海淀区2023年高二年级学业水平调研

数　学

2023.07

数

本试卷共4页，共两大部分，19道小题，满分100分。考试时长90分钟。试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{-3, 0, 1, 2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0, 1\}$　（B）$\{0, 1, 2\}$　（C）$\{-3, 0, 1, 2\}$　（D）$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

（2）已知命题 p：$\exists x\leqslant 3$，$|x-2|\leqslant 1$，则 $\neg p$ 为

（A）$\exists x\leqslant 3$，$|x-2|>1$　（B）$\exists x>3$，$|x-2|\leqslant 1$

（C）$\forall x\leqslant 3$，$|x-2|>1$　（D）$\forall x>3$，$|x-2|>1$

（3）已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q>0$，$a_2+a_3=12$，$a_1\cdot a_5=81$，则 $a_5=$

（A）81　（B）27　（C）32　（D）16

（4）下列四个函数中，在区间 $[0, 1]$ 上的平均变化率最大的为

（A）$y=x$　（B）$y=e^x$　（C）$y=\sin x$　（D）$y=\dfrac{1}{x+1}$

（5）已知 $a<b$，则

（A）$a^2<b^2$　（B）$e^{-a}<e^{-b}$

（C）$\ln(|a|+1)<\ln(|b|+1)$　（D）$a|a|<b|b|$

（6）已知函数 $f(x)=x^2\cdot\sin x$，则 $f'(\dfrac{\pi}{2})$ 的值为

（A）0　（B）π　（C）$\dfrac{\pi^2}{4}$　（D）$-\dfrac{\pi^2}{4}$

（7）从A，B，C，D 4本不同的文学读物中选出3本分给甲、乙、丙3名学生（每人一本）．如果甲不得A读物，则不同的分法种数为

（A）24　（B）18　（C）6　（D）4

（8）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d，则"S_n 有最大值"是"$d<0$"的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

（9）学校要从 8 名候选人中选 4 名同学组成学生会．已知恰有 3 名候选人来自甲班，假设每名候选人都有相同的机会被选中，则甲班恰有 2 名同学被选中的概率为

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{3}{7}$　　（D）$\frac{4}{15}$

（10）已知函数 $f(x)=x^3+3x^2+bx+c$. 若函数 $g(x)=e^{-x}f(x)$ 有三个极值点 m，1，n，且 $m<1<n$，则 mn 的取值范围是

（A）$(-\infty, 1)$　　（B）$(-\infty, \frac{1}{4})$　　（C）$(-\infty, -1)$　　（D）$(-\infty, -2)$

第二部分（非选择题　共60分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

（11）在 $(1+3x)^4$ 的展开式中，x^2 的系数为_______．（用数字作答）

（12）不等式 $\frac{1-x}{1+x}<1$ 的解集是_______.

（13）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是_______.

（14）随着大数据时代的到来，越来越多的网络平台开始使用推荐系统来给用户提供更加个性化的服务．某公司在研发平台软件的推荐系统时发现，当收集的数据量为 $x(x\geqslant 2)$ 万条时，推荐系统的准确率约为 $p=\frac{x}{x+1}$，平台软件收入为 40000 p 元．已知每收集 1 万条数据，公司需要花费成本 100 元，当收集的数据量为_______万条时，该软件能获得最高收益.

（15）已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和是 S_n，$a_1=a$，且 $S_n=a_na_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$．出下列四个结论：

①$a_2=1$；

②$\{a_n\}$ 为递增数列；

③若 $\forall n\in N^*$，$a_{n+1}>a_n$，则 a 的取值范围是 $(0, 1)$；

④$\exists m\in N^*$，使得当 $k>m$ 时，总有 $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}<1+e^{-10}$.

其中所有正确结论的序号是_______.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 9 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $a_4=8$，$S_3=12$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n.

条件①：$b_1b_2b_3=8$；

条件②：$T_2=S_2$；

条件③：$T_6=9T_3$.

