



# 平谷区高三年级二模

## 数学试题

2020.5

注意事项	<p>1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 6 页，共 150 分，考试时间为 120 分钟。</p> <p>2. 试题所有答案必须书写在答题纸上，在试卷上作答无效。</p> <p>3. 考试结束后，将答题纸交回，试卷按学校要求保存好。</p>
------	---

### 第 I 卷 选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 < 1\}$ , 则  $A \cup B =$

- A.  $\{-1, 1\}$
- B.  $\{-1, 0, 1\}$
- C.  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
- D.  $\{x | x \leq 1\}$

2. 若角  $\alpha$  的终边在第二象限，则下列三角函数值中大于零的是

- A.  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$
- B.  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$
- C.  $\sin(\pi + \alpha)$
- D.  $\sin(\pi - \alpha)$

3. 在下列函数中，值域为  $R$  的偶函数是

- A.  $f(x) = \sqrt{x}$
- B.  $f(x) = \ln|x|$
- C.  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
- D.  $f(x) = x \cos x$

4. 若等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_{13} = 0$ ,  $a_3 + a_4 = 21$ , 则  $S_7$  的值为

- A. 21
- B. 63
- C. 13
- D. 84

5. 若抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上任意一点到焦点的距离恒大于 1，则  $p$  的取值范围是

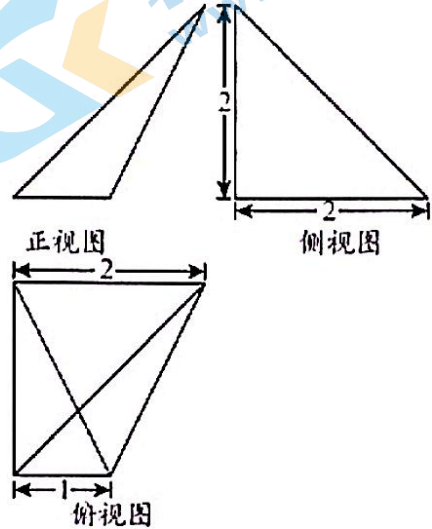
- A.  $p < 1$       B.  $p > 1$       C.  $p < 2$       D.  $p > 2$

6. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x > y > 0$ , 则

- A.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$       B.  $\cos x - \cos y < 0$   
 C.  $(\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^y < 0$       D.  $\ln(x - y) > 0$

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为

- A.  $\frac{2}{3}$   
 B.  $\frac{4}{3}$   
 C. 2  
 D.  $\frac{8}{3}$



8. 设  $a, b$  是向量, “ $|a| = |a + b|$ ” 是 “ $|b| = 0$ ” 的

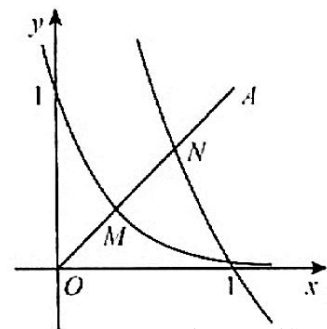
- A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件

9. 溶液酸碱度是通过  $pH$  计算的,  $pH$  的计算公式为  $pH = -\lg [H^+]$ , 其中  $[H^+]$  表示溶液中氢离子的浓度, 单位是摩尔/升, 若人体胃酸中氢离子的浓度为  $2.5 \times 10^{-2}$  摩尔/升, 则胃酸的  $pH$  是 (参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3010$ )

- A. 1.398      B. 1.204      C. 1.602      D. 2.602

10. 如图, 点  $O$  为坐标原点, 点  $A(1,1)$ , 若函数  $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  及  $y = \log_b x (b > 0, \text{且 } b \neq 1)$  的图象与线段  $OA$  分别交于点  $M, N$ , 且  $M, N$  恰好是线段  $OA$  的两个三等分点, 则  $a, b$  满足

