$，且$a^{45}=10^5$，$c^{45}=3^9=3\times 9^4<10^5$，所以$a>c>b$. 故选 D.

7. A　令$g(x)=f(x)-1=-x^3+\frac{2}{1+e^x}-1=-x^3+\frac{1-e^x}{1+e^x}$，$g(-x)=-(-x)^3+\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=x^3+\frac{e^x-1}{1+e^x}=-g(x)$，故$g(x)$为奇函数. 易得$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减.
因为$f(m^2-3)+f(1-m)>2$，所以$g(m^2-3)+1+g(1-m)+1>2$，即$g(m^2-3)>-g(1-m)=g(m-1)$，所以$m^2-3<m-1$，解得$-1<m<2$. 故选 A.

8. B　对于 A，当等腰三角形的顶角$\angle BAC$无限小时，且底边上的高AD比较大，$BE\perp AC$，$CF\perp AB$，如图所示：



显然$BE+CF<AD$，故BE,CF,AD不满足三角形的三边，故选项 A 错误；
对于 B，由$\frac{x-1}{x-2}\leqslant 0$，得$\begin{cases}(x-1)(x-2)\leqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$解得$1\leqslant x<2$，任取$x_1,x_2$且$x_1\geqslant x_2$，则$2\leqslant x_1+x_2<4$，$0\leqslant x_1-x_2<1$，又$1\leqslant x_3<2$，所以$x_1-x_2<x_3<x_1+x_2$，即选项 B 成立；
对于 C，因为$|x-1|+|x-3|=2$，当$x\leqslant 1$时，$-(x-1)-(x-3)=2$，解得$x=1$；当$x\geqslant 3$时，$(x-1)+(x-3)=2$，解得$x=3$；当$1<x<3$时$(x-1)-(x-3)=2$，即$2=2$恒成立，所以$1<x<3$；
综上可得$1\leqslant x\leqslant 3$，即$\{x\,|\,|x-1|+|x-3|=2\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，令$a=b=1,c=3$，显然$a+b<c$，不满足$a,b,c$为某一三角形的三边长，故选项 C 错误；
对于 D，因为$\log_2(3x-2)$，所以$3x-2>0$，解得$x>\frac{2}{3}$，所以$\{x|y=\log_2(3x-2)\}=\left\{x|x>\frac{2}{3}\right\}$，令$a=b=1,c=3$，显然$a+b<c$，不满足$a,b,c$为某一三角形的三边长，故选项 D 错误. 故选 B.

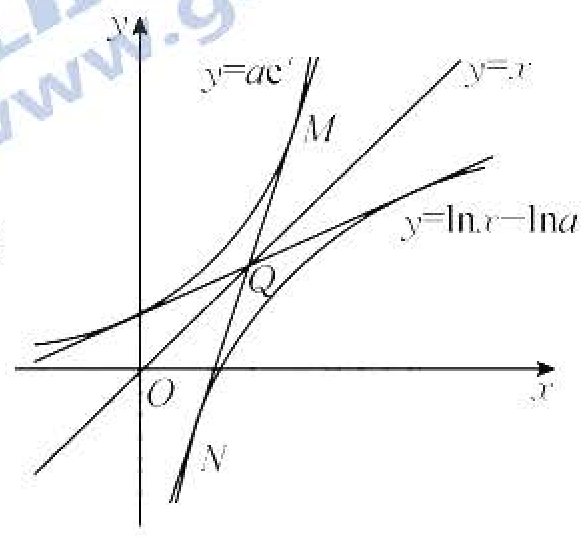
9. ACD　$\because am^2>bm^2\ \therefore m^2>0$，$\therefore a>b$，故选项 A 正确；
当$a=1,b=-1$，有$a>b$，但$a^{-1}>b^{-1}$，故选项 B 错误；
$\because a>b>0,m>0$，$\therefore\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{(a+m)b-a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{ab+bm-ab-am}{b(b+m)}=\frac{(b-a)m}{b(b+m)}<0$，故选项 C 正确；
若$a>b>0$，且$|\ln a|=|\ln b|$，$\therefore\frac{1}{b}=a$，且$a>1$，$\therefore 3a+b=3a+\frac{1}{a}$，设$f(x)=3x+\frac{1}{x}(x>1)$，$\because f'(x)=3-\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(a)>f(1)=4$，即$3a+b\in(4,+\infty)$，故选项 D 正确. 故选 ACD.

