

文科数学

注意事项:

1. 答题前,考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、准考证号用 0.5 毫米黑色签字笔填写清楚,考生考试条码由监考老师粘贴在答题卡上的“条码粘贴处”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上,如需改动,用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案;非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答,超出答题区域答题的答案无效;在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

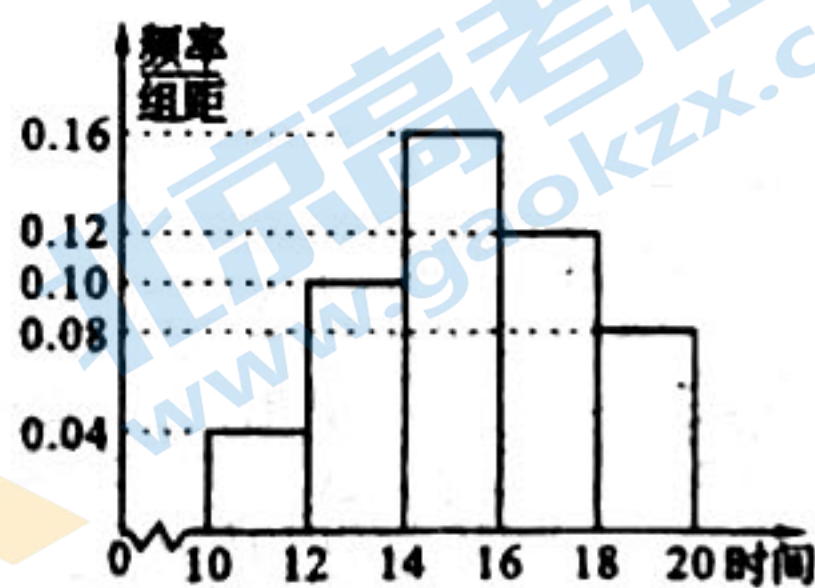
1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x-1}{x+1} \leq 1\right\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-2, -1)$ B. $[-1, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-2, 1)$

2. 已知复数 z 满足 $z(3+4i) = -1+2i$, 则 $z =$

- A. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ B. $\frac{1}{5} + \frac{2}{25}i$ C. $-\frac{11}{25} + \frac{2}{5}i$ D. $-\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

3. 某部门调查了 200 名学生每周的课外活动时间(单位:h), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中课外活动时间的范围是 $[10, 20]$, 并分成 $[10, 12)$, $[12, 14)$, $[14, 16)$, $[16, 18)$, $[18, 20]$ 五组. 根据直方图, 判断这 200 名学生中每周的课外活动时间不少于 14 h 的人数是



- A. 56 B. 80 C. 144 D. 184

4. 已知 $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

5. “ $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ”是“直线 $y = k(x+2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 曲线 $y = \ln x + 2\sqrt{x}$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为

- A. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ B. $y = 2x - 4$ C. $y = 3x - 1$ D. $y = 2x$

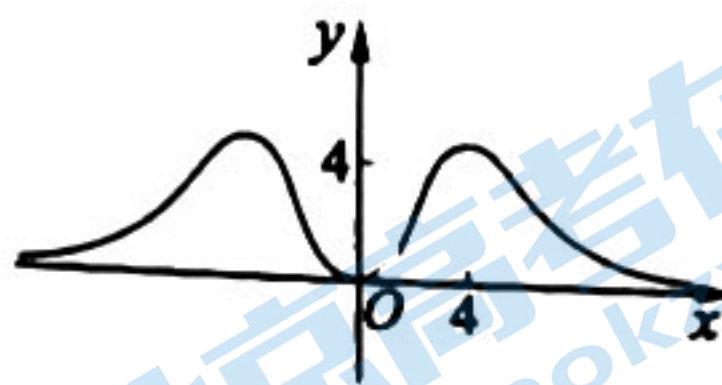
7. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可以为

A. $f(x) = \frac{x^4}{e^x + e^{-x}}$

B. $f(x) = \frac{x^3}{e^x + e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}}$

D. $f(x) = \frac{x^4}{e^x - e^{-x}}$



8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知异面直线 A_1C 与 AD , A_1C 与 AB 所成角的大小分别为 60° 和 45° , 则直线 B_1D 和平面 A_1BC 所成的角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