- A.  $a < b < 1$   
 B.  $b < a < 1$



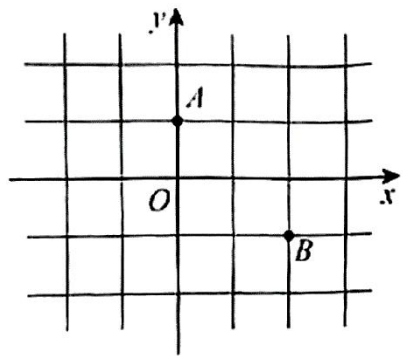
C.  $b > a > 1$

D.  $a > b > 1$

第 II 卷 非选择题 (共 110 分)

二、填空题共 5 题, 每题 5 分, 共 25 分。

11. 如图所示, 在复平面内, 网格中的每个小正方形的边长都为 1, 点  $A, B$  对应的复数分别是  $z_1, z_2$ , 则  $\frac{z_2}{z_1} =$



12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \frac{\pi}{4}$ ,  $a^2 + b^2 - c^2 = ab, c = 3$ , 则  $\angle C =$  \_\_\_\_\_;  $a =$  \_\_\_\_\_。

13. 矩形  $ABCD$  中,  $AB = 2, BC = 1, O$  为  $AB$  的中点, 当点  $P$  在  $BC$  边上时,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$  的值为 \_\_\_\_\_; 当点  $P$  沿着  $BC, CD$  与  $DA$  边运动时,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

14. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \cos x$ , 给出下列结论:

- ①  $f(x)$  在  $(0, \pi]$  上有最小值, 无最大值;
- ② 设  $F(x) = f(x) - f(-x)$ , 则  $F(x)$  为偶函数;
- ③  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  上有两个零点

其中正确结论的序号为 \_\_\_\_\_。(写出所有正确结论的序号)

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求。全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分。

15. 地铁某换乘站设有编号为  $A, B, C, D, E$  的五个安全出口, 若同时开放其中的两个安全出口, 疏散 1000 名乘客所需的时间如下:

安全出口编号	$A, B$	$B, C$	$C, D$	$D, E$	$A, E$
疏散乘客时间 (s)	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是\_\_\_\_\_。

三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本题 14 分)

已知函数  $f(x) = 2\cos\omega x \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求  $f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$  的值域。

从①若  $|f(x_1) - f(x_2)| = 2, |x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{2}$ ;

②  $f(x)$  两条相邻对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ ;

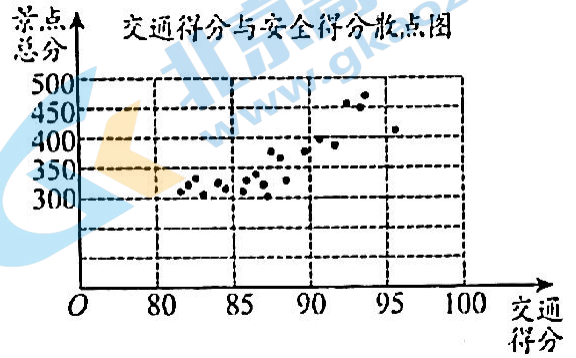
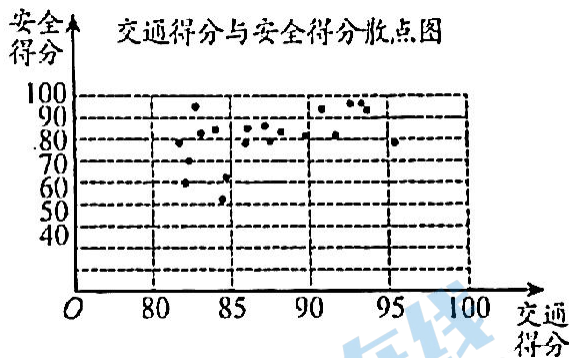
③若  $f(x_1) = f(x_2) = 0, |x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{2}$ ;

这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

17. (本题 14 分)