（17）（本小题 10 分）

某企业产品利润依据产品等级来确定：其中一等品、二等品、三等品的每一件产品的利润分别为 100 元、50 元、50 元. 为了解产品各等级的比例，检测员从流水线上随机抽取了 100 件产品进行等级检测，检测结果如下表：

产品等级	一等品	二等品	三等品
样本数量（件）	50	30	20

）若从流水线上随机抽取 2 件产品，估计 2 件产品中恰有 1 件一等品、1 件二等品的概率；

）若从流水线上随机抽取 3 件产品，记 X 为这 3 件产品中一等品的件数，Y 为这 3 件产品的利润总额.

①求 X 的分布列；

②直接写出 Y 的数学期望 EY.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（18）（本小题 11 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+a\ln x$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的零点个数；

（Ⅲ）若对任意的 $x\in[1,+\infty)$，都有 $f(x)\leqslant x$，求实数 a 的最大值.

（19）（本小题 10 分）

给定整数 $n\geqslant 2$，对于数列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 定义数列 B 如下：$b_1=\min\{a_1, a_2\}$，$b_2=\min\{a_2, a_3\}$，$\cdots$，$b_{n-1}=\min\{a_{n-1}, a_n\}$，$b_n=\min\{a_n, a_1\}$，其中 $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots$，x_k 这 k 个数中最小的数. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.

（Ⅰ）若数列 A 为① 1, 0, 0, 1；② 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，分别写出相应的数列 B；

（Ⅱ）求证：若 $T_n=S_n$，则有 $a_1=a_2=\cdots=a_n$；

（Ⅲ）若 $S_n=0$，常数 C_n 使得 $T_n\leqslant C_n\cdot\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 恒成立，求 C_n 的最大值.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

海淀区2023年高二年级学业水平调研

数学参考答案

2023.07

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）B　（2）C　（3）A　（4）B　（5）D

（6）B　（7）B　（8）B　（9）C　（10）D

二、填空题（共5小题，每小题4分，共20分）

（11）54　（12）$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　（13）$[-\frac{e}{2},+\infty)$

（14）19　（15）①③④

三、解答题（共4小题，共40分）

（16）（共9分）

解：（Ⅰ）因为$\{a_n\}$为等差数列，$S_3=12$，

所以$\frac{(a_1+a_3)\times 3}{2}=12$，即$a_1+a_3=8$．

所以$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=4$．

因为$a_4=8$，

所以$d=2$．

所以$a_n=a_2+(n-2)\times 2=4+2n-4=2n$．

（Ⅱ）**选择①③**

因为$\{b_n\}$为等比数列，$b_1b_2b_3=8$，

所以$b_2^3=8$，即$b_2=2$．

因为$T_6=9T_3$，

所以$q\neq 1$，$\frac{b_1(1-q^6)}{1-q}=9\frac{b_1(1-q^3)}{1-q}$．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以$1+q^3=9$.

所以$q=2$.

所以$b_n=2\times 2^{n-2}=2^{n-1}$.

所以$M_n=S_n+T_n$

$$=n(n+1)+\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$=n^2+n+2^n-1.$$

选择①②

因为$\{b_n\}$为等比数列，$b_1b_2b_3=8$，

所以$b_2^3=8$，即$b_2=2$.

因为$T_2=S_2$，

所以$b_1+2=2+4$，即$b_1=4$.

所以$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{2}$.

所以$b_n=4\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^{n-3}}$.

所以$M_n=S_n+T_n$

$$=n(n+1)+\frac{4\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=n^2+n+8-\frac{1}{2^{n-3}}.$$

选择②③

因为$\{b_n\}$为等比数列，$T_6=9T_3$，

所以$q\neq 1$，$\frac{b_1(1-q^6)}{1-q}=9\frac{b_1(1-q^3)}{1-q}$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以$1+q^3=9$.

所以$q=2$.

因为$T_2=S_2$，

所以$b_1+2=2+4$，即$b_1=4$.

所以$b_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$.