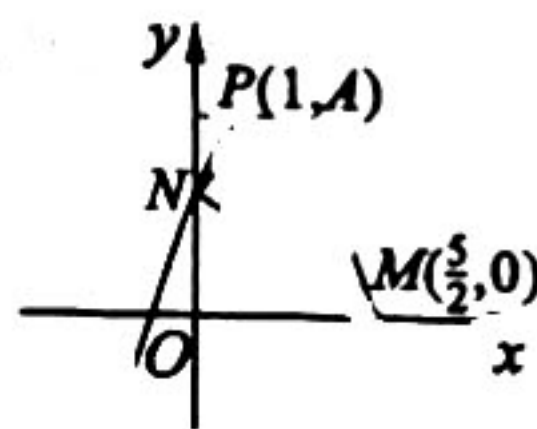
9. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示, 图象与 x 轴的交点为 $M(\frac{5}{2}, 0)$, 与 y 轴的交点为 N , 最高点 $P(1, A)$, 且满足 $NM \perp NP$, 则 $A =$

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{5}$

D. 10



10. 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 直线 $x - y + 3 = 0$ 与 C 交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF$ 的面积为

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

11. 已知 $a = 2\log_2 e, b = \frac{3}{\ln 3}$ (e 为自然对数的底数), 则 a, b, e 的大小关系为 ζ

A. $b < e < a$

B. $b < a < e$

C. $e < a < b$

D. $e < b < a$

12. 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 顶点均在半径为 2 的球面上, 则该四棱锥体积的最大值为

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

B. 4

C. $\frac{64\sqrt{3}}{27}$

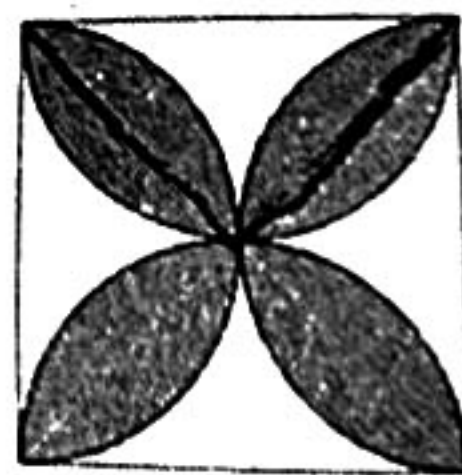
D. 8

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $a = (-3, 1), b = (4, 2)$, 则 a 与 b 的夹角为

14. 已知双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $A(2, 3)$ 是 E 上一点, 直线 AF_1 与 E 的另一个交点为 B , 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 .

15. 四叶草也被称为幸运草、幸福图, 其形状被广泛用于窗户、壁纸、地板等装修材料的图案中. 如图所示, 正方形地板上的四叶草图边界所在的半圆都以正方形的边长为直径. 随机抛掷一粒小豆在这块正方形地板上, 则小豆落在四叶草图(图中阴影部分)上的概率为 .



16. 若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 外接圆面积的 $\frac{1}{3}$, 则 $2\sin A \cos(B - C) + \sin 2A =$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性，某学校对学生是否经常锻炼的情况进行了调查。从本校学生中随机选取了 800 名学生进行调查了解，并将调查结果(“经常”或“不经常”)制成下表所示的列联表：

性别	不经常	经常	合计
女生	200	300	500
男生	150	150	300
合计	350	450	800

(1)通过计算判断，有没有 99% 的把握认为性别因素与学生锻炼的经常性有关系？

(2)将频率视作概率。若该学校有 4000 名学生，估计该校经常锻炼的学生人数。

附表及公式：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

$$\text{其中 } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a + b + c + d.$$

18. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 2, b_3 = a_7 = a_2 + a_4$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

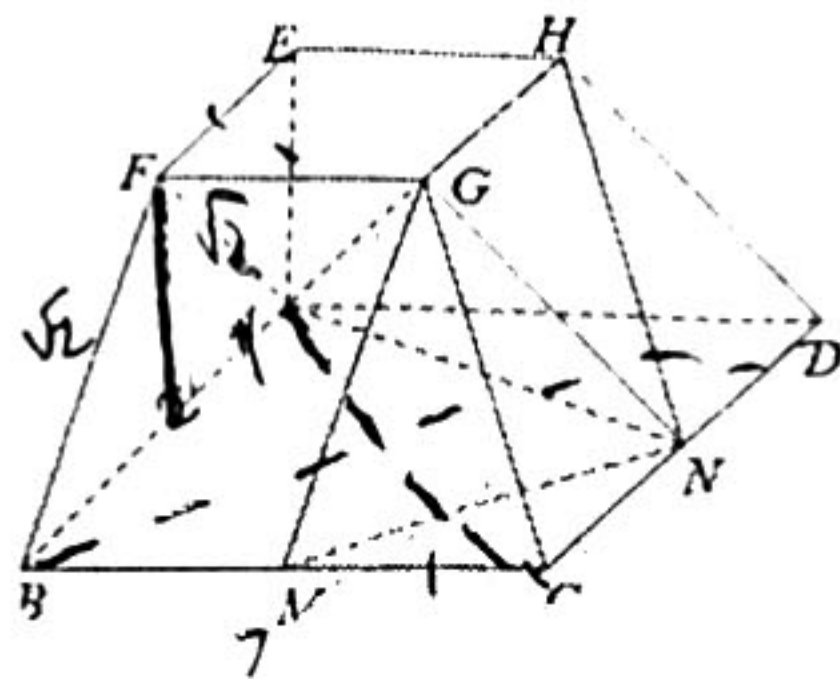
(2)记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，比较 S_{20} 与 T_7 的大小。