10. BD　当$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=0$时，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}+\sin 0$，所以 A 错误，B 正确；若$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，式子$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$无意义，所以 C 错误，D 正确. 故选 BD.

11. AC　$f(x)=\sin\omega x+a\cos\omega x=\sqrt{a^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$，$\tan\varphi=a$，因为$f(x)$在$x=\frac{\pi}{6}$处取得最大值，所以$\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$. 所以$\tan\varphi=\tan\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)}=a$，所以$\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{1}{a}$，因为$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，所以$\sqrt{a^2+1}\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，即$\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=\sqrt{\frac{3}{a^2+1}}$，所以$\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=$

$\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\omega}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\sqrt{\frac{3}{a^2+1}}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{a^2+1}}$.
又 $\sin^2\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{a^2+1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{a^2+1}}\right)^2=1$，解得 $a^2=3$，又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{1}{2}$，
$\tan\left(\frac{\pi\omega}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确，B 错误；所以 $\frac{\pi\omega}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=12k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\omega>0$，所以 $\omega\geq1$，故 C 正确；易验证，当 $\omega=13$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调，故 D 错误. 故选 AC.

12. ABC　如图，因为 $y=ae^x$ 与 $y=\ln x-\ln a$ 互为反函数，故两函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 l_1，l_2 关于 $y=x$ 对称，故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$，A 正确；由题意，$\alpha$，$\beta$ 均为锐角，$\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$，$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}\geq2$，B 正确；设 l_1 与两个函数图象分别切于 M，N 两点，$\angle OQN=\frac{\theta}{2}$，则 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，即 $\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{3}{4}$，解得 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$ 或 -3（舍去），故 $k_{MN}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\right)=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$. 易



求得曲线 $y=e^x$ 的斜率为 2 的切线方程为 $y=2x-2\ln2+2$，故曲线 $y=ae^x=e^{x+\ln a}$ 的斜率为 2 的切线方程为 $y=2(x+\ln a)-2\ln2+2$，$y=\ln x$ 的斜率为 2 的切线方程为 $y=2x-\ln2-1$，故曲线 $y=\ln x-\ln a$ 的斜率为 2 的切线方程为 $y=2x-\ln2-1-\ln a$. 所以 $-\ln2-1-\ln a=2\ln a-2\ln2+2$，则 $\ln a^3=\ln2-3$，则 $a^3=\frac{2}{e^3}$，C 正确；由图可知点 Q 必在第一象限，D 错误. 故选 ABC.

13. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　$|OP|=\sqrt{t^2+5}$，由 $\cos\alpha=\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{\sqrt{2}t}{4}$，解得 $t=\pm\sqrt{3}$. $\therefore\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

14. $\forall m\in\{x|-2<x<3\}$，使关于 x 的方程 $2x^2-m=0$ 无解　根据存在量词命题的否定为全称量词命题可得 $\neg p$：$\forall m\in\{x|-2<x<3\}$，使关于 x 的方程 $2x^2-m=0$ 无解.

15. $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$（答案不唯一）　$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\tan x+1}{\tan x-1}=-\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $-\frac{3\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 的一个单调减区间为 $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

16. 12　$3a^2+\frac{1}{ab-3b^2}=3a^2+\frac{3}{3b(a-3b)}\geq3a^2+\frac{3}{\left(\frac{a-3b+3b}{2}\right)^2}=3a^2+\frac{12}{a^2}\geq2\sqrt{3a^2\cdot\frac{12}{a^2}}=12$，当且仅当 $3a^2=\frac{12}{a^2}$，$a-3b=3b$ 时取"="，即 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{6}$ 时"="成立，所以 $3a^2+\frac{1}{ab-3b^2}$ 的最小值为 12.