某市旅游管理部门为提升该市 26 个旅游景点的服务质量，对该市 26 个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分，每项评分最低分 0 分，最高分 100 分，每个景点总分为这五项得分之和，根据考核评分结果，绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如下：



请根据图中所提供的信息，完成下列问题：

(I) 若从交通得分前 6 名的景点中任取 2 个，求其安全得分都大于 90 分的概率；

(II) 若从景点总分排名前 6 名的景点中任取 3 个，记安全得分不大于 90 分的景点个数为  $\xi$ ，求随机变量  $\xi$  的分布列和数学期望；

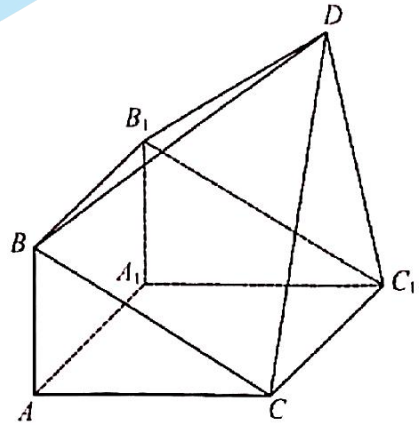
(III) 记该市 26 个景点的交通平均得分为  $\bar{x}_1$ , 安全平均得分为  $\bar{x}_2$ , 写出  $\bar{x}_1$  和  $\bar{x}_2$  的大小关系? (只写出结果)

18. (本题 14 分)

如图, 由直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  和四棱锥  $D - BB_1C_1C$  构成的几何体中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = BB_1 = 2$ ,  $C_1D = CD = \sqrt{5}$ , 平面  $CC_1D \perp$  平面  $ACC_1A_1$ 。

(I) 求证:  $AC \perp DC_1$ ;

(II) 在线段  $BC$  上 (含端点) 是否存在点  $P$ , 使直线  $DP$  与平面  $DBB_1$  所成的角为  $\frac{\pi}{3}$ ? 若存在, 求  $\frac{BP}{BC}$  的值, 若不存在, 说明理由。



19. (本题 15 分)

已知函数  $f(x) = x \sin x + a \cos x + x, a \in \mathbb{R}$

(I) 当  $a = -1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 当  $a = 2$  时, 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值和最小值;

(III) 当  $a > 2$  时, 若方程  $f(x) - 3 = 0$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上有唯一解, 求  $a$  的取值范围。

20. (本题 14 分)

已知点  $P(1, \frac{3}{2})$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上,  $F(1, 0)$  是椭圆的一个焦点。

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 椭圆  $C$  上不与  $P$  点重合的两点  $D, E$  关于原点  $O$  对称, 直线  $PD, PE$  分别交  $y$  轴于  $M, N$  两点, 求证: 以  $MN$  为直径的圆被直线  $y = \frac{3}{2}$  截得的弦长是定值。

21. (本题 14 分)

已知项数为  $m(m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2)$  的数列  $\{a_n\}$  满足如下条件: ①  $a_n \in \mathbb{N}^*(n = 1, 2, \dots, m)$ ;

②  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ . 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_m)}{m-1} \in \mathbb{N}^*$ , 其中  $n = 1, 2, \dots, m$  则称  $\{b_n\}$  为  $\{a_n\}$  的“伴随数列”。

(I) 数列 1, 3, 5, 7, 9 是否存在“伴随数列”, 若存在, 写出其“伴随数列”; 若不存在, 请说明理由;

(II) 若  $\{b_n\}$  为  $\{a_n\}$  的“伴随数列”, 证明:  $b_1 > b_2 > \dots > b_m$ ;

(III) 已知数列  $\{a_n\}$  存在“伴随数列”  $\{b_n\}$ , 且  $a_1 = 1, a_m = 2049$ , 求  $m$  的最大值。





# 关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（[www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。  
北京高考在线官方网站：[www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)  
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。