19. (12 分)

如图，四棱台 $ABCD - EFGH$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，点 M, N 分别为棱 BC, CD 的中点， $CG \perp MN$ ， $BF = \sqrt{2}$ ， $AE = EF = 1$ ， $AB = 2$ 。

(1)证明：平面 $ABFE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2)当 $MN = \sqrt{2}$ 时，求多面体 $ABMN - EFGH$ 的体积。



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 是 C 的顶点, 点 M 是第一象限内的动点, 已知 MA, MB 的斜率之比为 $1:3$.

(1) 证明: 点 M 在一条定直线上;

(2) 设 MA, MB 与椭圆 C 分别交于另外的两点 P, Q , 证明直线 PQ 过定点.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - a(x^2 - 1) + x$.

(1) 若 $f(x)$ 单调递减, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_2 > 2x_1$, 证明: $e^6 x_1 x_2^2 > 32$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 $A(-1, 0)$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数),

以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta - \sin\theta) = -1$.

(1) 写出曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 设点 M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 l 与 C_1 是否有公共点.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

设函数 $f(x) = |2x - 2| + |x + 2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 6 - x$;

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b, c 满足 $a + b + c = T$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{3}$.

文科数学答案解析及评分标准

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】C

【考查意图】本小题通过设置数学情境,设计解分式不等式与交集运算,主要考查解分式不等式,集合的交集运算等基础知识;考查运算求解能力。

【解析】由 $\frac{2x-1}{x+1} \leq 1$ 等价于 $\frac{2x-1-x-1}{x+1} \leq 0$ 即 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$, 解得 $-1 < x \leq 2$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 < x < 1\} \cap \{x | -1 < x \leq 2\} = \{x | -1 < x < 1\}$.

2. 【答案】A

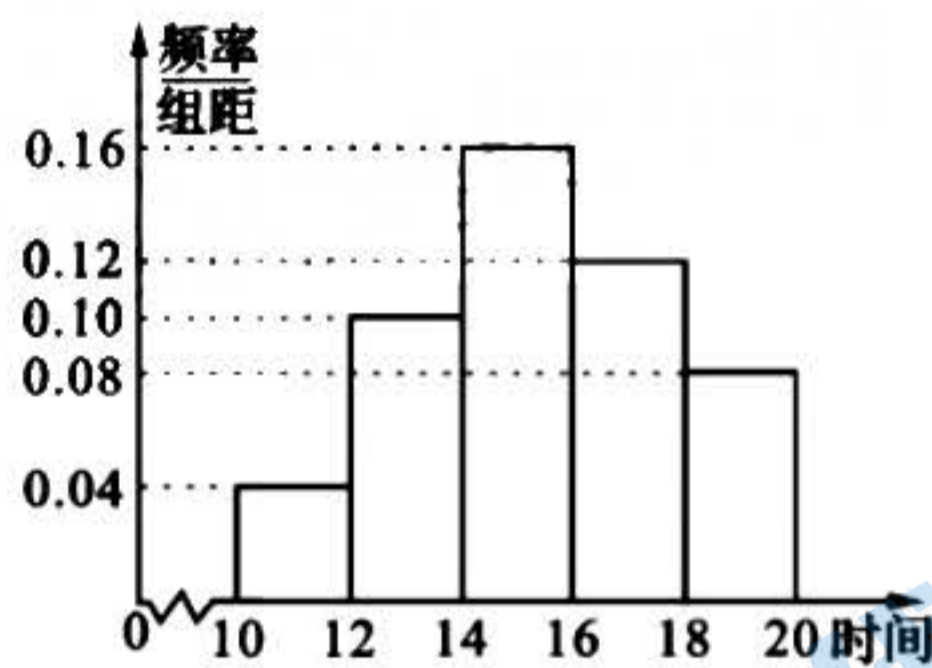
【考查意图】本小题通过设置复数乘法情境,设计复数的除法运算,主要考查复数概念,共轭复数与复数的除法法则等基础知识;考查运算求解能力。