所以$M_n=S_n+T_n$

$$=n(n+1)+\frac{4\times(1-2^n)}{1-2}$$

$$=n^2+n+2^{n+2}-4.$$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

（17）（共 10 分）

解：（Ⅰ）记 $A_i\left(i=1,2\right)$ 表示“第 i 件产品是一等品”，$B_i\left(i=1,2\right)$ 表示“第 i 件产品是二等品”，C 表示“2 件产品中恰有 1 件一等品、1 件二等品”，则 $C=A_1B_2+A_2B_1$．

用频率估计概率，$P\left(A_i\right)=\frac{1}{2},i=1,2$，$P\left(B_i\right)=\frac{3}{10},i=1,2$．

$P(C)=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$．

（Ⅱ）由题意，X 的所有可能取值为 0，1，2，3．

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

（Ⅲ）225．

（18）（共 11 分）

解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}+2\ln x$．

所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$．

所以 $f'(1)=1$．

因为 $f(1)=1$，

所以 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$．令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$．

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{2})=2+2\ln\frac{1}{2}=2(1-\ln 2)>0$.

所以 对 $\forall x\in(0,+\infty)$， $f(x)>0$.

所以 函数 $f(x)$ 的零点个数为 0.

（III）设 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+a\ln x-x$，则 $g'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$.

① 当 $a>2$ 时， $-x^2+ax-1=0$ 有两个实数根，设为 x_1， x_2.

因为 $x_1+x_2=a>0$， $x_1\cdot x_2=1>0$，所以 不妨设 $0<x_1<1<x_2$.

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(1,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大	↘

所以 $g(x_2)>g(1)=0$，不合题意.

② 当 $a=2$ 时， $g'(x)=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\le 0$.

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数.

所以 $g(x)\le g(1)=0$，即 $f(x)\le x$ 恒成立.

综上所述， a 的最大值为 2.

（19）（共 10 分）

解：（Ⅰ）①$0,0,0,1$；②$1,2,3,4,5,6,1$.

（Ⅱ）由条件知 $b_i\le a_i, i=1,2,\cdots,n$. 所以 $T_n\le S_n$， 等号成立当且仅当 $b_i=a_i, i=1,2,\cdots,n$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_1$.

所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

（III）由题意，不妨设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

若 $a_1 \ge 0$，因为 $S_n = 0$.

所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. 显然 C_n 取任意实数均满足条件.

下面设 $a_1 < 0$，则 $T_n \le C_n \cdot \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的充分必要条件是 $C_n \le \dfrac{T_n}{a_1}$.

假设 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_j, 2 \le j \le n$.

因为 $S_n = 0$,

所以 $a_j > 0$.

当 $2 \le j < n$ 时，有

$b_1 = a_1, b_2 \le a_2, \cdots, b_{j-1} \le a_{j-1}, b_j \le a_{j+1}, b_{j+1} \le a_{j+2}, \cdots, b_{n-1} \le a_n, b_n = a_1$.

所以 $T_n \le S_n - a_j + a_1 = a_1 - a_j$.

当 $j = n$ 时，有 $b_1 = a_1, b_2 \le a_2, \cdots, b_{n-1} \le a_{n-1}, b_n = a_1$,

仍然有 $T_n \le S_n - a_j + a_1 = a_1 - a_j$ 成立.

所以 $\dfrac{T_n}{a_1} \ge \dfrac{a_1 - a_j}{a_1} = 1 - \dfrac{a_j}{a_1}$.

因为 $a_1 + (n-1)a_j \ge S_n = 0$,

所以 $\dfrac{a_j}{a_1} \le -\dfrac{1}{n-1}$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\dfrac{T_n}{a_1} \ge \dfrac{n}{n-1}$，取 $a_1 = 1-n$，$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$，就有 $\dfrac{T_n}{a_1} = \dfrac{n}{n-1}$.

所以 $C_n \le \dfrac{n}{n-1}$.

所以 C_n 的最大值为 $\dfrac{n}{n-1}$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二→期末试题**>， 进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！