17. 解：(1) 当 $a=9$ 时，$f(x)<0$，即 $2x^2-9x+4<0$，
整理，得 $(2x-1)(x-4)<0$，解得 $\frac{1}{2}<x<4$.
故所求不等式的解集为 $\left(\frac{1}{2},4\right)$. ………………………………………… 4 分
(2) $f(x)\geq0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，
即 $2x^2-ax+4\geq0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，
即 $a\leq2x+\frac{4}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leq\left(2x+\frac{4}{x}\right)_{\min}$. ………………………………………… 6 分
又 $2x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{2}$（当且仅当 $2x=\frac{4}{x}$ 即 $x=\sqrt{2}$ 时，取"="）.
所以 $a\leq4\sqrt{2}$. 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,4\sqrt{2}]$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，
所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. ………………………………………… 1 分
又因为 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，
所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$， ………………………………………… 3 分
所以 $\cos\beta=\cos[(\beta+\alpha)-\alpha]$ ………………………………………… 4 分

$=\cos(\beta+\alpha)\cos\alpha+\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha$ ………………………………………………………… 5分

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{63}{65}$. ………………………………………………………………………………………… 6分

(2)因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$， ………………………………………………… 8分

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$， ………………………………………………… 10分

所以 $\frac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-1}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}-1}=-\frac{5}{4}$. ………………………………………………… 12分

19. 解：(1)因为 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$，

所以 $g'(x)=-x^2+2x+a$. ………………………………………………………………………… 1分

又据题意知，当函数 $g(x)$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上单调递减时，

$-x^2+2x+a\leqslant 0$ 对 $\forall x\in[3,+\infty)$ 成立， ………………………………………………… 3分

所以 $a\leqslant x^2-2x$ 对 $\forall x\in[3,+\infty)$ 成立. ………………………………………………… 4分

又当 $x\in[3,+\infty)$ 时，$(x^2-2x)_{\min}=3$， ………………………………………………… 6分

所以 $a\leqslant 3$，即所求实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$. ………………………………………… 7分

(2)据题设知"p 真，q 假"或"p 假，q 真". ………………………………………………… 8分

据题设知，若 p 为真命题，则 $a>0$，且 $\frac{a}{-1}+1>0$，

所以 $0<a<1$. ………………………………………………………………………………… 9分

(ⅰ)当"p 真，q 假"时，$\begin{cases}0<a<1,\\a>3,\end{cases}$ 此时不等式组无解； ……………………………… 10分

(ⅱ)当"p 假，q 真"时，$\begin{cases}a\leqslant 0 \text{ 或 } a\geqslant 1,\\a\leqslant 3,\end{cases}$

所以 $a\leqslant 0$ 或 $1\leqslant a\leqslant 3$. ………………………………………………………………… 11分

综上，所求实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup[1,3]$. ………………………………………… 12分

20. (1)证明：由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

有 $f(x+1)=f(1-x)$， …………………………………………………………………………… 1分

即有 $f(-x)=f(x+2)$，

又函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$， ……………………………………… 3分

故 $f(x+2)=-f(x)$，

从而 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. ………………………………………………………………… 6分

(2)解：当 $x\in[-1,0)$ 时，$-x\in(0,1]$，$f(-x)=\log_2(-x+1)$， ……………………………………… 7分

由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，有 $f(0)=0$，故 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=-f(-x)=-\log_2(-x+1)$.

……………………………………………………………………………………………………… 9分

由 $x\in[-5,-4]$，得 $x+4\in[-1,0]$，$f(x+4)=-\log_2[-(x+4)+1]=-\log_2(-x-3)$，

由(1)得 $f(x)=f(x+4)$，从而，$x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-\log_2(-x-3)$. ………… 12分

21. 解：(1)因为 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 $\frac{2\pi}{|\omega|}=2\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=1$. ……………………………………………………………………… 1分

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，所以 $-\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

故 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. ……………………………………………………………………… 4分

(2)因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，所以直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴，

又 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$.