【解析】由题意得 $z = \frac{-1+2i}{3+4i} = \frac{(-1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

3. 【答案】C

【考查意图】本小题课外活动时间调查的实际情境,设计统计图表识别和运算问题,主要考查直方图概率计算等基础知识;考查运算求解能力。

【解析】设所求人数 $N = 2 \times (0.16 + 0.12 + 0.08) \times 200 = 144$, 故选 C.



4. 【答案】B

【考查意图】本小题设置三角恒等变换情境,主要考查同角间的三角函数关系,二倍角公式等基础知识;考查运算求解能力,逻辑推理素养。

【解析】由 $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 两边平方得, $1 - \sin \alpha = \frac{1}{5}$, 从而 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

5. 【答案】A

【考查意图】本小题设置课程学习情境,主要考查直线与圆的位置关系,充分条件与必要条件等基础知识,考查数学运算素养和逻辑推理素养。

【解析】直线 $y = k(x+2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 “ $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ” 是 “直线 $y = k(x+2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切” 的充分不必要条件。

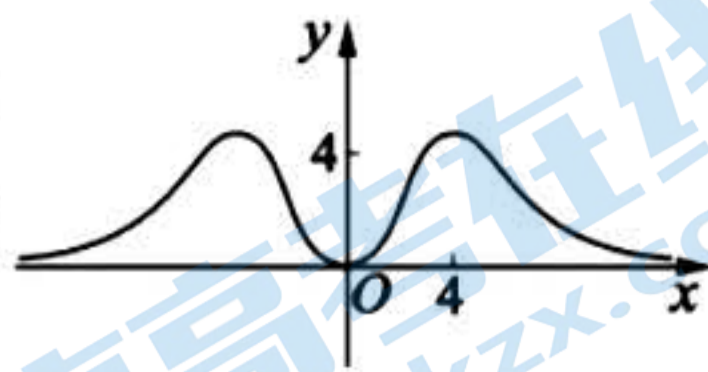
6. 【答案】D

【考查意图】本小题通过设置曲线切线题情境,设计导数几何意义问题,主要考查求导公式、直线方程、导数几何意义等基础知识;考查运算求解能力,数学运算素养。

【解析】由题可知,切点坐标为 $(1, 2)$, 又 $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则切线斜率 $k = y'|_{x=1} = 2$, 故切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x$.

7. 【答案】A

【考查意图】本小题通过设置函数图象情境,设计与函数奇偶性、单调性等性质相关的问题,主要考查函数性质综合应用;考查推理论证能力,直观想象、逻辑推理素养。



【解析】由图象的对称性可知,函数 $f(x)$ 可为偶函数, B, D 中的函数为奇函数, 不符合题意; A, C 中的函数满足, 对于 C, $f(4) = \frac{4^2}{e^4 + e^{-4}} \leq \frac{16}{e^4} < 1$, 不符合题意, 故选 A.

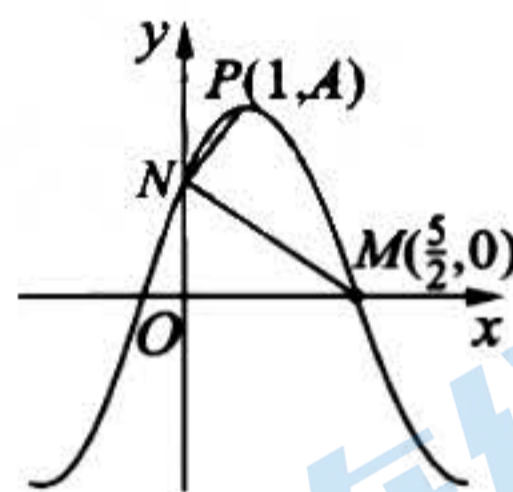
8. 【答案】A

【考查意图】本小题设置课程学习情境,考查线线角和线面角的表示和计算,主要考查空间想象能力,数据分析和数学运算素养。

【解析】设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 则 $A_1C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 由于 $AD \parallel BC$, 所以异面直线 A_1C 与 AD 所成角为 $\angle A_1CB = 60^\circ$, 从而 $A_1C = 2b$, 由于 $AB \parallel CD$, 所以异面直线 A_1C 与 AB 所成角为 $\angle A_1CD = 45^\circ$, 从而 $A_1C = \sqrt{2}a$, 所以 $c = b, a = \sqrt{2}b$, 所以 $A_1B = \sqrt{5}b, B_1D = 2b$, 故 $d_{B_1D-A_1BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 直线 B_1D 和平面 A_1BC 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 从而直线 B_1D 和平面 A_1BC 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

9. 【答案】B

【考查意图】本小题通过设置正弦型函数图象情境,设计两弦互相垂直问题,主要考查正弦函数的解析式,特殊角的三角函数值等必备知识;考查运算求解能力,逻辑推理能力,数形结合思想,直观想象素养。



【解析】若 $f(x)$ 的周期为 T , 由题意有 $\frac{T}{4} = x_M - x_P = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, 所以 $T = 6$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 由 $\frac{\pi}{3} \times \frac{5}{2} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 即 $f(x) = A \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$, 所以 $f(x)$ 与 y 轴的交点 $N(0, \frac{A}{2})$, 由 $NM \perp NP$, 则 $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = (\frac{5}{2}, -\frac{A}{2}) \cdot (1, \frac{A}{2}) = \frac{5}{2} - \frac{A^2}{4} = 0$, 解得 $A = \pm\sqrt{10}$ (舍负).

10. 【答案】B.

【考查意图】本小题设置课程学习情境,主要考查直线与抛物线的位置关系,三角形的面积计算等基础知识,考查数学运算素养和逻辑推理素养。

【解析】不妨设 A 在上方, 直线与抛物线联立得 $A(6, 9), B(-2, 1)$, 而 $F(0, 1)$, 从而 $|BF| = 2$, 易知点 A 到直线 BF 的距离为 8, 则 $\triangle ABF$ 的面积为 8.

11. 【答案】D

【考查意图】本小题通过设置对数式大小探索性情境,设计函数与导数应用问题,主要考查利用导数研究函数性质等基础知识;考查推理论证、运算求解等数学能力,数学抽象、逻辑推理素养。

【解析】设函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. 所以, 当 $x \geq e$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 故函数 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增. 又 $a = 2 \log_2 e = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4), b = \frac{3}{\ln 3} = f(3), e < 3 <$

4, 所以 $f(e) < f(3) < f(4)$, 故 $e < b < a$.

12. 【答案】C

【考查意图】本小题设置课程学习情境, 设计四棱锥和球的组合体, 分析数据的相关关系, 并计算, 主要考查空间想象能力和数学运算素养.

【解析】设正方形 $ABCD$ 的外接圆的半径为 r , 球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d , 则 $d^2 + r^2 = 4$, 且正方形 $ABCD$ 的面积为 $2r^2$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3}(2r^2) \cdot (2d) = \frac{4}{3}d(4-d^2)$, 设 $f(x) = x(4-x^2)$, 则 $f'(x) = 4-3x^2$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 单增, $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$ 单减, 从而 $f(x)_{\max} = f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$, 于是 $V = \frac{4}{3}f(d) \leq \frac{64\sqrt{3}}{27}$.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 【答案】 $\frac{3\pi}{4}$

【考查意图】本小题通过设置数学情境, 设计两个已知向量求夹角问题, 主要考查求两个向量的夹角公式, 特殊角的三角函数值等必备知识; 考查运算求解能力, 数形结合思想.

【解析】设向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 α , 则 $\cos\alpha = \frac{(-3, 1) \cdot (4, 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

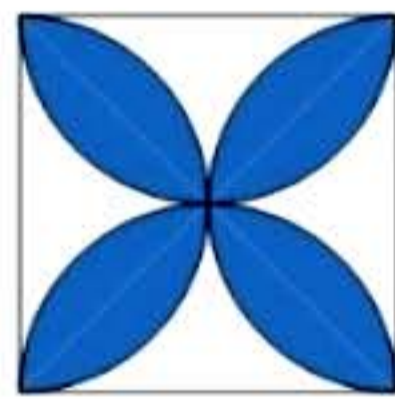
14. 【答案】10

【考查意图】本题设置数学情境, 设计综合性问题, 主要考查双曲线的定义及标准方程, 双曲线的几何性质等必备知识, 考查转化与化归的思想方法, 以及逻辑推理与数学运算等核心素养.