所以 $-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi$ ①，$\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$ ②，$k_1,k_2\in\mathbf{Z}$. ………………………………… 6分

②－①得 $\frac{\pi}{2}\omega=(k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2(k_2-k_1)+1$. ………………………………………… 7 分

因为 $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2n+1(n\in\mathbf{N})$，即 ω 为正奇数.

因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上单调，所以 $\frac{5\pi}{9}-\frac{7\pi}{18}=\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{T}{2}$，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}$，解得 $\omega\leqslant 6$. ………… 8 分

当 $\omega=5$ 时，$-\frac{5\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$. T 为 $f(x)$ 的最小正周期，

因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $t=5x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{79\pi}{36},\frac{109\pi}{36}\right)$，$g(t)=\sin t$.

$g(t)$ 在 $\left(\frac{79\pi}{36},\frac{5\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{5\pi}{2},\frac{109\pi}{36}\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上不单调，不符合题意；………………………………………………………… 9 分

当 $\omega=3$ 时，$-\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $t=3x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right)$，$g(t)=\sin t$.

$g(t)$ 在 $\left(\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上单调，符合题意；………………………………………………………… 10 分

当 $\omega=1$ 时，$-\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $t=x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{23\pi}{36},\frac{29\pi}{36}\right)$，$g(t)=\sin t$.

$g(t)$ 在 $\left(\frac{23\pi}{36},\frac{29\pi}{36}\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上单调，符合题意. ………………………………………………………… 11 分

综上，存在实数 ω，使得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{7\pi}{18},\frac{5\pi}{9}\right)$ 上单调，且 ω 的取值集合为 $\{1,3\}$. ……………………………… 12 分

22. 解：(1)依题意，$F(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，$F'(x)=2e^x\cos x$，……………………………………………… 1 分

令 $F'(x)>0$，得 $0<x<\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$；令 $F'(x)<0$，得 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，故 $F(x)$ 的单调增区间为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$；

单调减区间为 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. …………………………………………………………………………………… 4 分

(2)依题意，$\forall x\geqslant 0$，$f(x)+g(x)-2-ax\geqslant 0\Leftrightarrow h(x)=e^x+\sin x+\cos x-2-ax\geqslant 0$，

$h'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$，令 $\varphi(x)=e^x+\cos x-\sin x$，$x\geqslant 0$，则 $\varphi'(x)=e^x-\sin x-\cos x$，

令 $v(x)=e^x-x-1$，$x\geqslant 0$，则 $v'(x)=e^x-1\geqslant 0$，即函数 $v(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

于是得 $\forall x\in[0,+\infty)$，$v(x)\geqslant v(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，……………………………………………… 5 分

则有 $x\geqslant 0$，$\varphi'(x)\geqslant x+1-\sin x-\cos x\geqslant x-\sin x$，………………………………………………… 6 分

令 $u(x)=x-\sin x$，$x\geqslant 0$，有 $u'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，即函数 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $\forall x\in[0,+\infty)$，$u(x)\geqslant u(0)=0$，即 $x-\sin x\geqslant 0$，从而得 $\varphi'(x)\geqslant 0$，函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则有 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=2$，…………………………………………………………………………………………………… 7 分

显然当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，函数 $y=e^x$ 的值域为 $[1,+\infty)$，

于是得函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域为 $[2,+\infty)$.

当 $a\leqslant 2$ 时，$h'(x)=\varphi(x)-a\geqslant 0$，函数 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $\forall x\in[0,+\infty)$，$h(x)\geqslant h(0)=0$，则 $a\leqslant 2$；…………………………………………………… 9 分

当 $a>2$ 时，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h'(x_0)=0$，显然函数 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

即当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，则函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，与已知矛盾.

…… 11 分

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ……………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。