【解析】由题意, 点 B 在双曲线 E 的左支上, 根据双曲线的定义, $|BF| - |BF_1| = 2$, $|AF_1| - |AF| = 2$, 从而 $|BF| = 2 + |BF_1|$, $|AB| = |AF_1| - |BF_1| = |AF| + 2 - |BF_1| = 5 - |BF_1|$, 故 $|BF| + |AB| = 7$, 所以 $\triangle ABF$ 的周长 $= |BF| + |AB| + |AF| = 7 + 3 = 10$, 故答案为: 10.

15. 【答案】 $\frac{\pi}{2} - 1$

【考查意图】本小题通过设置四叶草生活情境, 设计几何概型问题, 主要考查阴影部分求面积, 几何概型等必备知识; 考查运算求解能力, 逻辑思维能力, 数学建模能力, 数学抽象和直观想象素养.



【解析】不妨设正方形的边长为 2 个单位, 则图中阴影部分的面积为两个圆的面积减去一个正方形的面积, 即 $2\pi - 4$, 根据几何概型, 小豆落在四叶草图(图中阴影部分)上的概率为 $P = \frac{2\pi - 4}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$.

16. 【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【考查意图】本小题通过设置三角形与外接圆面积情境, 设计正弦定理与两角和差的正弦公式应用问题, 主要考查三角形面积公式, 圆的面积, 正弦定理, 两角和差的正弦公式等必备知识; 考查运算求解能力, 逻辑思维能力, 数学应用性与创新性.

【解析】因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\odot O}$, 所以 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{3}\pi R^2$, 由正弦定理得 $a = 2R\sin A$, $b =$

$2R\sin B$, 所以 $\frac{1}{2} \times 2R\sin A \times 2R\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{3} \pi R^2$, 所以 $\sin A \sin B \sin C = \frac{\pi}{6}$, 又 $2\sin A \cos(B-C) + \sin 2A = 2\sin A [\cos(B-C) - \cos(B+C)] = 4\sin A \sin B \sin C = 4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

【考查意图】本小题学校体育锻炼情况为情境, 设计独立性检验等问题, 考查列联表、卡方分布、概率等基础知识; 考查统计与概率思想, 数学运算、数据分析等素养。

【解析】(1)由题,

$$\text{有 } K^2 = \frac{800 \times (200 \times 150 - 150 \times 300)^2}{350 \times 450 \times 500 \times 300} = \frac{160}{21} \approx 7.619 > 6.635, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因此, 有 99% 的把握认为性别因素与学生锻炼的经常性有关系. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(2)由图表可知, 样本数据中, 经常锻炼的学生人数为 450, 频率为 $\frac{450}{800} = \frac{9}{16}$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

将频率视作概率, 则在该校随机抽取一名学生, 抽取到经常锻炼的学生的概率为 $\frac{9}{16}$,

则该校 4000 名学生中, 经常锻炼的学生人数的估计值为 $\frac{9}{16} \times 4000 = 2250$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. (12 分)

【考查意图】本小题通过设置等差等比数列情境, 设计数列通项与前 n 项和问题, 主要考查等差数列, 等比数列的通项公式, 前 n 项和公式, 方程与不等式等必备知识; 考查运算求解能力, 逻辑推理能力, 数学应用与数学探究意识。

【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 正项等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

由 $a_1 = b_1 = 2, b_3 = a_7 = a_2 + a_4$.

即 $2q^2 = 2 + 6d = 2 + d + 2 + 3d$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

解得 $d = 1, q = 2$,

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + 1$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2)由(1)得 $S_{20} = \frac{20 \times (2 + 21)}{2} = 230$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$T_7 = \frac{2(1 - 2^7)}{1 - 2} = 2^8 - 2 = 254, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以, $T_7 > S_{20}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (12 分)

【考查意图】本小题设置课程学习情境, 设计空间位置关系的证明, 计算几何体的体积。准确认识线线共面垂直和异面垂直的判定方式, 有效进行线线垂直和线面垂直的转化; 几何体的切割和补形求几何体积。主要考查空间想象能力和数学运算素养。

【答案】(1)略；(2) $\frac{11}{6}$

【解析】(1)因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC \perp BD$.

因为 M, N 是 BC, AD 中点，所以 $MN \parallel BD$ ，故 $AC \perp MN$.

又因为 $CG \perp MN$ ，且多面体 $ABCD - EFGH$ 是四棱台，所以 A, C, G, E 共面，所以 $MN \perp$ 面 $ACGE$ ，又因为 $AE \subseteq$ 面 $ACGE$ ，所以 $AE \perp MN$3分

又因为多面体 $ABCD - EFGH$ 是四棱台，所以四边形 $AEFB$ 是梯形.

取点 K 为线段 AB 的中点，连接 FK .

因为 $AK \parallel EF, AK = EF$ ，所以四边形 $AKFE$ 是平行四边形，故 $AE \parallel KF$.

在 $\triangle FKB$ 中， $BF^2 = BK^2 + FK^2$ ，故 $FK \perp AB$ ，即 $AE \perp AB$ ，

因为 MN 与 AB 是相交直线，所以 $AE \perp$ 面 $ABCD$ ，

而 $AE \subseteq$ 面 $ABFE$ ，所以面 $ABFE \perp$ 面 $ABCD$6分

(2) 当 $MN = \sqrt{2}$ 时， $BD = 2MN = 2\sqrt{2} = \sqrt{AB^2 + AD^2}$ ，所以 $\triangle ABD$ 为直角三角形，故 $AB \perp AD$ ，菱形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形.

由 (1) 知， $AE \perp ABCD$ ，所以四棱台 $ABCD - EFGH$ 的高为 1，

$V_{ABCD-EFGH} = \frac{1}{3} \cdot 1(1 + 2 + 4) = \frac{7}{3}$9分

又因为 $V_{G-MNC} = \frac{1}{3} \cdot 1(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1}{6}$ ， $V_{H-ADN} = \frac{1}{3} \cdot 1(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1) = \frac{1}{3}$ ，

所以多面体 $ABMN - EFGH$ 的体积为 $\frac{7}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$12分

20. (12分)

【答案】(1)点 M 在直线 $x = 4$ 上；(2)直线 PQ 过定点 $(1, 0)$.

【解析】(1)证明：设 $M(x, y)$ ，则 $k_{MA} = \frac{y}{x+4}$ ， $k_{MB} = \frac{y}{x-2}$ ，2分

因为 $k_{MB} = 3k_{MA}$ ，所以 $3(x-2) = x+2$ ，即 $x = 4$ ，

故点 M 在直线 $x = 4$ 上.4分

(2) 由题知： $a = 2, c = 1, b = \sqrt{3}$ ，故 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

由 (1) 知，点 M 在直线 $x = 4$ 上，设 $M(4, m)$ ， $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$.

则 $MA: y = \frac{m}{6}(x+2)$ ，代入 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，

得 $(m^2 + 27)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 108 = 0$.

所以 $-2x_1 = \frac{4m^2 - 108}{m^2 + 27}$ ，即 $x_1 = \frac{-2m^2 + 54}{m^2 + 27}$ ，6分

故 $y_1 = \frac{m}{6}(x_1 + 2) = \frac{18m}{m^2 + 27}$ ，

同理可得： $x_2 = \frac{2m^2 - 6}{m^2 + 3}$ ， $y_2 = \frac{-6m}{m^2 + 3}$8分

取点 $N(1, 0)$ ，则 $\overrightarrow{NP} = (\frac{-3m^2 + 27}{m^2 + 27}, \frac{18m}{m^2 + 27})$ ， $\overrightarrow{NQ} = (\frac{m^2 - 9}{m^2 + 3}, \frac{-6m}{m^2 + 3})$ ，10分

又因为 $\frac{-3m^2+27}{m^2+27} \cdot \frac{-6m}{m^2+3} - \frac{18m}{m^2+27} \cdot \frac{m^2-9}{m^2+3} = 0$,

所以 $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{NQ}$, 即直线 PQ 过定点 $(1,0)$12分

21. (12分)

【考查意图】本小题主要考查函数零点、极值, 导数的应用等基础知识, 考查化归与转化、函数与方程等数学思想, 考查推理论证、运算求解等数学能力。

【解析】(1)由 $f(x) = x \ln x - a(x^2 - 1) + x$ 得 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2 (x > 0)$,

因为 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2 \leq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立,

即 $2a \geq \frac{\ln x + 2}{x}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{-\ln x - 1}{x^2}$,

可知 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

则 $x = \frac{1}{e}$ 时 $g(x)$ 取极大值 $g(\frac{1}{e}) = e$, 所以 $2a \geq e$,

所以, a 的取值范围是 $[\frac{e}{2}, +\infty)$4分

(2)由(1)知 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2$,

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 则 $f'(x) = \ln x - 2ax + 2$ 有两个零点 x_1, x_2 ,

可知 $0 < a < \frac{e}{2}$, 且 $x_2 > 2x_1 > 0$,5分

要证明 $e^6 x_1 x_2^2 > 32$, 只需证明 $\ln x_1 + 2 \ln x_2 = 5 \ln 2 - 6$6分

由 $\begin{cases} \ln x_1 - 2ax_1 + 2 = 0, \\ \ln x_2 - 2ax_2 + 2 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 - 2, \\ \ln x_2 = 2ax_2 - 2, \end{cases}$ 则 $2a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$,

所以, $\ln x_1 + 2 \ln x_2 = 2a(x_1 + 2x_2) - 6$

$$= \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} (x_1 + 2x_2) - 6$$

$$= \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1} \left(\frac{x_1}{x_2} + 2 \right) - 6.$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 则 $t \in (0, \frac{1}{2})$, 要证明 $\ln x_1 + 2 \ln x_2 > 5 \ln 2 - 6$, 需证明 $\frac{\ln t}{t-1} (t+2) > 5 \ln 2$.

.....9分

令 $h(t) = \frac{\ln t}{t-1} (t+2)$, 且 $t \in (0, \frac{1}{2})$, 则 $h'(t) = \frac{t - 3 \ln t - \frac{2}{t} + 1}{(t-1)^2}$,

令 $u(t) = t - 3 \ln t - \frac{2}{t} + 1$, 且 $t \in (0, \frac{1}{2})$, 则 $u'(t) = 1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} = \frac{(t-1)(t-2)}{t^2} > 0$,

则 $u(t)$ 在 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时单调递增, 故 $u(t) < u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 3 \ln 2 - 3 < 0$,

故 $h'(t) < 0$, 则 $h(t)$ 在 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时单调递减,

所以, $h(t) > h(\frac{1}{2}) = 5 \ln 2$, 即 $\frac{\ln t}{t-1} (t+2) > 5 \ln 2$, 则有 $\ln x_1 + 2 \ln x_2 > 5 \ln 2 - 6$.

所以 $e^6 x_1 x_2^2 > 32$, 即原不等式成立. 12分

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

【答案】(1) $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$, $l: x - y = -1$; (2) 直线 l 与圆 C_1 没有公共点.

【解析】(1) 因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数),

所以 $(x-2)^2 + y^2 = (2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2 = 4$,

即曲线 C 的普通方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 3分

因为 $\rho\cos\theta = x$, $\rho\sin\theta = y$, 由 $\rho(\cos\theta - \sin\theta) = -1$,

可得 l 的方程为: $x - y + 1 = 0$ 5分

(2) 设 $P(x, y)$, 设 $M(2 + 2\cos\theta, 2\sin\theta)$.

因为 $\overline{AP} = 2\overline{AM}$,

所以 $(x+1, y) = 2(2 + 2\cos\theta + 1, 2\sin\theta) = (6 + 4\cos\theta, 4\sin\theta)$,

则 $\begin{cases} x + 1 = 6 + 4\cos\theta, \\ y = 4\sin\theta, \end{cases}$

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 5 + 4\cos\theta, \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 8分

所以曲线 C_1 为圆心 $C_1(5, 0)$, 半径为 4 的圆.

而圆心 C_1 到直线 l 的距离为 $\frac{|5 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$.

因为 $3\sqrt{2} > 4$, 所以直线 l 与圆 C_1 相离, 故直线 l 与圆 C_1 没有公共点. 10分

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

【考查意图】本小题以含绝对值的不等式为命题情境, 主要考查不等式的证明方法、重要不等式等基础知识; 考查推理论证能力、运算求解能力; 逻辑推理、数学运算素养。

【解析】(1) 当 $x < -2$ 时, $f(x) = -2x + 2 - x - 2 \leq 6 - x$, 解得 $-3 \leq x < -2$; 1分

当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = -2x + 2 + x + 2 \leq 6 - x$, 可得 $-2 \leq x \leq 1$; 2分

当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2x - 2 + x + 2 \leq 6 - x$, 解得 $1 < x \leq \frac{3}{2}$; 3分

综上所述, 原不等式的解集为 $\{x \mid -3 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$ 5分

(2) 若 $x < -2$, 则 $f(x) = -3x > 6$;

若 $-2 \leq x \leq 1$, 则 $f(x) = -x + 4 \geq 3$;

若 $x > 1$, 则 $f(x) = 3x > 3$.

所以函数 $f(x)$ 的最小值 $T = 3$, 故 $a + b + c = 3$ 7分

又 a, b, c 为正数,

则有 $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c})(a + b + c) = 6 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{4a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{4b}{c}$

$$\begin{aligned} &\geq 6 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{4b}{c}} \\ &= 16. \end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{3}{2}$ 时等号成立.

所以, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{3}$ 10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